PROCESSO SELETIVO N° 04/2024

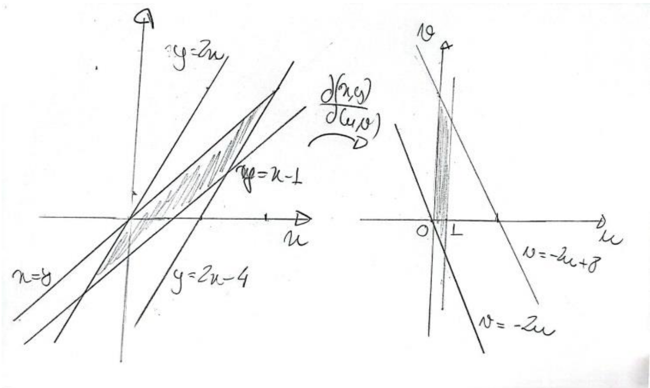
Área de Conhecimento: _ Engenharias ou Ciências Exatas ou da Terra (A)

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 2 Seja R a região delimitada pelas retas $\mathrm{x}-\mathrm{y}=0$, $\mathrm{x}-\mathrm{y}=1$, $y=2\mathrm{x}$ e $y=2\mathrm{x}-4$ do plano xy. Calcule $\iint_R (x-y)dxdy$.

Para resolver essa questão, fazemos uma mudança de variáveis:

$$u(x,y)=x-y$$
$$v(x,y)=2x$$



Nesse caso,

$$\iint_R (x-y)dxdy=\iint_{R'} [x(u,v)-y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

onde $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ corresponde ao Jacobiano e $R'=\{(u,v)|0\le u\le 1,-2u\le v\le -2u+8\}$.

Cálculo do jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Visto que

$$v=2x\Rightarrow x=\frac{v}{2}$$
$$u=x-y\Rightarrow y=x-u\Rightarrow y=\frac{v}{2}-u$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

Então

$$\iint_R (x-y)dxdy = \iint_{R'} u\left(\frac{1}{2}\right) dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-2u}^{-2u+8} udvdu = \frac{1}{2}\int_0^1 u[-2u+8-(-2u)]\, du = \frac{1}{2}\left[8\left(\frac{1}{2}-0\right)\right] = 2$$

RESPOSTA: $\iint_R (x-y)dxdy = 2.$

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/página do livro utilizado.

Membros da Banca

Membro 1 (nome e assinatura)

Membro 2 (nome e assinatura)

Membro 3 (nome e assinatura)

Presidente (nome e assinatura)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **SR229JX4**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

DEBORA CRISTINA BRANDT COSTA em 24/06/2024 às 11:19:48
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:36:35 e válido até 13/07/2118 - 13:36:35.
(Assinatura do sistema)

LINDAURA MARIA STEFFENS (CPF: 006.XXX.459-XX) em 24/06/2024 às 11:30:52
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:41:19 e válido até 30/03/2118 - 12:41:19.
(Assinatura do sistema)

ADRIANE SAMBAQUI GRUBER (CPF: 640.XXX.400-XX) em 24/06/2024 às 11:33:06
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:12:35 e válido até 13/07/2118 - 13:12:35.
(Assinatura do sistema)

DAMIANNI SEBRAO (CPF: 817.XXX.959-XX) em 24/06/2024 às 11:37:13
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:17 e válido até 30/03/2118 - 12:44:17.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjQ0MDFfMjQ0MzhfMjAyNF9TUjIyOUpYNA== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00024401/2024** e o código **SR229JX4** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.

PROCESSO SELETIVO N° 04/2024

Área de Conhecimento: _ Engenharias ou Ciências Exatas ou da Terra (A)

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 2 Seja R a região delimitada pelas retas $\mathrm{x}-\mathrm{y}=0$, $\mathrm{x}-\mathrm{y}=1$, $y=2\mathrm{x}$ e $y=2\mathrm{x}-4$ do plano xy. Calcule $\iint_R (x-y)dxdy$.

A função que fornece o lucro do fabricante com a venda das lâmpadas corresponde a

$$f(x,y)=x(100-2x)+y(125-3y)-(12x+11y+4xy)$$
$$f(x,y)=88x-2x^2+114y-3y^2=4xy$$

OBJETIVO: o ponto (x,y) de máximo absoluto de $f(x,y)$.

DOMÍNIO:

$(x,y)\in D(f)\Leftrightarrow x\geq 0, y\geq 0, (100-2x)\geq 0$ e $(125-3y)\geq 0$

$$D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\leq x\leq 50\ e\ 0\leq y\leq 125/3\}.$$

Função polinomial: contínua em todo seu domínio.

Domínio fechado: necessário avaliar a função na sua fronteira.

PONTOS CRÍTICOS:

Pontos pertencentes ao interior de $D(f)$)tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=88-4x-4y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=114-6y-4x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\Rightarrow x+y=22$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Rightarrow 2x+3y=57$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} x+y=22\\ 2x+3y=57\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x=9\\ y=13\end{cases}$$

Calculando o heissiano pra decidir se esse ponto é realmente um ponto de máximo ou mínimo local ou simplesmente um ponto de sela:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-4<0,\forall(x,y)\in D(f)$ $\qquad$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-4$

$H(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2=8>0,\forall(x,y)\in D(f).$

Heissiano é positivo, derivada parcial de segunda ordem em relação à x negativa: f tem um máximo local em (9,13).

$$f(9{,}13)=1137\quad (I)$$

FRONTEIRA DO DOMÍNIO:

Quatro regiões para testar:

(i) $D_1=\{(x,0)|0\leq x\leq 50\}$

(ii) $D_2=\left\{\left(x,\frac{125}{3}\right)\middle|0\leq x\leq 50\right\}$

(iii) $D_3=\{(0,y)|0\leq x\leq 125/3\}$

(iv) $D_4=\{(50,y)|0\leq x\leq 50\}$

Região (i):

$$f(x,0)=g_1(x)=88x-2x^2,\forall x\in[0{,}50]$$

Pontos Críticos: $g_1{}'(x) = 88 - 4x, \forall x \in (0,50)$.

$$g_1'(x) = 0 \Rightarrow x = 22$$
$$g_1(22) = f(22,0) = 968 \ \ (II)$$

Testando agora a função nos pontos extremos desse intervalo: $(0,0)$ e $(50,0)$:

$$f(0,0) = 0 \ \ (III)$$
$$f(50,0) < 0 \ \ (IV)$$

Região (ii):

$$f\left(x, \frac{125}{3}\right) = g_2(x) = 88x - 2x^2 - \frac{1375}{3} - \frac{500}{3}x, \forall x \in [0,50]$$

Comparando $g_1(x)$ com $g_2(x)$, tem-se que
$f\left(x, \frac{125}{3}\right) < f(x,0), \forall x \in [0,50]$.

Região (iii):

$$f(0,y) = g_3(y) = 114y - 3y^2, \forall y \in \left[0, \frac{125}{3}\right]$$

Pontos Críticos: $g_3'(y) = 0 \Rightarrow y = 19$.

$$g_3(19) = f(0,19) = 1083 \ (V)$$

Calculando ainda a função em $\left(0, \frac{125}{3}\right)$: $f\left(\frac{0,125}{3}\right) < 0 \ (VI)$

Região (iv):

$$f(50,y) = g_4(y) = 114y - 3y^2 - 600 - 200y, \forall y \in \left[0, \frac{125}{3}\right]$$

Comparando $g_3(y)$ com $g_4(y)$, tem-se que
$f(50,y) < f(0,y), \forall y \in \left[0, \frac{125}{3}\right]$.

CONCLUSÃO: Analisando agora *(I)* a *(VI)*, conclui-se que f atinge o valor máximo absoluto no ponto (9,13)
RESPOSTA: O lucro máximo é atingido quando são fabricadas 9 lâmpadas do primeiro tipo e 13 do segundo tipo. Nesse caso, o lucro será de $1,137,00.

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/página do livro utilizado.

Membros da Banca

Membro 1 (nome e assinatura)	Membro 2 (nome e assinatura)
Membro 3 (nome e assinatura)	Presidente (nome e assinatura)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **KF10B5B4**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

DEBORA CRISTINA BRANDT COSTA em 24/06/2024 às 11:29:17
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:36:35 e válido até 13/07/2118 - 13:36:35.
(Assinatura do sistema)

LINDAURA MARIA STEFFENS (CPF: 006.XXX.459-XX) em 24/06/2024 às 11:30:52
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:41:19 e válido até 30/03/2118 - 12:41:19.
(Assinatura do sistema)

ADRIANE SAMBAQUI GRUBER (CPF: 640.XXX.400-XX) em 24/06/2024 às 11:33:06
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:12:35 e válido até 13/07/2118 - 13:12:35.
(Assinatura do sistema)

DAMIANNI SEBRAO (CPF: 817.XXX.959-XX) em 24/06/2024 às 11:37:13
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:17 e válido até 30/03/2118 - 12:44:17.
(Assinatura do sistema)

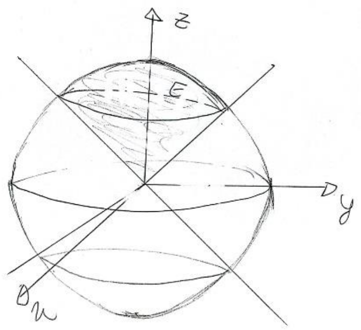
Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjQ0MDFfMjQ0MzhfMjAyNF9LRjEwQjVCNA== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00024401/2024** e o código **KF10B5B4** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.

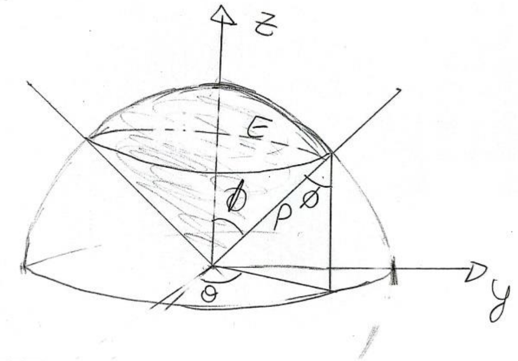
PROCESSO SELETIVO N° 04/2024

Área de Conhecimento: _ Engenharias ou Ciências Exatas ou da Terra (A)

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 3**:** Considere o sólido delimitado acima por $x^2+y^2+z^2=16$ e abaixo por $z^2-x^2-y^2=0$. Esboce esse sólido e calcule seu volume.





O sólido é delimitado superiormente pela esfera de raio 4 e inferiormente pelo cone.
Sabendo que $V=\iiint_E dV$, vamos utilizar coordenadas esféricas para resolver esse problema. Sejam

$$x(\rho,\theta,\phi)=\rho\cdot cos\ \theta\cdot sen\ \phi$$
$$y(\rho,\theta,\phi)=\rho\cdot sen\theta\cdot sen\phi$$
$$z(\rho,\theta,\phi)=\rho\cdot\ cos\ \phi$$
$$0\le\rho\le 4,\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

Determinando o limite superior para a variável ϕ:
Esfera em coordenadas esféricas: $\rho=4$
Cone em coordenadas esféricas:

$$(\rho\cdot cos\ \theta\cdot sen\ \phi)^2+(\rho\cdot sen\theta\cdot sen\phi)^2=(\rho\cdot cos\ \phi)^2$$

$$cos\ \phi=sen\ \phi\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{4}$$

Dessa forma, $V=\iiint_E dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^4\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right|d\rho d\phi d\theta.$
Cálculo do jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\theta\cdot sen\phi & -\rho\cdot sen\theta\cdot sen\phi & \rho\cdot cos\theta\cdot cos\phi\\ sen\theta\cdot sen\phi & \rho\cdot cos\theta\cdot sen\phi & \rho\cdot sen\theta\cdot cos\ \phi\\ cos\phi & 0 & -\rho\cdot\text{sen}\ \phi\end{vmatrix}=$$

$$=-\rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot\text{sen}^3\phi-\rho^2\cdot sen^2\theta\cdot\cos^2\phi\cdot sen\ \phi+0-(\rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot sen\phi\cdot\cos^2\phi+\rho^2\cdot sen^2\theta\cdot\text{sen}^3\phi+0)=$$

$$= -\rho^2[\cos^2\theta \cdot \text{sen}\,\phi \cdot (\cos^2\phi + sen^2\phi) + sen^2\theta \cdot sen\phi \cdot (sen^2\phi + \cos^2\phi)] =$$

$$= -\rho^2\,(\cos^2\theta + sen^2\theta) \cdot sen\phi = -\rho^2 \cdot sen\phi$$

$$V = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^4 (\rho^2 \cdot sen\phi)d\rho d\phi d\theta = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{sen}\,\phi d\phi \cdot \int_0^4 \rho^2 d\rho = 2\pi \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(0)\right) \cdot \left(\frac{4^3}{3}\right)$$

$$V = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{64}{3} = \frac{128}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{64}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

RESPOSTA: O volume do sólido é $64(2-\sqrt{2})/2$ unidades de volume.

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/página do livro utilizado.

Membros da Banca

Membro 1 (nome e assinatura) | Membro 2 (nome e assinatura)

Membro 3 (nome e assinatura) | Presidente (nome e assinatura)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **SF631MG2**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

DEBORA CRISTINA BRANDT COSTA em 24/06/2024 às 16:02:46
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:36:35 e válido até 13/07/2118 - 13:36:35.
(Assinatura do sistema)

DAMIANNI SEBRAO (CPF: 817.XXX.959-XX) em 24/06/2024 às 16:12:34
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:44:17 e válido até 30/03/2118 - 12:44:17.
(Assinatura do sistema)

LINDAURA MARIA STEFFENS (CPF: 006.XXX.459-XX) em 25/06/2024 às 06:45:59
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:41:19 e válido até 30/03/2118 - 12:41:19.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjQ0MDFfMjQ0MzhfMjAyNF9TRjYzMU1HMg== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00024401/2024** e o código **SF631MG2** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.

PROCESSO SELETIVO N° 04/2024

Área de Conhecimento: _ Engenharias ou Ciências Exatas ou da Terra (A)

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA

Questão 4**:** Seja R é a região no primeiro quadrante fora do círculo de raio 2 e dentro de $r = 2(1 + \cos\theta)$.

(a) Esboce a região R.
(b) Calcule $\iint_R sen\,\theta\, dA$.

(Baseado no exemplo 1 da página 316 do livro do Thomas)
Testando as simetrias das figuras:

(i) Simetria em relação ao eixo polar: $2(1+\cos(-\theta)) = 2(1+\cos(\theta))$
Pois o cosseno é uma função par.

(ii) Simetria em relação ao polo: $-r = -2(1+\cos(\theta)) \neq$ r: não há.

(iii) Simetria em relação à reta $\theta = \frac{\pi}{2}$: $2(1+\cos(\pi-\theta)) = 2(1-\cos(\theta)) \neq 2(1+\cos\theta)$
: não há

Esboço da região tomando os ângulos de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$:

$$\theta = 0 \Rightarrow r = 2(1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$
$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 3{,}7$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = 2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 3{,}4$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2(1+0) = 2$$

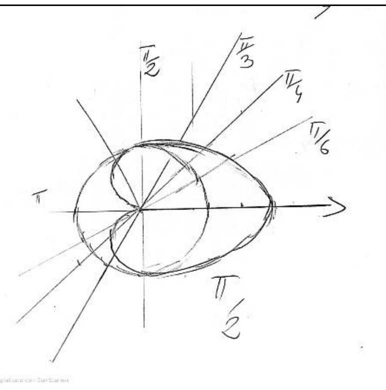
$$\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = 2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}9$$
$$\theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow r = 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}3$$
$$\theta = \pi \Rightarrow r = 2(1-1) = 0$$

Determinando os ângulos de intersecção das curvas:

$$2 = 2(1+cos\,\theta) \Rightarrow 1 = 1+\cos\theta \;\; \Rightarrow \theta = 0 \; e \; \theta = \frac{3\pi}{2}$$

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA | BALNEÁRIO CAMBORIÚ
CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR DA FOZ DO ITAJAÍ



RESPOSTA a):

b) Limites de integração: enquanto o ângulo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, o raio vai do círculo até a cardioide, ou seja, $2 \leq r \leq 2(1 + cos\theta)$

$$\iint_R sen\theta dA = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} sen\theta r dr d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r dr d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\theta\left\{\frac{[2(1+\cos\theta)]^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\theta(4 + 8cos\,\theta + 4cos^2\theta - 4)d\theta = \left(-\frac{8\cos^2\theta}{2} - \frac{4\cos^3\theta}{3}\right)_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}$$

RESPOSTA: $\iint_R sen\theta dA = \frac{8}{3}$

*O padrão de resposta deve estar fundamentado nas bibliografias exigidas pelo Edital, para evitar problemas o professor deverá citar o capítulo/página do livro utilizado.

Membros da Banca

Membro 1 (nome e assinatura)

Membro 2 (nome e assinatura)

Membro 3 (nome e assinatura)

Presidente (nome e assinatura)

Assinaturas do documento

Código para verificação: **WJ51P2A6**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

DEBORA CRISTINA BRANDT COSTA em 25/06/2024 às 09:54:26
Emitido por: "SGP-e", emitido em 13/07/2018 - 13:36:35 e válido até 13/07/2118 - 13:36:35.
(Assinatura do sistema)

LINDAURA MARIA STEFFENS (CPF: 006.XXX.459-XX) em 25/06/2024 às 09:56:40
Emitido por: "SGP-e", emitido em 30/03/2018 - 12:41:19 e válido até 30/03/2118 - 12:41:19.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwMjQ0MDFfMjQ0MzhfMjAyNF9XSjUxUDJBNg== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00024401/2024** e o código **WJ51P2A6** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.