# CAMINHADA ALEATÓRIA QUÂNTICA[1]

Júlio César Costa[2], Edgard Pacheco Moreira Amorim[3].

[1] Vinculado ao projeto “Informação e Computação Quântica: aplicações da caminhada aleatória quântica”
[2] Acadêmico do Curso de Licenciatura em Física – CCT – Bolsista PROBIC
[3] Orientador, Departamento de Física – CCT – edgard.amorim@udesc.br

Uma caminhada aleatória clássica unidimensional consiste em um movimento aleatório cujo passo discreto e de comprimento fixo depende do resultado do lançamento de uma moeda num jogo de cara ou coroa, ou seja, o caminhante se desloca para a direita quando o resultado for “cara” e para esquerda quando o resultado for “coroa”. Após muitos passos, a probabilidade do caminhante ser encontrado em uma dada posição é determinada por uma distribuição gaussiana cuja dispersão é $\sigma(t) \sim \sqrt{t}$.

Em uma caminhada aleatória quântica, o caminhante além do grau de liberdade externo (posição), possui também agora um grau de liberdade interno (spin-1/2). O estado do caminhante $|\Psi\rangle$ pertence a um espaço de Hilbert $H = H_C \otimes H_P$, onde $H_C$ é o espaço bidimensional das moedas descrito pelos vetores $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ (denominados *up* e *down*, respectivamente) e $H_P$ é um espaço infinito e contável das posições descrito por $\{|j\rangle : j \in \mathbb{Z}\}$. O estado inicial geral do caminhante é

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} [a(j,0)|\uparrow\rangle + b(j,0)|\downarrow\rangle] \otimes |j\rangle$$

onde sua condição de normalização é dada por:

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |a(j,0)|^2 + |b(j,0)|^2 = 1$$

na qual *a* e *b* são as amplitudes de probabilidade complexas e o módulo ao quadrado destas amplitudes fornece a probabilidade de encontrar $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, respectivamente.

A moeda quântica consiste em um operador que atua no estado interno do caminhante, ou seja, a aplicação da moeda leva a uma mudança na superposição de estados de spin. Duas moedas utilizadas largamente na literatura são as moedas Hadamard e Fourier:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad F = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

A dinâmica de uma caminhada quântica é dada pelo operador de evolução temporal $U = S(C \otimes \mathbb{1}_p)$, onde $S$ é o operador de translação condicional, $C$ é a moeda quântica e $\mathbb{1}_p$ é a identidade no espaço das posições. O operador de translação condicional é:

$$S = \sum_j (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |j+1\rangle\langle j| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |j+1\rangle\langle j|)$$

e atua deslocando os elementos $|\uparrow\rangle$ do estado para a posição vizinha à direita e os elementos $|\downarrow\rangle$ para posição vizinha à esquerda.

A evolução temporal do caminhante ocorre pela aplicação de uma moeda quântica *C*, que coloca o estado interno do caminhante em uma nova superposição de estados, seguida da aplicação do operador de translação condicional *S*, que translada o novo estado interno condicionado aos estados de spin. Com sucessivas aplicações do operador de evolução temporal, o caminhante se espalha ao longo das posições, onde suas amplitudes de probabilidade sofrem interferência construtiva e destrutiva. É possível observar que a distribuição de probabilidade pode resultar numa distribuição simétrica ou assimétrica dependendo do estado inicial e apresenta uma dispersão balística sendo quadraticamente superior a dispersão clássica, logo $\sigma(t) \sim t$.

A entropia de von Neumann possibilita a medição do emaranhamento quântico, que é uma medida da correlação entre os graus de liberdade interno (spin) e os graus de liberdade externo (posição) do caminhante. A partir da elaboração de um algoritmo que possibilita o cálculo da distribuição de probabilidades, dispersão e emaranhamento foram gerados os seguintes gráficos mostrados na Figura 1.

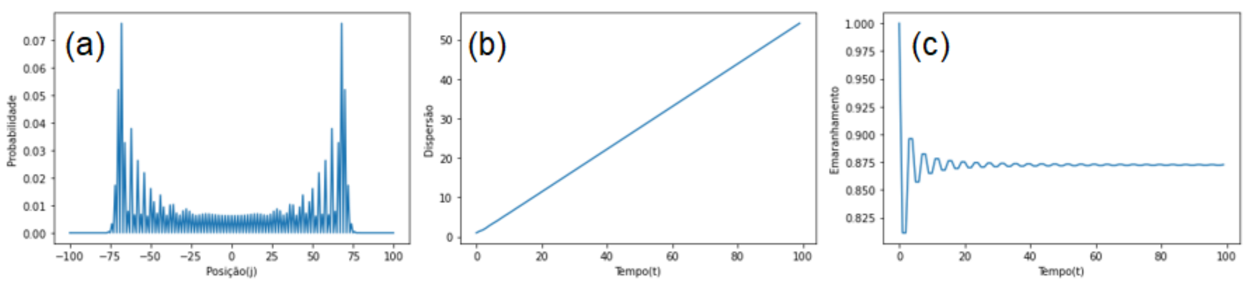


**Figura 1.** *Caminhada Aleatória Quântica:* (a) Distribuição de probabilidade, (b) dispersão e (c) emaranhamento ao longo do tempo em uma caminhada quântica de 100 passos partindo do estado inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$.

**Palavras-chave:** Caminhada Quântica. Dispersão. Emaranhamento.