OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE VIGAS ESPACIAIS[1]

Sarah Maria Schroeder[2], Eduardo Lenz Cardoso[3]

[1] Vinculado ao projeto "Desenvolvimento e Aplicação de Métodos Numéricos a Problemas do Contínuo – Otimização topológica de meios contínuos"
[2] Acadêmica do Curso de Engenharia Mecânica – CCT – Bolsista PIBIC/CNPq
[3] Orientador, Departamento de Engenharia Mecânica – CCT – eduardo.cardoso@udesc.br

Otimização é a extremização de um objetivo, atendendo a um conjunto de restrições. No contexto do presente trabalho, o objetivo e as restrições estão associados ao comportamento de uma estrutura mecânica, ao que chamamos de otimização estrutural. Ao utilizarmos a otimização estrutural, podemos projetar uma estrutura de forma sistemática, tendo em vista desde o começo do projeto o comportamento extremo.
Primeiramente, é preciso desenvolver a teoria matemática e computacional do Método dos Elementos Finitos (MEF). Em seguida, inicia-se o processo de aprendizagem da otimização, escopo principal da pesquisa.
Dessa forma, para o primeiro objetivo mencionado, através de aulas práticas e teóricas, foi desenvolvido um programa computacional para a análise de elementos de viga 3D, seis graus de liberdade por nó, com rotinas para o cálculo da matriz de rigidez e rotação, entrada de dados e resolução do sistema. O programa apresenta ao final os deslocamentos dos nós da estrutura e foi validado com exemplos onde o resultado era conhecido.
Com a finalização do primeiro objetivo, parte-se para o estudo da otimização. Foram desenvolvidas diversas rotinas, com os estudos iniciais concentrando-se na otimização sem estudos topológicos, irrestrita, para funções unimodais. A teoria da otimização topológica foi desenvolvida ao final. Nesse contexto, assumimos que um domínio de projeto fixo Ω é discretizado com um grande número de elementos finitos Ωe, também conhecidos como estrutura base, conforme mostrado na Fig. 1, do primeiro resultado apresentado, nas linhas em azul. A matriz de rigidez de cada elemento é assumida como diretamente proporcional ao Módulo de Young, abordagem também conhecida como SIMP, ou Material Isotrópico Sólido com Penalização,

$$E_e(\rho_e) = \rho_e^p E^0, \tag{1}$$

em que E_0 é o Módulo de Young do material base, ρ_e é a densidade relativa do material do elemento e, E_e^0 é o Módulo de Young efetivo do elemento e, e p é um parâmetro de penalização positivo. Assim, a matriz de rigidez do elemento e também é proporcional a $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{p}}$,

$$\boldsymbol{K}_e(\rho_e) = \rho_e^p \boldsymbol{K}_e^0, \tag{2}$$

onde K_e^0 é a matriz de rigidez avaliada utilizando E_e^0. Dessa forma, o problema de otimização fica definido como

$$\mathrm{P}\begin{cases}\min C(\boldsymbol{\rho}) \;=\; \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{F} \\ Tq \\ \quad \boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{F} \\ \qquad V(\boldsymbol{\rho}) \leq \bar{V} \\ \qquad \boldsymbol{0} < \boldsymbol{\rho} \leq \boldsymbol{1}\end{cases}, \tag{3}$$

onde $C(\boldsymbol{\rho})$ é a função flexibilidade estática,

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{n} \rho_e v_e^0 \tag{4}$$

é o volume,

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \cup_{e=1}^{n} \rho_e^p \boldsymbol{K}_e^0 \tag{5}$$

é a matriz de rigidez global, $\cup$ é o operador de montagem e v_e^0 é o volume do elemento e, $\boldsymbol{F}$ é o vetor de forças e $\boldsymbol{U}$ é o vetor de deslocamentos. A derivada da função objetivo em relação a ρ_m é dada por

$$\frac{dC(\boldsymbol{\rho})}{d\rho_m} = -\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{\rho})\frac{d\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\rho})}{d\rho_m}\mathbf{U}(\rho) = -\mathrm{p}\rho_m^{p-1} u_m^T \boldsymbol{K}_m^0 \boldsymbol{u}_m, \tag{6}$$

onde $\boldsymbol{u}_m$ é o vetor de deslocamentos do elemento m. A derivada do volume em relação a ρ_m é dada por

$$\frac{dV(\boldsymbol{\rho})}{d\rho_m} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{d\rho_e}{d\rho_m} v_e^0 = v_m^0. \tag{7}$$

O problema de otimização apresentado anteriormente pode então ser reformulado em

$$\min \mathcal{L}(\boldsymbol{\rho}, \mu) = \min C(\boldsymbol{\rho}) + \mu(V(\boldsymbol{\rho}) - \bar{V}) \tag{8}$$

onde $\mathcal{L}$ é a função de Lagrange e $\mu \geq 0$ é o multiplicador de Karush-Kuhn-Tucker. A condição de estacionariedade $\nabla\mathcal{L} = 0$ leva a

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\rho_m} = \frac{dC}{d\rho_m} + \mu\frac{dV}{d\rho_m} = 0, \quad m = 1..n_e \tag{9}$$

e dividindo por $\mu \frac{dV}{d\rho_m}$, obtém-se

$$-\frac{\frac{dC}{d\rho_m}}{\mu \frac{dV}{d\rho_m}} = \beta = 1, \quad \forall m. \tag{10}$$

Com essa relação, os critérios de ótimo foram obtidos,

$$\rho_m^{k+1} = \rho_m^k \beta^\eta, \tag{11}$$

onde η é uma constante de relaxação (geralmente 0,5). Esse procedimento, apesar de útil e implementado durante os estudos, é caro computacionalmente para problemas com grande número de restrições. Assim, foi utilizado a função de Lagrange Aumentada, com o problema tornando-se

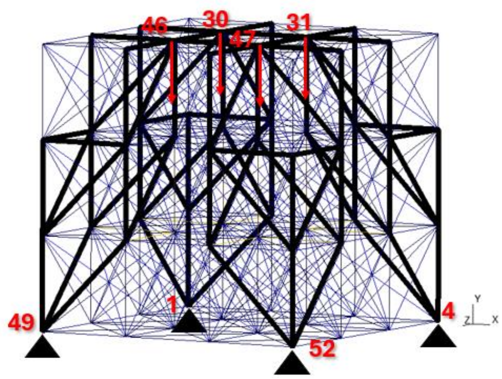
$$\min L_A^k(\boldsymbol{\rho}) = C(\boldsymbol{\rho}) + \frac{c^k}{2} \sum_{j=1}^{m} \left\langle \frac{\mu_j^k}{c^k} + g_j(\boldsymbol{\rho}) \right\rangle^2, \tag{12}$$

onde m é o número de restrições, $L_A^k(\boldsymbol{\rho})$ é a função de Lagrange Aumentada, em uma iteração de otimização externa $k = 1 \ldots nk$ onde nk é o número de iterações, c^k é o termo de penalização e μ_j^k são os multiplicadores para a restrição j na iteração k. O operador $\langle a \rangle = \max(0, a)$ é usado para considerar as desigualdades. Esse método é baseado em uma aproximação da verdadeira Função de Lagrange, mas os multiplicadores $\boldsymbol{\mu}$ não são variáveis do problema. Em vez disso, começa-se com $\boldsymbol{\mu_0} = \mathbf{0}$ e um dado c_0, de modo que a primeira iteração externa $k = 0$ é um problema de penalização externa pura. Para as iterações externas restantes, tanto $\boldsymbol{\mu}$ quanto c são atualizados com $c^{k+1} = \gamma c^k$ e $\mu_j^{k+1} = \langle \mu_j^k + c^k g_j(\boldsymbol{\rho}^k) \rangle$, onde γé uma constante maior do que 0,0.
O problema é considerado resolvido quando as condições de otimalidade $\mu_k^j g_j(\boldsymbol{\rho}_k) \leq \delta, \forall j$ são atendidas, onde δ é uma tolerância. Assim, essa abordagem também foi implementada para resolver o problema de otimização descrito. A solução para um dado k é realizada utilizando o solver WallE, desenvolvido pelo grupo de pesquisa (https://github.com/CodeLenz/WallE.jl). A solução por elementos finitos e a otimização foram implementadas usando a linguagem Julia e podem ser acessadas em https://github.com/CodeLenz/Vigas3D. A visualização é realizada utilizando o software livre gmsh. Para a validação dos códigos, são apresentados dois exemplos. Ambos possuem domínio inicial com 467 elementos, de dimensões 1 x 1 x 1 m, penalização do expoente da densidade relativa de 3,0, Módulo de Young de 210GPa e Módulo de Elasticidade Transversal de 80GPa. As características geométricas também foram mantidas constantes, com os elementos possuindo seções circulares com raio de 57mm. As duas estruturas possuem condições de contorno de Dirichlet de deslocamentos nulos em x, y e z nos nós 1, 4, 49 e 52. O primeiro exemplo consiste na aplicação de carregamentos nodais de 100N

nos nós 30, 31, 46 e 47, direção vertical. A penalização inicial foi 1.0. A flexibilidade inicial foi de 0,0060648Nm e a final foi de 0,00089169Nm. O volume mínimo foi de 40% do original. O segundo exemplo consiste em uma estrutura submetida à torção, com duas forças de 1500N na direção x nos nós 16 e 61 e duas forças de 2000N na direção z nos nós 13 e 64. A penalização inicial foi de 10,0. A flexibilidade inicial foi 0,22646Nm e a resultante de 0,01940Nm, com restrição de 20% do volume original.

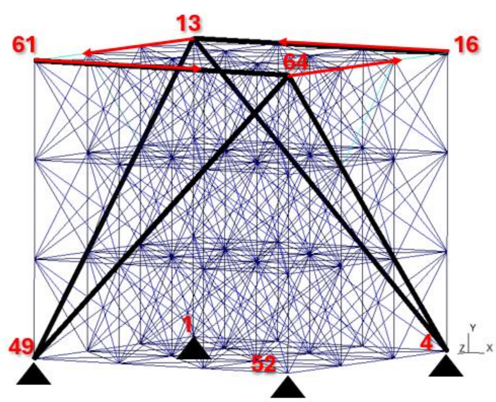
Os autores reconhecem ao CNPq (processo 308025/2023-7 e bolsa PIBIC) e à FAPESC (processo 2023TR563).

Figura 1.



Resultado visual do primeiro exemplo. Domínio inicial com 467 elementos. Elementos vazios em azul e cheios em preto.

Figura 2.



Resultado visual do segundo exemplo. Domínio inicial com 467 elementos. Elementos vazios em azul e cheios em preto.

Palavras-chave: Otimização Topológica. Vigas Espaciais. Lagrangiano Aumentado.