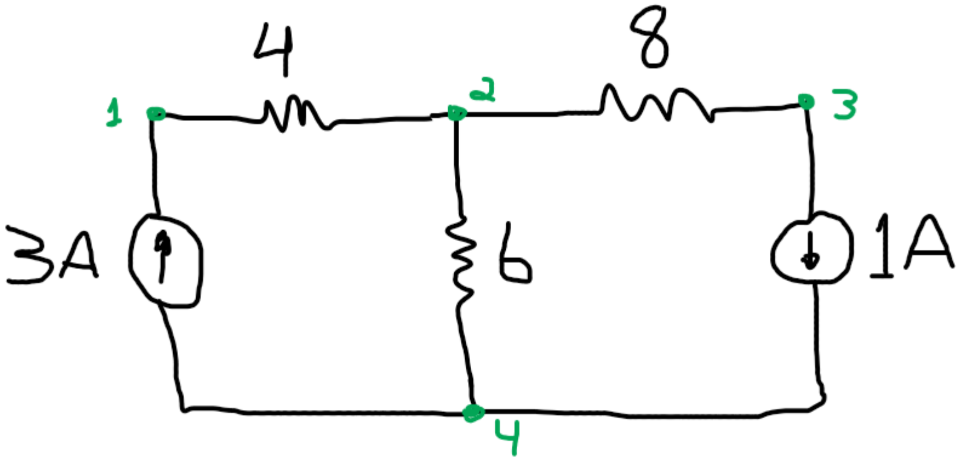
TÉCNICAS AVANÇADAS DE ANÁLISE DE CIRCUITOS

ANÁLISE NODAL

Prof. Marcos Fergutz
Setembro/23

ANÁLISE NODAL

- Circuitos contendo apenas Condutâncias e Fontes de Corrente Independentes

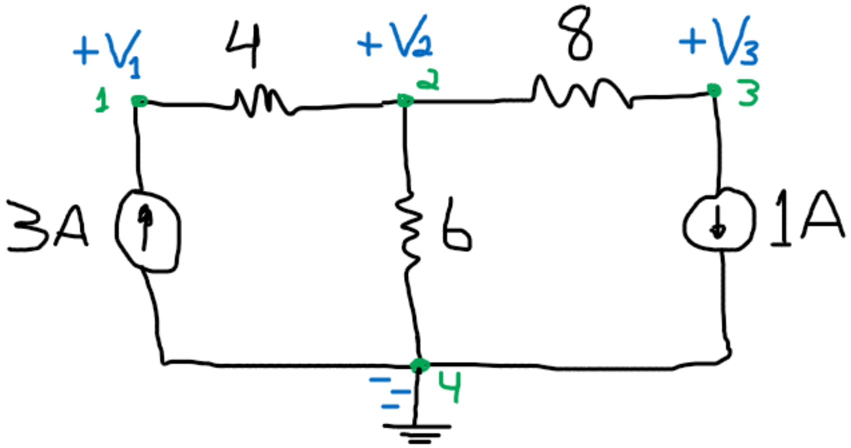


Circuito 1 – Análise Nodal

Nó de Referência : é o NÓ que servirá de referência para os demais NÓS do circuito. Se atribuirá para cada um dos demais NÓS do circuito, para fins de análise, uma diferença de potencial que terá como referência o polo negativo, atribuído ao NÓ de Referência.

Considerações:
- No Circuito 1 se tem 4 ***NÓS;***
- Se atribuirá para os Nós 1, 2 e 3 uma diferença de potencial destes para com o ***nó 4***, tendo o ***nó 4*** como o polo negativo;
- O ***nó 4*** será o Nó de Referência e portanto, com o potencial 0 V;

Dadas as considerações feitas, se pode escrever o Circuito 2 como:



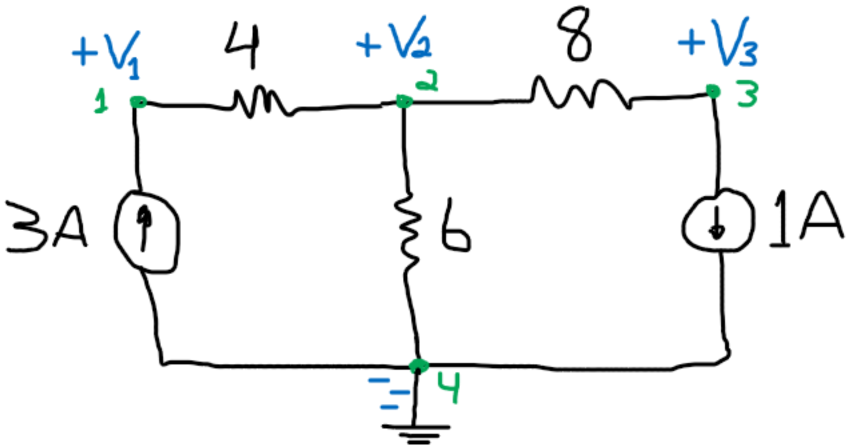
Circuito 2 – Polarizações e Nó de Referência

No Circuito 2 se pode observar:
- O ***nó 4*** recebeu o sinal gráfico referente ao Nó de Referência;
- Para os demais ***nós*** foram atribuídas as “Tensões de Nó”;
- Nas Tensões de Nó estão indicadas a polarização positiva (+) ;
- No ***nó 4*** (Referência) estão indicadas 3 polarizações negativas (-)

Cabe ressaltar que as polarizações positivas (+) e negativas (-) estão indicadas no Circuito 2 apenas para reforçar a ideia principal da técnica de Análise Nodal (Nó de Referência e Tensão de Nó). Uma vez entendido o conceito, se fará a dispensa da indicação das polarizações envolvendo NÓ.

Em termos de ramos, toda e qualquer diferença de potencial será determinada utilizando-se as Tensões de Nó envolvidas em cada ramo.

Reescrevendo o Circuito 2:



Circuito 2 – Polarizações e Nó de Referência

Considerações para a análise do Circuito 2:

- Circuito composto por Condutâncias (I=G.V) e Fontes de Corrente Independentes;
- Dado que se está trabalhando com nó, tensões de nó e fontes de corrente independentes, isto remete ao conceito da Lei de Kirchoff das Correntes (LKC);
- Para cada nó, excetuando-se o de referência, deverá ser escrita uma LKC ($\Sigma I_s = \Sigma I_e$);
- O sistema de equações gerado se designa Análise Nodal
- Observar que no Circuito 2 se tem 4 nós, mas se escreverá apenas 3 equações, posto que o nó de referência é "comum" aos demais nós.
- As correntes nos ramos condutivos serão escritas em função das tensões de nó envolvidas em cada ramo e com a polarização da corrente saindo do nó analisado.

Equacionando o circuito por LKC, se tem:

Nó1: $4(V_1 - V_2) = 3 \quad (1)$

Nó2: $4(V_2 - V_1) + 8(V_2 - V_3) + 6.V_2 = 0 \quad (2)$

Nó3: $8(V_3 - V_{2)} + 1 = 0 \quad (3)$

Organizando as equações 1, 2 e 3, se obtém:

$$4.V_1 - 4.V_2 = 3 \qquad (4)$$

$$-4.V_1 + (4+8+6)V_2 - 8V_3 = 0 \qquad (5)$$

$$-8.V_2 + 8.V_3 = -1 \qquad (6)$$

Colocando as equações 4, 5 e 6 na forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4+8+6 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 18 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

[G] *x* [V] = [I]

Matriz Condutância **Matriz FONTES**

INSPEÇÃO do CIRCUITO ➔ [G] e [I]

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} N1 & N2 & N3 \end{array} \\ \begin{array}{c} N1 \\ N2 \\ N3 \end{array} & \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4+8+6 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \end{bmatrix} \end{array} x \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Soma das Gs que são conectadas no mesmo Nó

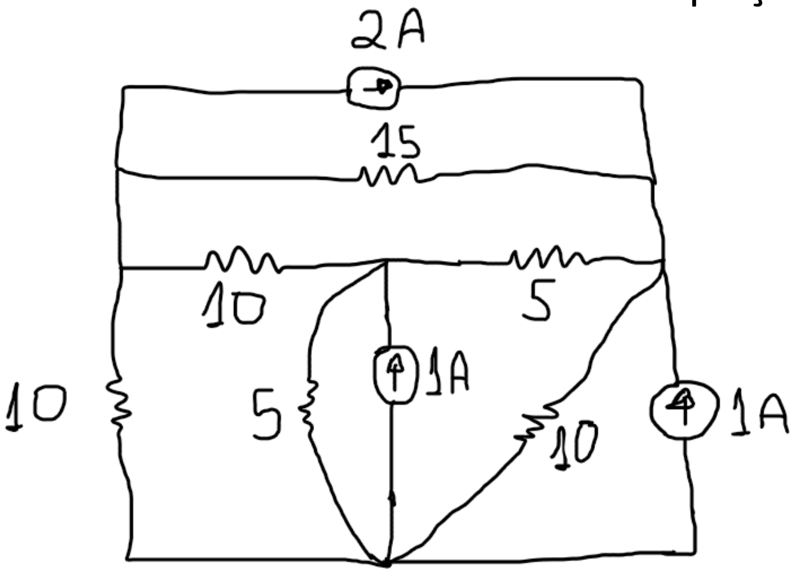
Soma das Gs que se ligam a um mesmo par de Nós

Valor da Fonte de Corrente (FC) que está conectada ao Nó.
O sinal será + se a FT estiver com polarização Ativa
O sinal será – se a FT estiver com polarização passiva

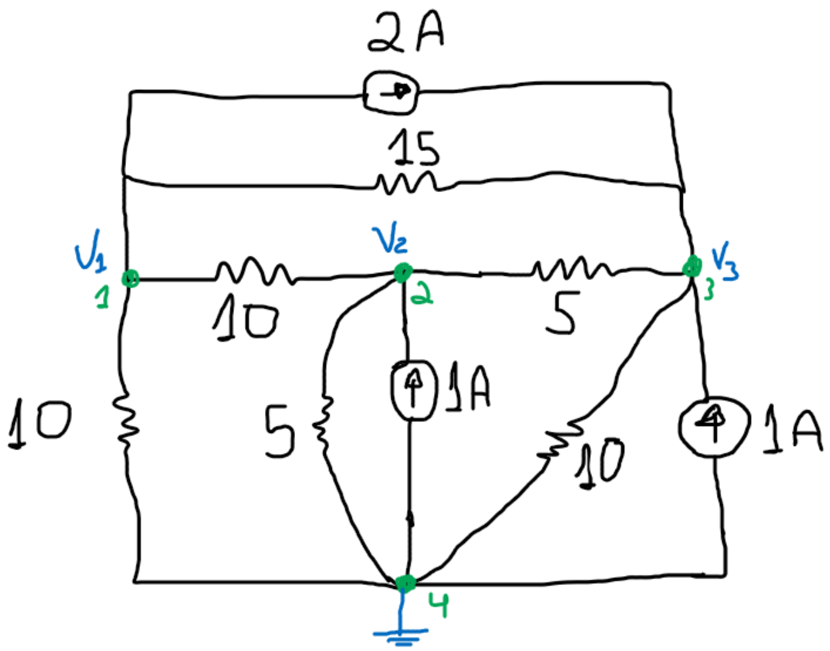
Características da Matriz [G]:

- Todos os elementos da diagonal principal são positivos;
- Todos os demais elementos são negativos;
- Simetria em relação à diagonal principal.

Exercício 1: Obter o Sistema de Equações para o Circuito Resistivo



Definindo o Nó de Referência e polarizando as Tensões de Nó ➔



Analisando o circuito, tem-se:

$$Nó1: \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{10} + \frac{V_1 - V_3}{15} + 2 = 0$$

$$Nó2: \frac{V_2}{5} + \frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2 - V_3}{5} = 1$$

$$Nó3: \frac{V_3}{10} + \frac{V_3 - V_1}{15} + \frac{V_3 - V_2}{5} = 1 + 2$$

Ajustando as equações, tem-se:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{15}V_1 - \frac{1}{10}V_2 - \frac{1}{15}V_3 &= -2 \\ -\frac{1}{10}V_1 + \frac{1}{2}V_2 - \frac{1}{5}V_3 &= 1 \\ -\frac{1}{15}V_1 - \frac{1}{5}V_2 + \frac{11}{30}V_3 &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Este é o sistema de equações que resolve o problema

Resposta: V_1 = -2,58V V_2= 5,84V V_3=10,90V

Por inspeção se pode obter a Matriz Resistência [R] para o circuito:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{N1} & \text{N2} & \text{N3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{N1} \\ \text{N2} \\ \text{N3} \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5} \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{30} \end{bmatrix}$$

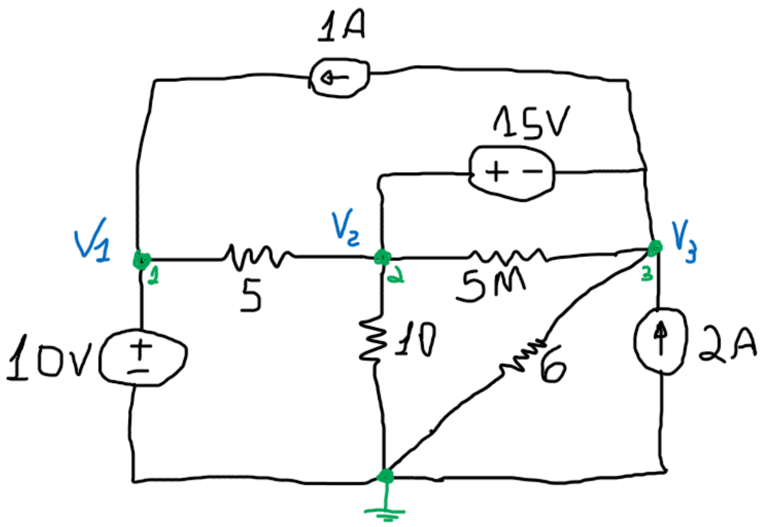
Observar que a Matriz [R] :

- Tem todos os elementos positivos na diagonal principal;
- Os demais elementos são negativos ou zero;
- É simétrica em relação à diagonal principal.

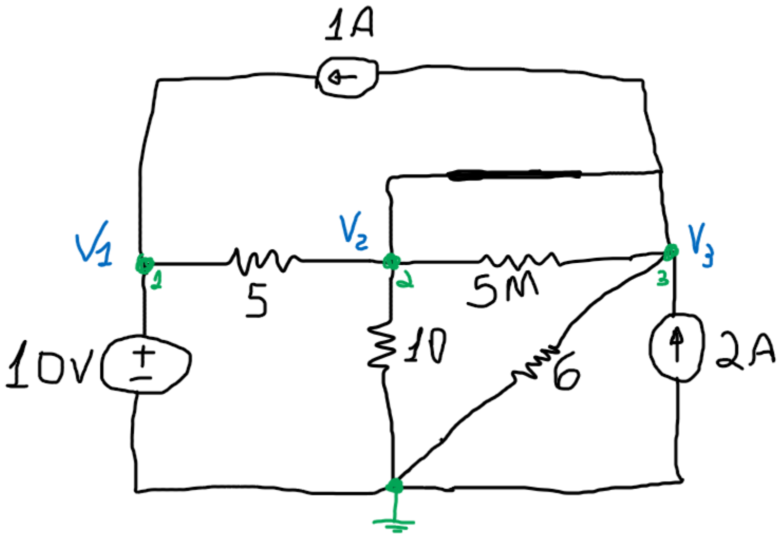
Para a Matriz FONTES [I]: $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1+2 \end{bmatrix}$ ➔ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

- Circuitos contendo Fontes de Tensão ou Fontes Dependentes

Dado o Circuito 1 com a polarização das Tensões de Nó:



Circuito 1 – Tensões de Nó



Circuito 2 – Super Nó

Devido à presença de outras fontes que não as de Corrente Independentes, haverá de ser escrita uma equação para relacionar estas outras fontes com as Tensões de Nó. Assim, no Circuito 1, para as Fonte de Tensão Independentes , se terá:

Para a Fonte de 10V por estar ligada ao nó de referência, se pode escrever: $\boxed{V_1 = 10V \quad (1)}$

Para a Fonte de 15V, se pode escrever, observando a polarização da fonte: $\boxed{V_2 - V_3 = 15 \quad (2)}$

Uma vez escrita a relação da fonte com as Tensões de Nó, isto permitirá se instituir um artifício para continuar a análise do circuito. O artifício consiste em se "RETIRAR ou MATAR" a fonte de Tensão do circuito e deixar em seu lugar um CURTO-CIRCUITO. Isto se aplica às fontes que não estejam ligadas ao nó de referência. Assim, se pode reescrever conforme o Circuito 2:

Observar que no Circuito 2 o resistor de 5MΩ pode ser "ignorado" na análise, visto que, por estar em paralelo com uma fonte de tensão a sua corrente e a potência dissipada podem ser diretamente definidas. Ainda, com a retirada da fonte de Tensão, aparece um curto entre os nós 2 e 3, denominado Super Nó (SN). Desta forma, se poderá aplicar LKC e escrever um equação relacionando as correntes que saem e entram no SN, conforme segue:

$$\frac{V_2 - V_1}{5} + \frac{V_2}{10} + \frac{V_3}{6} + 1 = 2 \qquad (3)$$

Ajustando, se tem: $\boxed{-\frac{1}{5}V_1 + \frac{3}{10}V_2 + \frac{1}{6}V_3 = 1 \quad (4)}$

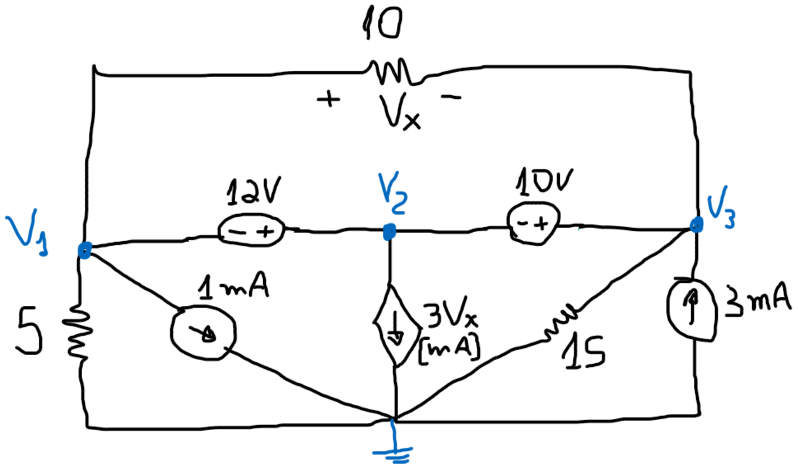
As equações 1, 2 e 4 fornecem a solução para o circuito. De forma Matricial, se obtém:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

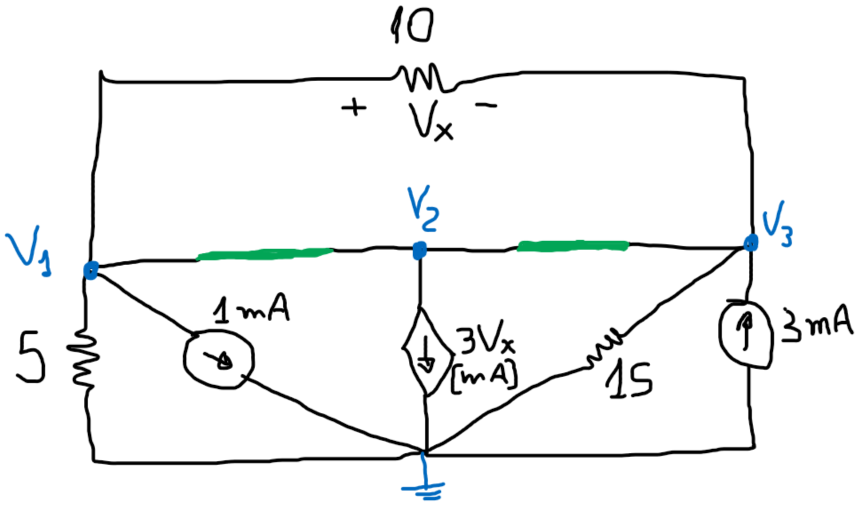
Por fim, se deve observar que a Matriz [R] não pode ser obtida por inspeção do circuito, pois com a presença de Fontes de Tensão a Matriz fica distorcida e não cumpre com as condições: i) simetria com relação à diagonal principal; ii) todos os elementos fora da diagonal principal devem ser negativos.

Resposta: V_1 = 10V V_2= 11,79V V_3= -3,21V

Exercício 2: Obter o Sistema de Equações para o Circuito Resistivo



Circuito 1 – Tensões de Nó



Circuito 2 – Super Nó (SN)

Dada a polarização de todas as Tensões de Nó no Circuito 1, o passo seguinte é relacionar as fontes de tensão com as tensões de Nó. Assim:

$$\boxed{V_2 - V_1 = 12 \quad (1)} \qquad \boxed{V_3 - V_2 = 10 \quad (2)}$$

Para a fonte dependente há que se escreve a variável de controle em função das tensões de nó:

$$V_x = V_1 - V_3 \qquad (3)$$

Na sequência, se deve identificar os possíveis Super Nós (SN) existentes no Circuito 1, reescrevendo tal como o Circuito 2:

Observando o Circuito 2, se pode observar que há um SUPER NÓ envolvendo os nós 1,2 e 3, o que gera um curto no resistor de 10Ω, por consequência, não entrará na análise do circuito. Portanto, aplicando LKC no SN, se tem a seguinte equação:

$$\frac{1}{5}V_1 + 1.10^{-3} + 3.10^{-3}.V_x + \frac{1}{15}V_3 = 3.10^{-3} \quad (4)$$

Substituindo 3 em 4, tem-se

$$\frac{1}{5}V_1 + 3.10^{-3}\,(V_1 - V_3) + \frac{1}{15}V_3 = (3-1).10^{-3} \quad (5)$$

Ajustando a equação 5, se tem: $\frac{1{,}015}{5}V_1 - \frac{0{,}955}{15}V_3 = 2.10^{-3}$ ➔

$0{,}955/15 = 0{,}0636666666$
Ajustando para 2 casas decimais considerando a ordem de grandeza, obtém-se:
$0{,}955/15 = 63{,}67.10^{-3}$

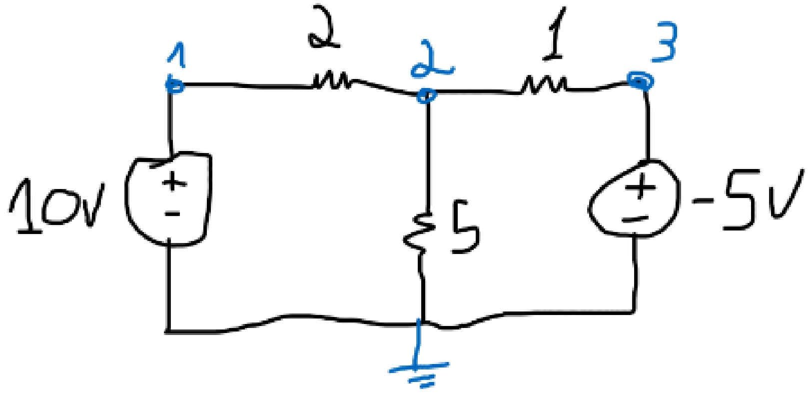
$$203.10^{-3}V_1 - 63{,}67.10^{-3}V_3 = 2.10^{-3} \;➔\; \boxed{203.V_1 - 63{,}67V_3 = 2 \quad (6)}$$

Assim, as equações 1, 2 e 6 formam o sistema que resolverá o circuito em questão.

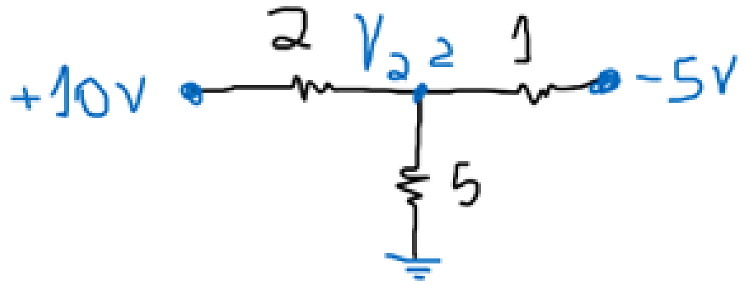
Resposta: $V_1 = -5{,}25V$ $\quad V_2 = 6{,}75V$ $\quad V_3 = 16{,}75V$

- Representação simplificada de circuitos

Considerando o Circuito abaixo:



Dada a presença do NÓ de Referência, então, pode se simplificar a representação do circuito, conforme segue:



A equação que resolve o circuito, será:

$$\frac{V_2 - 10}{2} + \frac{V_2 - (-5)}{1} + \frac{V_2}{5} = 0$$