UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

PROCESSO SELETIVO 01/2025

Área de Conhecimento: **CEO – Ciências Exatas e da Terra - Engenharias - Matemática - Física**

PROVA ESCRITA – PADRÃO DE RESPOSTA (Espelho de Prova)

QUESTÃO 1:

Considere as retas r e s dadas pelas equações a seguir:

$$r\colon\ \frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

$$s\colon\ x+1=\frac{y-4}{2}=z$$

Observações:

- O gabarito desta questão apresenta, de forma resumida, as discussões mínimas esperadas em cada item. No gabarito, foi utilizada a abordagem apresentada em algumas das referências bibliográficas sugeridas, com destaque para:
  - WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica, 1a. Edição, São Paulo: Pierson, 2000.
- Outras abordagens também serão consideradas, desde que respondam corretamente às questões propostas.

(a) Escreva equações paramétricas para r e s.

i) Equação paramétrica de r:

Empregando um parâmetro t,

$$r\colon\ \frac{x-4}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}=t$$

obtemos

$$r\colon \begin{cases} x = \ \ 4+3t \\ y = -1+2t\,, \\ z = \ \ 2-t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

ii) Equação paramétrica de s:

Empregando um parâmetro t,

$$s: \; x+1=\frac{y-4}{2}=z=t$$

obtemos

$$s: \begin{cases} x=-1+t \\ y=4+2t \;, \\ z=t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

(b) Determine o ponto de abscissa 1 que pertence à reta r.

O ponto de r que possui abscissa 1 é aquele em que $x=1$. Assim, utilizando a equação paramétrica de r, temos

$$1=4+3t \;\Rightarrow t=-1$$

Utilizando $t=-1$ nas equações para y e z, obtemos

$$y=-1+2(-1)=-3$$
$$z=2-(-1)=3$$

Assim, o ponto de r que possui abscissa 1 é $(1,-3,3)$.

(c) Determine o vetor diretor de s que possui ordenada 5.

Das equações de s, verificamos que um vetor diretor é

$$\vec{v}=(1,2,1)$$

Multiplicando $\vec{v}$ por $5/2$, obtemos

$$\vec{w}=\left(\frac{5}{2},5,\frac{5}{2}\right)$$

que é outro vetor diretor de s, apenas com magnitude diferente de $\vec{v}$.

UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

(d) Mostre que as retas r e s não se intersectam.

Para que r e s se intersectem, deve existir um ponto em comum entre elas, ou seja, para algum valor de t, os valores de x, y e z devem ser iguais nas duas retas.

Substituindo x, y, z das equações paramétricas de r em s, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} -1 + t = 4 + 3t \\ 4 + 2t = -1 + 2t \\ t = 2 - t \end{cases}$$

Uma vez que este sistema linear não tem solução, não é possível encontrar um valor de t para o qual os valores de x, y e z sejam iguais nas duas retas. Assim, as retas r e s não se intersectam.

QUESTÃO 2:

Sabe-se que uma matriz quadrada M é diagonalizável se existe uma matriz invertível A tal que $A^{-1}MA$ seja diagonal. Diz-se, nesse caso, que a matriz A diagonaliza M. Diante disso, seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz canônica é dada por

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

<u>Observações:</u>

- O gabarito desta questão apresenta, de forma resumida, as discussões mínimas esperadas em cada item. No gabarito, foi utilizada a abordagem apresentada em algumas das referências bibliográficas sugeridas, com destaque para:
  - STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Álgebra Linear. 2a. Edição. São Paulo: Makron Books, 1987.
- Outras abordagens também serão consideradas, desde que respondam corretamente às questões propostas.

(a) Os autovalores e os autovetores de T.

Os autovalores de T são as raízes da equação característica

$$\det(X - \lambda I) = 0$$

Utilizando outra notação,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ -4 & 1-\lambda & -4 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + (1)(-4)(-1) + (2)(-4)(-1) - (4-\lambda)(-1)(-4)$$
$$- (1)(-4)(1-\lambda) - (2)(1-\lambda)(-1) = 0$$
$$\Rightarrow (4-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) + 4 + 8 - 16 + 4\lambda + 4 - 4\lambda + 2 - 2\lambda = 0$$
$$\Rightarrow 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 2\lambda = 0$$
$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$

cujas raízes são 1, 2 e 3.

Dessa forma, os autovalores são

$$\lambda_1 = 1\,, \qquad \lambda_2 = 2\,, \qquad \lambda_3 = 3$$

A substituição de λ pelos seus valores no sistema linear

$$(X - \lambda I)v = 0$$

permite determinar os autovetores associados aos autovalores.

i) Autovetores associados a $\lambda = 1$:

Nesse caso, temos que resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 1 & 2 \\ -4 & 1-1 & -4 \\ -1 & -1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_2 \longleftarrow L_2 + \frac{4}{3} L_1$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{3} L_1$$

obtemos

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2$$

chegamos a

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, tomando $z = \alpha$, temos $y = \alpha$ e $x = -\alpha$, de modo que a solução do sistema é

$$v = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Desse modo, os vetores do tipo $v_1 = \alpha(-1, 1, 1), \alpha \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda = 1$.

ii) Autovetores associados a $\lambda = 2$:

Nesse caso, temos que resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4-2 & 1 & 2 \\ -4 & 1-2 & -4 \\ -1 & -1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1$$

$$L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$$

obtemos

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2$$

chegamos a

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, tomando $z = \alpha$, temos $y = 0$ e $x = -\alpha$, de modo que a solução do sistema é

$$v = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Desse modo, os vetores do tipo $v_2 = \alpha(-1, 0, 1), \alpha \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda = 2$.

iii) Autovetores associados a $\lambda = 3$:

Nesse caso, temos que resolver o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 4-3 & 1 & 2 \\ -4 & 1-3 & -4 \\ -1 & -1 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_2 \longleftarrow L_2 + 4L_1$$
$$L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

chegamos a

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, tomando $z = \alpha$, temos $y = -2\alpha$ e $x = 0$, de modo que a solução do sistema é

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Desse modo, os vetores do tipo $v_3 = \alpha(0, -2, 1), \alpha \neq 0$, são autovetores associados a $\lambda = 3$.

(b) A matriz Y que diagonaliza X. Em seguida, determine Y^{-1} e mostre que $Y^{-1}XY$ é uma matriz diagonal.

Tomando $\alpha = 1$ no item (a), obtemos:

$$v_1 = (-1, 1, 1)\,, \text{ associado a } \quad \lambda_1 = 1$$
$$v_2 = (-1, 0, 1)\,, \text{ associado a } \quad \lambda_2 = 2$$
$$v_3 = (0, -2, 1)\,, \text{ associado a } \quad \lambda_3 = 3$$

Como λ_1, λ_2 e λ_3 são distintos, o conjunto $P = \{v_1, v_2, v_3\}$ forma uma base do $\mathbb{R}^3$ e a matriz que diagonaliza X é

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar, podemos calcular a inversa de Y (uma vez que v_1, v_2 e v_3 são linearmente independentes, sabemos que $\det(Y) \neq 0$ e, assim, Y é invertível).

Determinaremos Y^{-1}, por meio de operações elementares

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_1 \leftarrow L_1 * (-1)$$

obtemos

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$$
$$L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$

obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_2 \longleftarrow L_2 * (-1)$$

obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$$

obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Fazendo

$$L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3$$
$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_3$$

Obtemos

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, temos que a matriz inversa de Y é

$$Y^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando $Y^{-1}XY$,

$$Y^{-1}XY = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

QUESTÃO 3:

Calcule a integral dupla

$$I = \iint_D (x + y)\, dA\,,$$

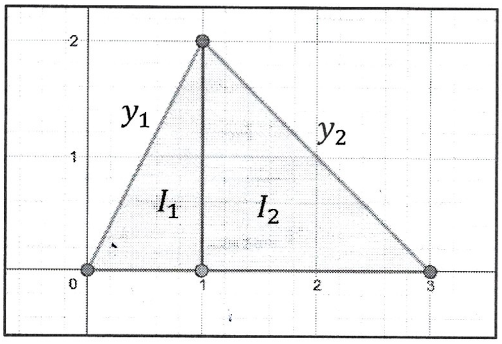
em que D é a região triangular delimitada pelos vértices $(0, 0), (1, 2)$ e $(3, 0)$.

Observações:

- O gabarito desta questão apresenta, de forma resumida, as discussões mínimas esperadas em cada item. No gabarito, foi utilizada a abordagem apresentada em algumas das referências bibliográficas sugeridas, com destaque para:
  - STEWART, J. Cálculo v. 1 e 2, 7a. Edição, São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Outras abordagens também serão consideradas, desde que respondam corretamente às questões propostas.

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Vamos considerar inicialmente a região a ser integrada (dividida em duas partes),



Dessa forma, calcularemos a integral I de tal modo que

$$I = I_1 + I_2$$

Utilizando interpolação linear, determinamos y_1 e y_2 de modo que

$$y_1 = 2x\,, \qquad y_2 = 3 - x$$

Assim, para o cálculo de I_1, temos os limites de integração:

$$0 \leq x \leq 1\,, \qquad 0 \leq y \leq 2x$$

e, para o cálculo de I_2,

$$1 \leq x \leq 3\,, \qquad 0 \leq y \leq 3 - x$$

Calculando,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2x} (x+y)\, dydx + \int_1^3 \int_0^{3-x} (x+y)\, dydx \\ &= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{2x} dx + \int_1^3 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_0^{3-x} dx \\ &= 4\int_0^1 x^2 dx + \frac{9}{2}\int_1^3 dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x^2\, dx \\ &= 4\left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^1 + \frac{9}{2}(x)_1^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)_1^3 \\ &= \frac{4}{3}(1-0) + \frac{9}{2}(3-1) - \frac{1}{6}(27-1) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} + 9 - \frac{13}{3} = \boxed{6}$$

QUESTÃO 4:

Calcule a integral de linha

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

em que o campo vetorial $\vec{f} = (x^2 + y^2, 1 - y)$ e C é o arco da circunferência de raio 1 e centro em $(-1, 0)$ que vai do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(-2, 0)$, percorrido no sentido anti-horário.

<u>**Observações:**</u>

- O gabarito desta questão apresenta, de forma resumida, as discussões mínimas esperadas em cada item. No gabarito, foi utilizada a abordagem apresentada em algumas das referências bibliográficas sugeridas, com destaque para:
    - GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. Cálculo B, 6a. Edição, São Paulo: Makron Books,2007.
- Outras abordagens também serão consideradas, desde que respondam corretamente às questões propostas.

Para resolver a integral, precisamos parametrizar a circunferência de raio 1 e centro em $(-1, 0)$. Essa parametrização resulta em

$$C: \begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\Rightarrow \vec{r} = (-1 + \cos t\,, \operatorname{sen} t)$$

Diante disso, temos também

$$d\vec{r} = (-\operatorname{sen} t\,, \cos t)$$

Substituindo x e y de $\vec{r}$ em $\vec{f} = (x^2 + y^2, 1 - y)$, obtemos

$$\vec{f}(\vec{r}) = (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t\,, 1 - \operatorname{sen} t)$$

Utilizando a identidade

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

obtemos

$$\vec{f}(\vec{r}) = (2 - 2\cos t, 1 - \operatorname{sen} t)$$

Dessa forma, o produto escalar $\vec{f} \cdot d\vec{r}$ é

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = -2\operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} t \cos t + \cos t - \operatorname{sen} t \cos t = -2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t + \cos t$$

Integrando,

$$I = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = -2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt + \int_0^\pi \operatorname{sen} t \cos t\, dt + \int_0^\pi \cos t\, dt$$

Utilizando a identidade

$$\operatorname{sen} t \cos t = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$$

obtemos

$$I = -2\int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt + \frac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}(2t)\, dt + \int_0^\pi \cos t\, dt$$

$$= -2(-\cos t)_0^\pi + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)\right)_0^\pi + (\operatorname{sen} t)_0^\pi$$

$$= 2(-1-1) - \frac{1}{4}(1-1) + (0-0) = \boxed{-4}$$

Membros da Banca Examinadora:

Presidente: Jaque Willian Scotton Assinatura Jaque Willian Scotton

Membro: Daniel Iunes Raimann Assinatura DRaimann

Membro: Darlene Cavalheiro Assinatura Darlene Cavalheiro