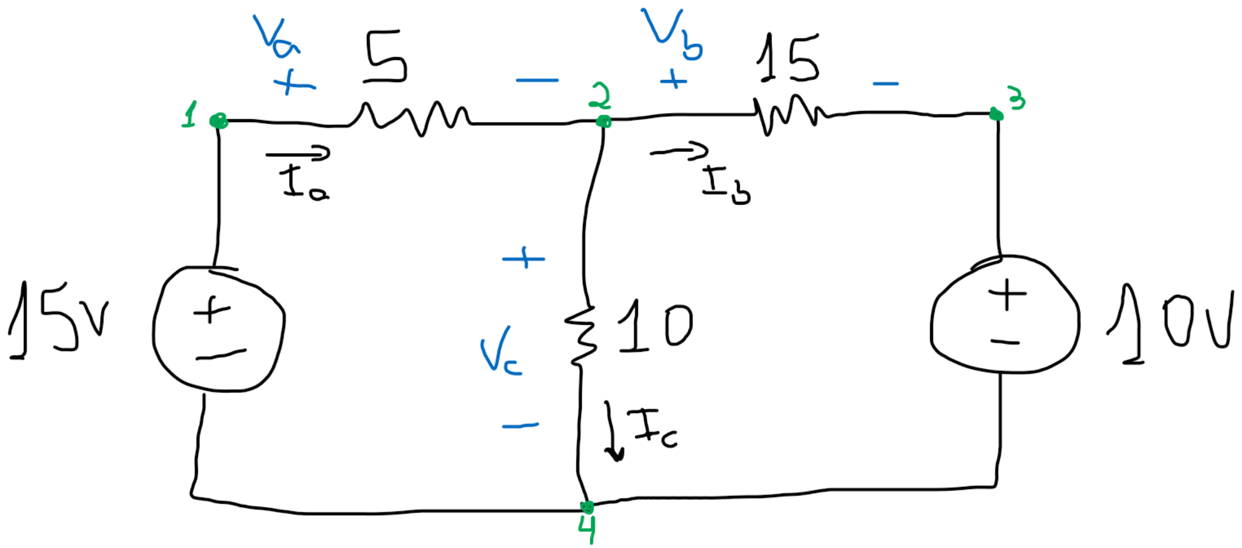
TÉCNICAS AVANÇADAS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS

ANÁLISE DE MALHAS

Prof. Marcos Fergutz
Julho/20

ANÁLISE DE MALHAS

- Circuitos contendo apenas Resistores e Fontes de Tensão Independentes



Ramo: caminho entre dois nós, podendo conter qualquer elemento de circuito (fontes, resistor/condutância)

No circuito se tem 5 ***RAMOS***:
- 3 contendo Resistores;
- 2 contendo Fontes de Tensão Independentes

I_a, I_b e I_c são Correntes de Ramos

Equacionando o circuito com as ferramentas da 1ª. Prova:

$M1$: $-15 + V_a + V_c = 0$ (1)

$M2$: $+10 - V_c + V_b = 0$ (2)

Nó 2: $I_a = I_b + I_c$ ➔ $I_c = I_a - I_b$ (3)

Sendo: $V_a = 5.I_a$ (4)

$V_b = 15.I_b$ (5)

$V_c = 10.I_c$ (6)

Substituindo 3 em 6, tem-se:

$V_c = 10.(I_a - I_b)$ (7)

Substituindo 4, 5 e 7 em 1 e 2, tem-se:

$5.I_a + 10(I_a - I_b) = 15$ (8)

$-10(I_a - I_b) + 15.I_b = -10$ (9)

Ajustando, se tem:

$(5+10)I_a - 10.I_b = 15$ (10)

$-10.I_a + (10+15)I_b = -10$ (11)

Colocando as equações 10 e 11 na forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 5+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

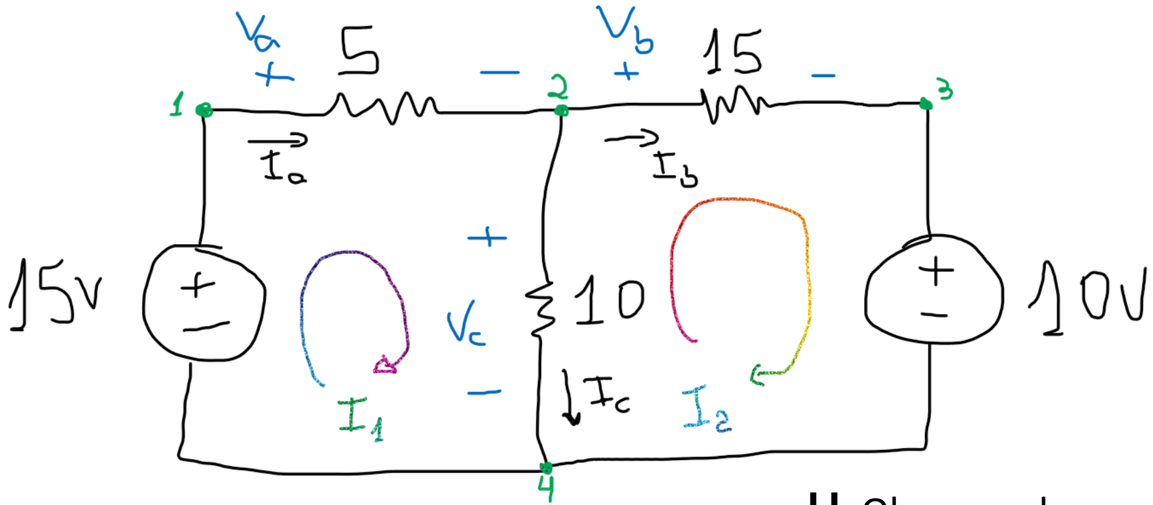
Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

[R]x[I]=[V]

[R] ➔ Matriz Resistência

Analisando o circuito com a aplicação do conceito de Correntes de Malha



Corrente de Malha: definida como sendo uma corrente que hipoteticamente circula em determinada Malha. É um ente de análise e não físico que permite agilizar a análise de circuitos com duas ou mais malhas.

No circuito dado se tem duas Malhas, sendo atribuída a cada uma a respectiva corrente.

Portanto, I_1 e I_2 são correntes de Malha.

Equacionando o circuito por Malha, se tem:

$$M1: \ -15 + 5.I_1 + 10(I_1 - I_2) = 0 \quad (12)$$

$$M2: \ +10 + 10(I_2 - I_1) + 15.I_2 = 0 \quad (13)$$

Organizando as equações 12 e 13, se obtém:

$$(5+10)I_1 - 10.I_2 = 15 \qquad (14)$$

$$-10.I_1 + (10+15)I_2 = -10 \qquad (15)$$

Relembrando as equações 10 e 11, tem-se:

$$(5+10)I_a - 10.I_b = 15 \qquad (10)$$

$$-10.I_a + (10+15)I_b = -10 \qquad (11)$$

Observando no circuito que a corrente de malha I1 passa pelo resistor de 5Ω, se pode concluir que a corrente de ramo $I_a = I_1$. Por raciocínio semelhante, $I_b = I_2$. Então:

$$I_c = I_a - I_b = I_1 - I_2$$

Colocando as equações 10 e 11 na forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 5+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$[R] \quad x \ [I] = [V]$$

Matriz Resistência **Matriz FONTES**

INSPEÇÃO do CIRCUITO ➔ [R] e [V]

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M1 & M2 \end{array} \\ \begin{array}{c} M1 \\ M2 \end{array} & \begin{bmatrix} 5+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{bmatrix} \end{array} x \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +15 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Soma dos Rs que são percorridos pela mesma corrente de Malha

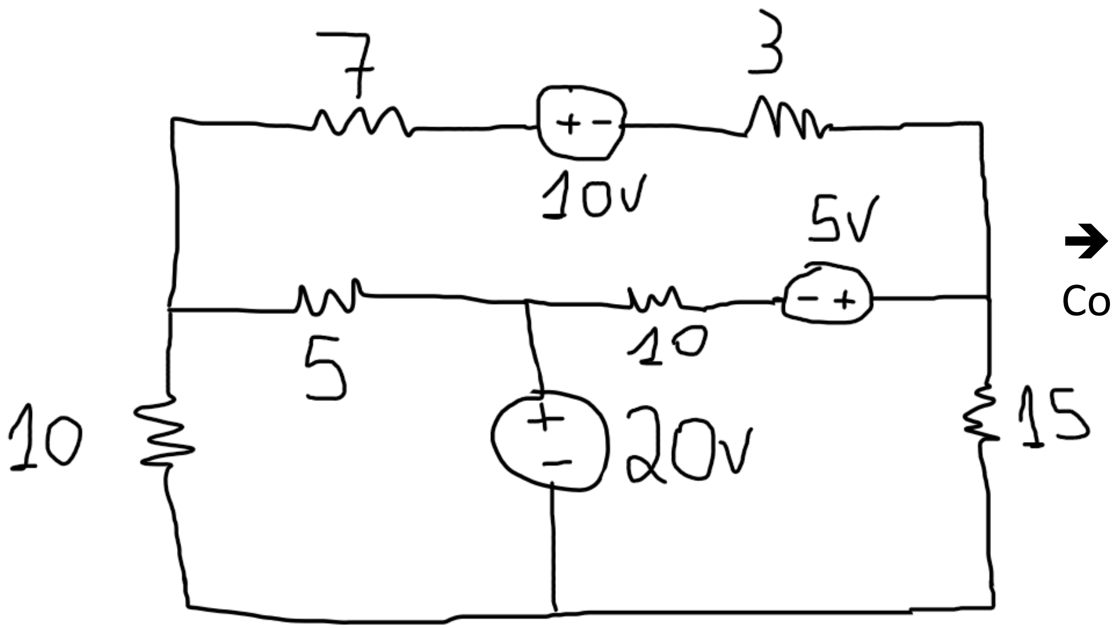
Soma dos Rs que fazem fronteira entre duas malhas adjacentes

Valor da Fonte de Tensão (FT) que está presente em cada Malha.
O sinal será + se a FT estiver com polarização Ativa
O sinal será – se a FT estiver com polarização passiva

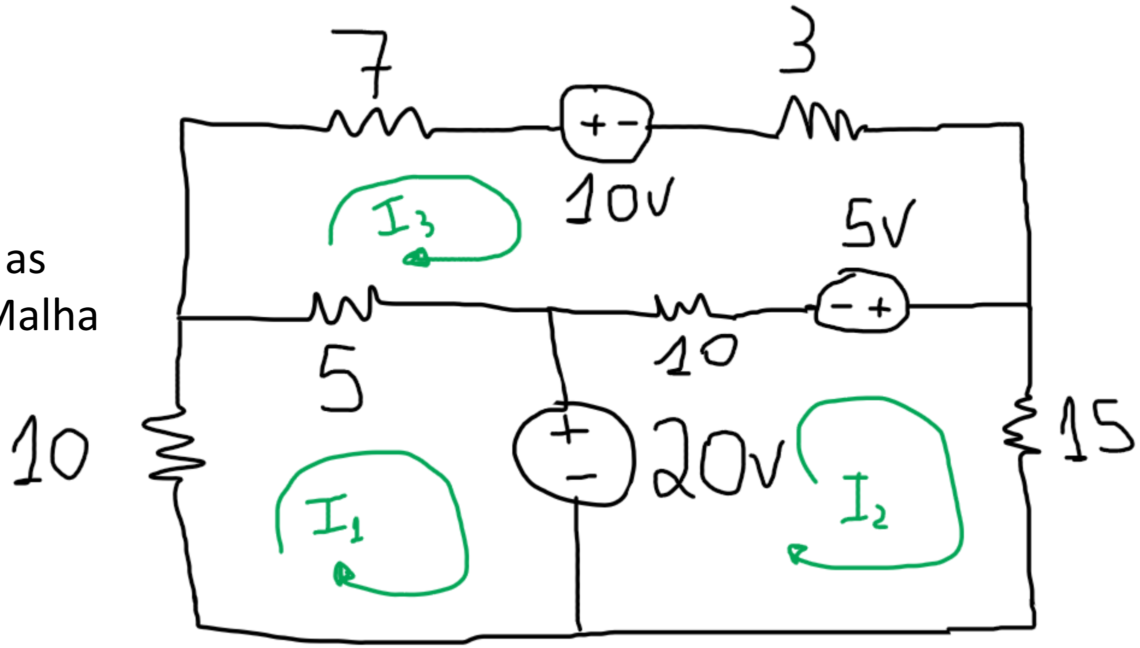
Características da Matriz [R]:

- Todos os elementos da diagonal principal são positivos;
- Todos os demais elementos são negativos;
- Simetria em relação à diagonal principal.

Exercício 1: Obter o Sistema de Equações para o Circuito resistivo



➔Polarizando as Correntes de Malha



$$M1: \; 10.I_1 + 5(I_1 - I_3) + 20 = 0$$

$$M2: -20 + 10(I_2 - I_3) - 5 + 15I_2 = 0$$

$$M3: 7.I_3 + 10 + 3.I_3 + 5 + 10(I_3 - I_2) + 5(I_3 - I_1) = 0$$

Ajustando as equações, tem-se:

$$\left.\begin{aligned} 15.I_1 - 5.I_3 &= -20 \\ 25.I_2 - 10I_3 &= 25 \\ -5I_1 - 10.I_2 + 25.I_3 &= -15 \end{aligned}\right\}$$

Este é o sistema de equações que resolve o problema

Resposta: I1 = -1.534,48mA   I2= 758,62mA   I3= -603,45mA

Por inspeção se pode obter a Matriz Resistência [R] para o circuito:

$$\begin{array}{c} \\ M1 \\ M2 \\ M3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} M1 & M2 & M3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10+5 & 0 & -5 \\ 0 & 10+15 & -10 \\ -5 & -10 & 7+3+10+5 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 0 & -5 \\ 0 & 25 & -10 \\ -5 & -10 & 25 \end{bmatrix}$$

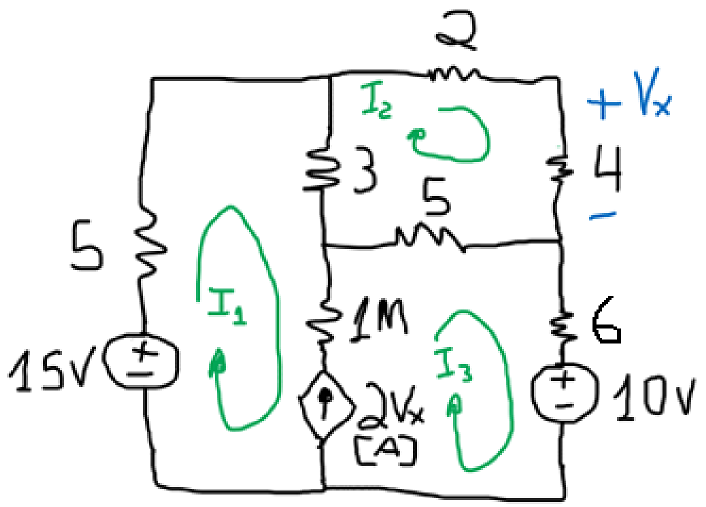
Observar que a Matriz [R] :

- Tem todos os elementos positivos na diagonal principal;
- Os demais elementos são negativos ou zero;
- É simétrica em relação à diagonal principal.

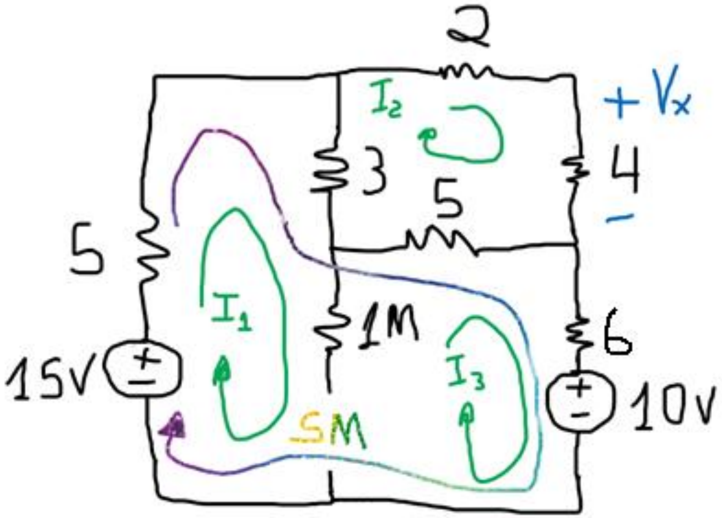
Para a Matriz FONTES [V]: $\begin{bmatrix} -20 \\ 20+5 \\ -10-5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -20 \\ +25 \\ -15 \end{bmatrix}$

- Circuitos contendo Fontes de Corrente ou Fontes Dependentes

Dado o Circuito 1 com a polarização das correntes de malha:



Circuito 1 – Correntes de Malha



Circuito 2 – Super Malha

Devido à presença de outras fontes que não as de Tensão Independentes, haverá de ser escrita uma equação para relacionar estas outras fontes com as Correntes de Malha. Assim, no Circuito 1, para a Fonte de Corrente Dependente de Tensão, se terá:

$I_3 - I_1 = 2.V_x \quad (1) \quad e, \qquad V_x = 4.I_2 \quad (2)$ Substituindo 2 em 1, se tem:

$I_3 - I_1 = 8.I_2$ Ajustando, obtem-se: $\boxed{-I_1 - 8.I_2 + I_3 = 0 \quad (3)}$

Uma vez escrita a relação da fonte com as correntes de malha, isto permitirá se instituir um artifício para continuar a análise do circuito. O artifício consiste em se “RETIRAR ou MATAR” a fonte de corrente do circuito e deixar em seu lugar um CIRCUITO ABERTO. Assim, se pode reescrever conforme o Circuito 2:

Observar que no Circuito 2 o resistor de 1MΩ pode ser “ignorado” na análise, visto que, por estar em série com uma fonte de corrente a sua diferença de potencial e a potência dissipada podem ser diretamente definidas. Ainda, com a retirada da fonte de corrente, aparece uma hipotética malha, denominada Super Malha (SM), formada pelas Malhas 1 e 3. Desta forma, se poderá escrever um equação seguindo o caminho da SM, conforme segue:

$-15 + 5.I_1 + 3(I_1 - I_2) + 5(I_3 - I_2) + 6.I_3 + 10 = 0$ Ajustando, se tem:

$$\boxed{8.I_1 - 8.I_2 + 11.I_3 = 5 \quad (4)}$$

Ainda, se pode obter mais uma equação analisando a Malha 2:

$2.I_2 + 4I_2 + 5(I_2 - I_3) + 3(I_2 - I_1) = 0$ Organizando a equação se tem:

$$\boxed{-3.I_1 + 14.I_2 - 5.I_3 = 0 \quad (5)}$$

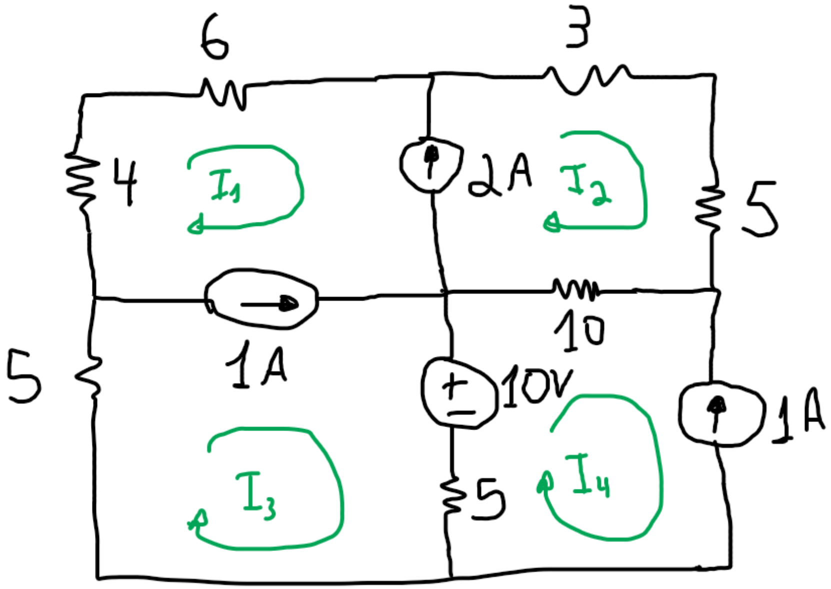
As equações 3, 4 e 5 fornecem a solução para o circuito.

$$[R] = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 1 \\ 8 & -8 & 11 \\ -3 & 14 & -5 \end{bmatrix}$$

Por fim, se deve observa que a Matriz [R] não pode ser obtida por inspeção do circuito:

Resposta: I1 = -890,41mA I2= 273,97mA I3= 1.301,37mA

Exercício 2: Obter o Sistema de Equações para o Circuito



Circuito 1 – Correntes de Malha

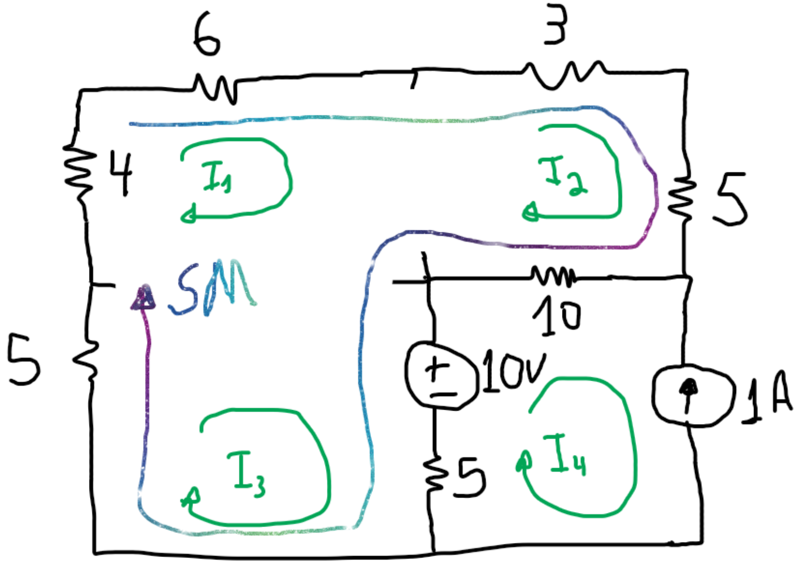
Dada a polarização de todas as correntes de malha no Circuito 1, o passo seguinte é relacionar as fontes de correntes com as correntes de malha. Assim:

$$I_2 - I_1 = 2 \quad (1)$$

$$I_3 - I_1 = 1 \quad (2)$$

$$I_4 = -1A \quad (3)$$

Na sequência, se deve identificar as possíveis Super Malhas (SM) existentes no Circuito 1. Pode-se verificar que a Fonte de 2A, entre as Malhas 1 e 2, e a fonte de 1A, entre as Malhas 1 e 3, são passivas de serem retiradas do circuito, gerando a "união" das Malhas 1, 2 e 3, formando uma SM, a qual pode ser identificada no Circuito 2.



Circuito 2 – Super Malha (SM)

Percorrendo a SM no Circuito 2, se pode escrever a seguinte equação:

$$4.I_1 + 6.I_1 + 3.I_2 + 5.I_2 + 10(I_2 - I_4) + 10 + 5(I_3 - I_4) + 5.I_3 = 0$$

Ajustando a equação, se tem: $$10.I_1 + 18.I_2 + 10.I_3 - 15.I_4 = -10 \quad (4)$$

Assim, as equações 1, 2, 3 e 4 formam o sistema que resolverá o circuito em questão. Observar que a equação 3 já resolve a corrente de malha I4. Isto reduz a solução a um sistema de 3 equações.

Resposta: $I_1 = -1.868{,}42mA$ $I_2 = 131{,}58mA$ $I_3 = -868{,}42mA$