

**UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

REINALDO ANTONIO OSCAR COSTA

**ESTUDO DA DINÂMICA DE DOIS MODELOS DE FITZHUGH-NAGUMO: UM
MAPA GENERALIZADO E UM FLUXO COM CAMPO ELÉTRICO**

JOINVILLE / SC

2021

REINALDO ANTONIO OSCAR COSTA

**ESTUDO DA DINÂMICA DE DOIS MODELOS DE FITZHUGH-NAGUMO: UM
MAPA GENERALIZADO E UM FLUXO COM CAMPO ELÉTRICO**

Dissertação apresentada ao programa de Pós Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física, área de concentração: Física.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

JOINVILLE / SC

2021

**Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UEDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

Costa, Reinaldo Antonio Oscar
ESTUDO DA DINÂMICA DE DOIS MODELOS DE
FITZHUGH-NAGUMO: : UM MAPA GENERALIZADO E UM
FLUXO COM CAMPO ELÉTRICO / Reinaldo Antonio Oscar
Costa. -- 2021.
59 p.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa
Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de
Pós-Graduação em Física, Joinville, 2021.

1. Modelo de FitzHugh-Nagumo. 2. Mapa generalizado. 3.
Diagrama de bifurcação. 4. Diagrama de Lyapunov. 5. Diagrama
isoperiódico. I. Albuquerque, Holokx Abreu . II. Universidade do
Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas,
Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

REINALDO ANTONIO OSCAR COSTA

**ESTUDO DA DINÂMICA DE DOIS MODELOS DE FITZHUGH-NAGUMO: UM
MAPA GENERALIZADO E UM FLUXO COM CAMPO ELÉTRICO**

Dissertação apresentada ao programa de Pós Graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física, área de concentração: Física.

Orientador: Holokx Abreu Albuquerque

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Holokx Abreu Albuquerque, Dr.
Univ. do Estado de Santa Catarina

Membros:

Prof. Paulo Cesar Rech, Dr.
Univ. do Estado de Santa Catarina

Prof. João Carlos Xavier, Dr.
Univ. Federal de Santa Catarina

Joinville, 27 de julho 2021.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais Jair Oliveira Costa e Valburga Hilda Schmitt Costa, e ao meu irmão Cristiano Fernando Costa, por todo apoio, amor e educação.

Agradeço ao meu orientador professor Holokx, por aceitar o desafio de me orientar, pelos ensinamentos transmitidos nestes dois anos e principalmente pela paciência.

Agradeço aos professores do departamento de Física da UDESC por todos os ensinamentos.

Agradeço ao professor Antônio João Fidélis por me apresentar esta área de pesquisa na graduação e pela motivação para dar continuidade aos estudos.

Agradeço à UDESC pelo apoio financeiro nestes dois anos.

‘Eu, um universo de átomos,
um átomo no universo.’

Richard Feynman

RESUMO

O modelo FitzHugh-Nagumo é um modelo que simula o comportamento do potencial elétrico da membrana do neurônio, que é responsável pela condução do impulso nervoso através da membrana neural. Neste trabalho são estudados dois modelos adaptados do modelo de FitzHugh-Nagumo, um sendo um modelo de mapa generalizado e outro sendo o modelo de FitzHugh-Nagumo considerando o efeito do campo elétrico. Além disso, o mapa generalizado é investigado com um forçamento periódico. Para os dois modelos adaptados foram construídos diagrama de Lyapunov, diagramas isoperiódicos, diagramas de bifurcação e bacias de atração. Os resultados evidenciaram a formação de estruturas periódica imersas no caos, estruturas do tipo camarão no caso do mapa generalizado e a não alteração do atrator com a variação das condições iniciais, com exceção dos valores em que o sistema diverge.

Palavras-chave: Modelo de FitzHugh-Nagumo. Mapa generalizado. Diagrama de bifurcação. Diagrama de Lyapunov. Diagrama isoperiódico.

ABSTRACT

The FitzHugh-Nagumo model is a model that simulates the behavior of the electrical potential of the neuron membrane that is responsible for conducting the nerve impulse across the neural membrane. In this work, two adapted models of the FitzHugh-Nagumo model are studied, one being a generalized map and the other being the FitzHugh-Nagumo model considering the effect of the electric field. In addition, the generalized map is investigated with a periodic forcing. For the two adapted models, Lyapunov diagram, isoperiodic diagrams, bifurcation diagrams, and basins of attraction were constructed. The results showed the formation of periodic structures immersed in chaos, shrimp-like structures in the case of the generalized map, and no change of the attractor with the variation of initial conditions except for the values that the system diverges.

Keywords: FitzHugh-Nagumo model. Generalized map. Bifurcation diagram. Parameter space. Isoperiodic diagram.

LISTA DE FIGURAS

1.1.	Estrutura de um neurônio.	15
1.2.	Transporte de íons de sódio.	16
2.1.	Circuito RC utilizado por Hodgkin-Huxley.	19
2.2.	Circuito utilizado por J. S. Nagumo.	20
3.1.	Órbita de um espaço de fase tridimensional.	25
3.2.	Evolução de órbitas próximas no espaço de fase.	27
3.3.	Diagrama de Lyapunov do sistema (2.4).	29
3.4.	Diagrama de bifurcação $y_n \times a$ do sistema (2.4) com os valores de condições iniciais $x_0 = 0,15$; $y_0 = 0,39$ e parâmetros $b = 0,3$; $I_{ext} = 2,0$	30
3.5.	Diagrama isoperiódico do sistema (2.4).	31
3.6.	Bacia de atração do sistema (2.4). Em vermelho regiões com atrator caótico e em branco regiões sem atrator que a órbita diverge.	32
4.1.	(a) Órbita do sistema (2.4). (b) Evolução temporal do sistema (2.2) com $a = 1,0$, $b = 0,7$ $\tau = 12,5$ e $I_{ext} = 0,5$	34
4.2.	Órbita com dinâmica caótica do sistema generalizado. Os valores para os expoentes de Lyapunov são $\lambda_1 \approx 0,437$ e $\lambda_2 \approx -2,231$	35
4.3.	(a) Atrator caótico no diagrama de Lyapunov do mapa generalizado. (b) Um atrator caótico do mapa Hénon.	35
4.4.	(a) Diagrama de Lyapunov $a \times b$ do mapa generalizado para $-0,2 \leq a \leq 0,6$ e $0 \leq b \leq 8$. (b) Diagrama de Lyapunov ampliado na região $-0,2 \leq a \leq 0$ e $1,0 \leq b \leq 3,0$ dentro da caixa azul da figura 4.4 (a).	37
4.5.	(a) Diagrama de Lyapunov do mapa generalizado com a reta do diagrama de bifurcação. (b) Diagrama de bifurcação do sistema (2.4) com relação a variável x_n , para $-0,2 \leq a \leq 0,5$	38

4.6.	Diagrama isoperiódico da figura 4.5 (a).	39
4.7.	Diagrama isoperiódico da figura 4.5 (b).	40
4.8.	Diagramas isoperiódicos das estruturas de período 11, 12, 13, 14 e 15 presentes na figura 5.8 para os seguintes intervalos de a e b : (a) caixa verde com $-0,2 \leq a \leq -0,125$ e $1,5 \leq b \leq 2,25$; (b) caixa preta com $-0,125 \leq a \leq 0$ e $1,4 \leq b \leq 2$; (c) caixa cinza com $-0,08 \leq a \leq -0,07$ e $1,6 \leq b \leq 1,8$	41
4.9.	Bacia de atração dos pontos (a)(0,05; 1,0) e (b) (0,2; 3,0) no Diagrama de Lyapunov $a \times b$. Preto (periódico), vermelho (caos) e branco divergência	42
4.10.	Diagrama de Lyapunov $a \times b$ do mapa generalizado forçado para $-0,2 \leq a \leq 0,6$ e $0 \leq b \leq 8$ e com os seguintes valores de amplitude forçamento: (a) $\epsilon = 10^{-4}$; (b) $\epsilon = 10^{-3}$; (c) $\epsilon = 10^{-2}$; (d) $\epsilon = 10^{-1}$	44
4.11.	Atrator no plano $x \times y$ do sistema (2.6) com o par de parâmetros fixos em $a = 0,2$ e $b = 0,8$ e com os seguintes valores para os expoentes de Lyapunov e forçamento de amplitude: (a) $\epsilon = 10^{-4}$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \simeq -0,008$; $\lambda_3 \simeq -1,965$. (b) $\epsilon = 10^{-3}$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \simeq -0,008$; $\lambda_3 \simeq -1,965$. (c) $\epsilon = 10^{-2}$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \simeq -0,009$; $\lambda_3 \simeq -1,960$ e (d) $\epsilon = 10^{-1}$; $\lambda_1 \simeq 0,152$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 \simeq -2,261$	45
4.12.	Diagramas de bifurcação com seus respectivos valores dos expoentes de Lyapunov em relação ao parâmetro a . (a) $\epsilon = 10^{-4}$; (b) $\epsilon = 10^{-3}$; (c) $\epsilon = 10^{-2}$; (d) $\epsilon = 10^{-1}$	46
4.13.	Digrama de bifurcação 4.13 (c) ampliado na região da caixa azul $0,15 \leq a \leq 0,25$ e $-1,5 \leq x_n \leq -0,75$	47
4.14.	Bacias de atração do mapa generalizado com forçamento e com os valores: $(a; b) = (0,2; 0,8)$ e (a) $\epsilon = 10^{-4}$; (b) $\epsilon = 10^{-3}$; (c) $\epsilon = 10^{-2}$; (d) $\epsilon = 10^{-1}$	48
4.15.	Diagrama de Lyapunov $\omega \times E_{ext}$ do sistema (2.11) para os seguintes intervalos: (a) $0 \leq \omega \leq 2,5$; $-0,5 \leq E_{ext} \leq 0,5$; (b) $0 \leq \omega \leq 2,5$; $0 \leq E_{ext} \leq 2,5$	49
4.16.	Atratores do tipo: (a) periódico $(\omega; E_{ext}) = (1,0; 0,4)$; (b) Torus no ponto $(\omega; E_{ext}) = (2,0; 0,25)$; (c) Caótico no ponto $(\omega; E_{ext}) = (1,5; 0,25)$	50

- 4.17. (a) Diagrama de bifurcação $\omega \times x$ com $E_{ext} = 0,25$. (b) Diagrama de bifurcação $E_{ext} \times x$ com $\omega = 1,0$51
- 4.18. Diagrama isoperiódico $\omega \times E_{ext}$ do sistema (2.11) nos intervalos (a) $x \leq \omega \leq y$ e $x \leq E_{ext}$, (b) $x \leq \omega \leq y$ e $x \leq E_{ext}$ e (c) $x \leq \omega \leq y$ e $x \leq E_{ext}$52
- 4.19. Um atrator do modelo com campo elétrico com $\omega \simeq 0,140$ e $E_{ext} \simeq -0,436$. Os valores dos expoentes de Lyapunov do atrator são $\lambda_1 \simeq -0,119$, $\lambda_2 \simeq -0,122$ e $\lambda_3 \simeq -0,421$53
- 4.20. Bacias de atração do atrator na figura 4.17 (a) e com os seguintes pares de condições iniciais: (a) $x(0) \times y(0)$; (a) $x(0) \times E(0)$; (a) $y(0) \times E(0)$54

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1. NEURÔNIOS	15
1.1. Fisiologia dos neurônios	15
1.2. Potencial da membrana	16
1.2.1. Potencial de ação	17
2. MODELOS DE NEURÔNIO	18
2.1. Modelo de Hodgkin-Huxley	18
2.2. Modelo de FitzHugh-Nagumo	19
2.2.1. Mapa generalizado baseado no modelo de FitzHugh-Nagumo	20
2.2.2. Mapa generalizado com um forçamento externo	21
2.2.3. Modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico	22
3. REVISÃO TEÓRICA	24
3.1. Sistemas dinâmicos	24
3.2. Atrator	26
3.3. Sensibilidade às condições iniciais e expoente de Lyapunov	27
3.4. Diagrama de Lyapunov	28
3.5. Diagrama de Bifurcação	29
3.6. Diagrama isoperiódico	30
3.7. Bacia de atração	31
4. RESULTADOS	33
4.1. Análise dos resultados para o modelo de mapa generalizado	34
4.1.1. Análise dos resultados para o modelo de mapa generalizado com forçamento externo.....	43
4.2. Análise dos resultados do modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico	48
CONCLUSÃO	55
REFERÊNCIAS	57

INTRODUÇÃO

O sistema nervoso é responsável por receber e transmitir informações utilizadas no funcionamento do corpo. Essas informações podem ser provenientes de estímulos externos ou internos ao corpo, por exemplo, a pressão arterial (estímulo interno) e um odor de perfume (estímulo externo). O sistema nervoso é composto basicamente por células neuronais e gliais. As células gliais são responsáveis pela manutenção da função neural através do transporte de substâncias nutritivas e também são responsáveis por processos tóxicos que resultam na morte de neurônios, ou seja, as células da glia são fundamentais em mecanismo de reorganização e recuperação neural [1]. As células neuronais, ou neurônios, são as células base do sistema nervoso, pois desempenham o papel de transmitir e receber as informações de um neurônio para o outro ou também para órgãos que executam o comando de acordo com a informação [2].

Dado a importância dos neurônios para o sistema nervoso, pesquisas sobre eles são desenvolvidas há muito tempo. Um dos primeiros modelos desenvolvidos para simular as dinâmicas do neurônio foi o modelo de Hodgkin-Huxley. Desde o desenvolvimento desse modelo, em 1952, vários modelos foram elaborados que o utilizaram como base [3]. Grande parte destes modelos se baseiam na mudança do potencial elétrico da membrana do neurônio causada por estímulos. A maioria deles são formados por equações diferenciais ordinárias a tempo contínuo, porém pesquisas recentes apresentam modelos matemáticos neuronais a tempo discreto. Como exemplo, o mapa de Rulkov reproduz dinâmicas de *spiking* (uma rápida alteração no potencial elétrico da membrana) e *bursting* (uma rajada de *spikes*) [4].

A caracterização de comportamentos caóticos e/ou regulares em fenômenos biológicos é explorado pela Dinâmica Não-Linear, dado a forma dos modelos matemáticos que descrevem esses fenômenos [5].

Dentro do contexto da Dinâmica Não-Linear, essa dissertação visa explorar as dinâmicas de dois modelos matemáticos baseados no modelo de Fitzhugh-Nagumo, um modelo de mapa generalizado e um modelo com campo elétrico. Com isso, tem-se como objetivo identificar regiões com comportamentos caóticos, quase-periódicos e periódicos para os parâmetros analisados dos dois sistemas.

O capítulo 1 irá apresentar uma breve revisão teórica da fisiologia dos neurônios, qual o mecanismo que regula as alterações do potencial da membrana e o que é um potencial de ação. A descrição dos modelos neuronais de Hodgkin-Huxley, FitzHugh-Nagumo e os utilizados neste trabalho é feita no capítulo 2. Para a análise da dinâmica dos sistemas

baseados no modelo de FitzHugh-Nagumo foram utilizadas ferramentas como diagrama de Lyapunov, diagrama de bifurcação, diagramas isoperiódicos e bacias de atração. No capítulo 3 são abordadas essas ferramentas e alguns conceitos básicos como atratores e o expoente de Lyapunov. No capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos obtidos do modelo de mapa generalizado e do modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico. Os resultados numéricos consistem em espaços de parâmetros, diagramas de bifurcação, diagramas isoperiódicos e bacias de atração. Por fim, são apresentadas as conclusões desse trabalho.

1. NEURÔNIOS

Neste capítulo são apresentados conceitos básicos acerca de neurônios e sua fisiologia. Será abordado brevemente como ocorrem os estímulos e como estes são recebidos pelos neurônios.

1.1. Fisiologia dos neurônios

Os neurônios são células que tem o papel de receber, processar e enviar informações por meio de impulsos nervosos, e podem ser considerados como a unidade básica da estrutura do sistema nervoso. No sistema nervoso humano existem aproximadamente 86 bilhões de neurônios [6].

Existem diversos tipos de células neurais no sistema nervoso, mas em geral a estrutura (veja Figura 1.1) pode ser dividida em quatro partes:

- **Corpo celular:** Local do neurônio onde está presente o núcleo, grande parte das organelas celulares de onde partem os prolongamentos dessa célula;
- **Dendritos:** envia o impulso nervoso até o corpo celular e na maioria das vezes efetua a comunicação entre os neurônios por meio de sinapses;
- **Axônio:** responsável pelo processamento das informações vindas dos dendritos e condução do impulso nervoso para outras células;
- **Bainha de mielina:** serve para aumentar a velocidade da condução do potencial de ação (é uma alteração rápida na polaridade da tensão elétrica da membrana celular).

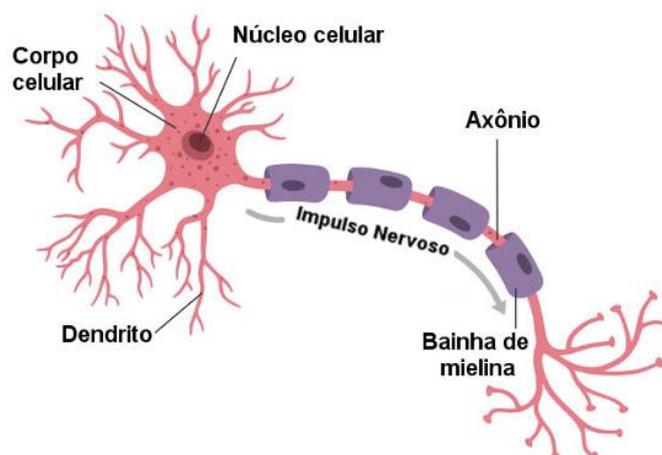


Figura 1.1: Estrutura de um neurônio. Retirado da referência [7].

1.2. Potencial da membrana

Em todas as células do corpo existem potenciais elétricos através de suas membranas e no caso de células nervosas, como o neurônio, esses são capazes de gerar impulsos eletroquímicos que se modificam rapidamente em suas membranas. Basicamente as membranas são formadas por uma bicamada fosfolipídica que separa a parte interna da célula (citoplasma, núcleo) do meio extracelular [8].

A composição química do interior e o exterior de uma célula é basicamente igual, porém há uma concentração diferente dos componentes do meio interno e externo. A membrana além de separar os meios, pode permitir, quando necessário, a entrada de substâncias do meio mais concentrado para o meio menos concentrado. Este transporte de substâncias de um meio para o outro é realizado por estruturas imersas na membrana chamadas de canais iônicos [8].

Os canais iônicos (veja Figura 1.2) são responsáveis por selecionar substâncias que entram ou saem das células. No caso de um canal iônico do tipo catiônico, são transportados íons positivos, já que o canal é revestido de carga negativa. No canal aniônico são transportados íons negativos, já que o canal é revestido de carga positiva. Esses íons transportados podem ser íons de sódio Na^+ , potássio K^+ , cálcio Ca^{+} e cloreto Cl^- . Devido ao transporte destes íons há um movimento das cargas negativas e positivas para dentro e fora da célula que geram uma mudança no potencial elétrico, mecanismo este que é denominado de potencial da membrana [8].

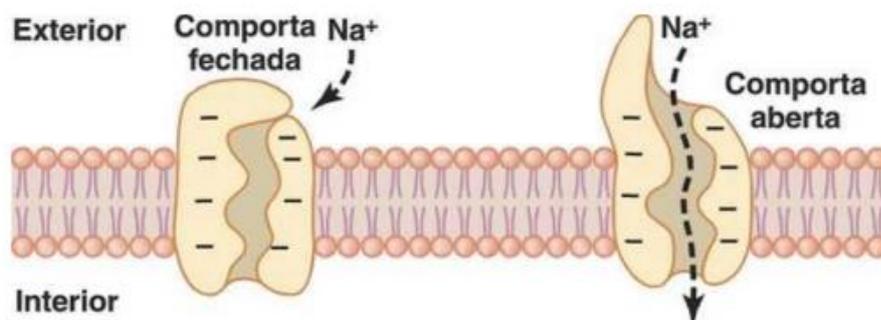


Figura 1.2: Transporte de íons de sódio. Retirado da referência [8].

1.2.1. Potencial de ação

Normalmente as células estão em equilíbrio (neutras), ou seja, para cada íon negativo há um íon positivo que o neutraliza na sua membrana, situação essa denominada de potencial de equilíbrio. Porém, os neurônios são células ditas auto-excitáveis e podem alterar essa diferença de íons para ocasionar uma diferença de potencial. Quando um neurônio muda rapidamente (na ordem de milissegundos) do seu estado de repouso para um estado que gera uma diferença de potencial negativa, para uma positiva e negativa novamente, é denominado de potencial de ação [8, 9].

O neurônio quando se encontra em repouso tem sua membrana polarizada, isto é, a parte intracelular do neurônio possui uma maior concentração de íons negativos, portanto a membrana está eletronegativa. O potencial da membrana do neurônio é de aproximadamente -90 mV a -70 mV quando em repouso. Ao aplicar um estímulo externo (cheiro, sabor, emoção, etc.) a membrana sofre uma mudança de função, que produz uma diferença de potencial suficiente para que ocorra um potencial de ação. Este potencial de ação, ou impulso elétrico, é transmitido a toda a célula, que conduz a informação para outras células ou órgãos. Neste caso o potencial de ação faz com que o potencial da membrana vá até um valor de 30 mV abrindo os canais iônicos para o transporte de íons de Na^+ . Porém, como no potencial de ação o valor deve voltar ao negativo, são fechados os canais que transportam Na^+ e abertos os canais iônicos de potássio K^+ , fazendo com que o potencial da membrana volte a pelo menos -70 mV [8, 9].

Outro mecanismo importante que ocorre durante o potencial de ação é o limiar de ação. Este mecanismo não permite que ocorram potenciais de ação se ao entrar íons de sódio Na^+ o potencial da membrana não aumente ao menos 15 a 30 mV, ou seja, o potencial da membrana deve sair pelo menos de -70 mV para -55 mV [8]. Portanto, o limiar de ação evita que ocorram pequenos estímulos ocasionados, por exemplo, pelo toque do ar ambiente na pele.

2. MODELOS DE NEURÔNIO

Neste capítulo serão abordados alguns modelos matemáticos que descrevem o comportamento de um neurônio. Destes modelos, dois foram utilizados para obtenção de resultados nesta dissertação. Estes são os modelos de mapa generalizado do modelo de neurônio de FitzHugh-Nagumo e o de FitzHugh-Nagumo na presença de um campo elétrico. Para o caso do mapa generalizado foi considerado o mapa com e sem forçamento.

2.1. Modelo de Hodgkin-Huxley

O modelo de Hodgkin-Huxley é um modelo que foi elaborado em 1952 para descrever como surgem e são propagados os potenciais de ação. O modelo é um conjunto de quatro equações diferenciais não lineares independentes do tempo, sendo que nesse modelo a membrana assume o papel de um capacitor que pode alterar o potencial elétrico de acordo com a corrente elétrica aplicada. O modelo também serviu para quantificar a dependência da condutância de sódio Na e potássio K com o potencial da membrana e o tempo [10].

No modelo, a primeira das quatro equações descreve o potencial da membrana e como a diferença de potencial elétrico se comporta dentro do neurônio, e que depende das outras equações que descrevem as variáveis de ativação de sódio e potássio, m e n , e da variável de inativação do sódio, h [10]. Na figura 2.1 temos o circuito elétrico proposto por Hodgkin e Huxley e que é descrito pelo seguinte modelo matemático:

$$\begin{aligned}
 c_m \frac{dV}{dt} &= \bar{g}_k n^4 (E_k - V) + \bar{g}_{Na} m^3 h (E_{Na} - V) + \bar{g}_l (E_l - V) + I_e(t), \\
 \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \\
 \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \\
 \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

O sistema (2.1) é um conjunto de equações que descreve um circuito resistor-capacitor (RC), sendo que em um neurônio o parâmetro c_m representa a capacitância da membrana, V é o potencial da membrana, I é uma corrente elétrica externa aplicada ao neurônio. E_k , E_{Na} , E_l correspondem ao potencial de Nerst (é a tensão elétrica que

mantém o sistema em equilíbrio) dos íons K^+ , Na^+ e l , que pode ser o cloro Cl^- ou outro íon. g_k , g_{Na} e g_l são as condutâncias máximas das membranas dos respectivos íons. Os α 's e β 's são, respectivamente, o número de vezes por segundo que um canal fechado se abre e que um canal aberto se fecha.

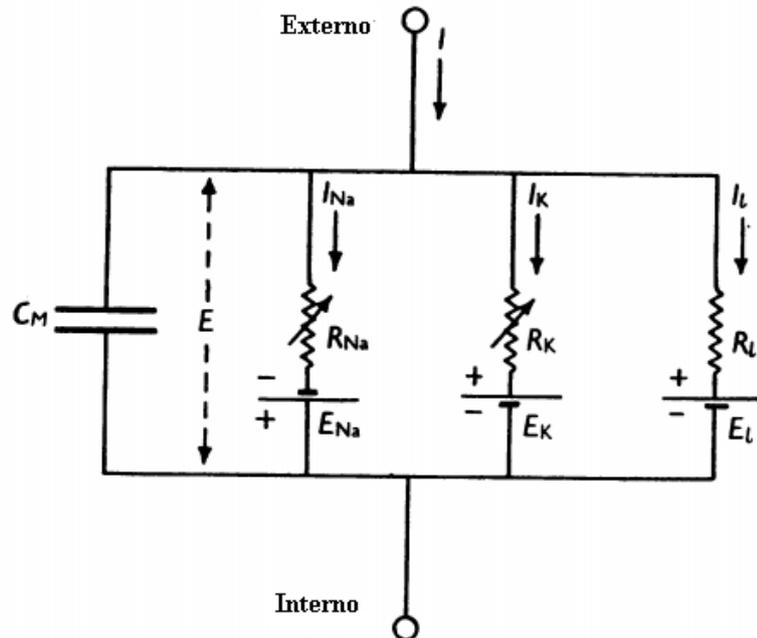


Figura 2.1: Circuito RC utilizado por Hodgkin-Huxley com $R_k = \frac{1}{g_k}$, $R_{Na} = \frac{1}{g_{Na}}$ e $R_l = \frac{1}{g_l}$. Retirado da referência [10].

2.2. Modelo de FitzHugh-Nagumo

O modelo de neurônio de FitzHugh-Nagumo foi proposto inicialmente em 1961 por Richard FitzHugh. Em 1962 J.S Nagumo representa o modelo num circuito elétrico (veja Figura 2.2). O modelo é uma simplificação de um modelo mais realístico, que é o de Hodgkin-Huxley, e consiste em duas equações diferenciais não lineares descritas da seguinte forma [11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V - \frac{V^3}{3} - W + I_{ext}(t), \\ \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{\tau}(aV + b - W). \end{aligned} \quad (2.2)$$

V é a variável que corresponde a tensão elétrica através da membrana celular e está relacionada com os íons Na^+ . A variável W representa a recuperação do repouso pela membrana após um potencial de ação. I_{ext} é a corrente elétrica externa que representa um estímulo externo ao neurônio e é uma variável de entrada arbitrária definida em função do tempo. Os parâmetros a , b e τ não tem sentido fisiológico e foram inseridos nas equações para ajustá-las aos resultados experimentais.

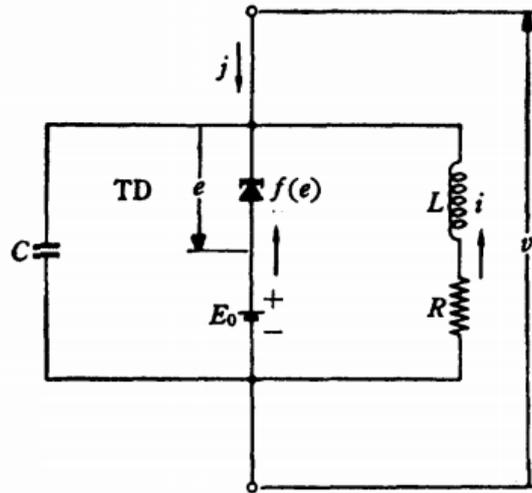


Figura 2.2: Circuito utilizado por J. S. Nagumo. Retirado da referência [13].

2.2.1. Mapa generalizado baseado no modelo de FitzHugh-Nagumo

Grande parte dos modelos de neurônios são descritos por equações diferenciais ordinárias que representam o potencial na membrana do neurônio e a dinâmica dos canais iônicos. Modelos de neurônios descritos por equações a tempo discreto, ou mapas, ainda são recentes, porém, devido a sua simplicidade matemática, necessitam de um menor tempo para obtenção de resultados numéricos [3].

Na referência [14] é proposto um modelo de mapa generalizado baseado no modelo de FitzHugh-Nagumo. No modelo de mapa são obtidos dinâmicas de *bursting* e dinâmicas caóticas. O modelo é obtido utilizando as equações (2.2) e aplicando o método de Euler para aproximação da solução de equações diferenciais. Como no método de Euler a solução é obtida por meio de iterações, temos um sistema FitzHugh-Nagumo a tempo discreto da seguinte forma:

$$V_{n+1} = V_n + \delta \left(V_n - W_n - \frac{V_n^3}{3} + I \right)$$

$$= (1 + \delta)V_n + \delta(-W_n - \frac{V_n^3}{3} + I), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + \frac{\delta}{\tau}(aV_n + b - W_n) \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right)W_n + \frac{\delta}{\tau}(aV_n + b), \end{aligned}$$

sendo δ o passo de integração no intervalo de $0 < \delta < 1$. Substituindo V e W por x e y , respectivamente, e também fazendo as seguintes substituições,

$$k_1 = (1 + \delta), \quad k_2 = \delta, \quad k_3 = \left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right), \quad k_4 = \frac{\delta}{\tau}, \quad (2.3)$$

obtem-se o mapa generalizado, escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= k_1 x_n + k_2 \left(-\frac{x_n^3}{3} - y_n + I\right), \\ y_{n+1} &= k_3 y_n + k_4 (a x_n + b). \end{aligned} \quad (2.4)$$

O mapa generalizado não é limitado pelas definições (2.3) do sistema original e é capaz de reproduzir dinâmicas de *spiking* similares ao do modelo original, que será evidenciado no capítulo 4. Portanto, podemos interpretar o sistema (2.2) como um caso especial do mapa generalizado.

2.2.2. Mapa generalizado com um forçamento externo

De forma genérica, pode-se escrever as equações de um mapa bidimensional forçado da seguinte maneira [15]:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= f(X_n, Y_n, \theta_n), \\ Y_{n+1} &= g(X_n, Y_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega \pmod{1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde, X e Y são as variáveis do sistema não forçado, f e g são funções, θ representa uma fase discreta que está compreendida no intervalo de $[0, 1)$ e ω é a frequência

angular do forçamento. No caso de ω ser um racional, o forçamento é dito periódico, enquanto para ω irracional o forçamento é dito quase-periódico.

Considerando o mapa generalizado sem forçamento (2.4) e somando um termo de forçamento $\epsilon \cos(2\pi\theta_n)$ na primeira equação, podemos escrever o mapa generalizado forçado como

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= k_1 x_n + k_2 \left(-\frac{x_n^3}{3} - y_n + I \right) + \epsilon \cos(2\pi\theta_n), \\y_{n+1} &= k_3 y_n + k_4 (ax_n + b), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \omega \pmod{1}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

ϵ representa a amplitude do forçamento.

2.2.3. Modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico

Foi visto no capítulo anterior, que neurônios são células que estão carregadas de íons de potássio K^+ , sódio Na^+ e cloro Cl^- . Estes íons são transportados pelos canais iônicos do meio extracelular e intracelular de acordo dá necessidade da função que o neurônio irá exercer. Como resultado, o potencial da membrana sai do equilíbrio e podemos considerá-la como uma superfície carregada.

Com isso, pode-se descrever qual o campo elétrico dessa superfície carregada. Utilizando [16] como referência para determinar o efeito aproximado do campo elétrico produzido por um neurônio, iremos fazer as seguintes considerações: (i) A membrana do neurônio terá uma distribuição de cargas q uniforme; (ii) A superfície da membrana tem a forma de uma grande placa com área A ; (iii) A constante dielétrica do meio é ϵ_1 ; (iv) A célula tem uma forma esférica com raio r . Dado essas considerações pode-se definir a intensidade do campo elétrico próximo a membrana como:

$$E = \frac{q}{2\epsilon_1 A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_1} .\tag{2.7}$$

Para o potencial elétrico da membrana temos:

$$V = rE.\tag{2.8}$$

Considerando o modelo de neurônio de FitzHugh-Nagumo simplificado na forma [11, 17]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext}, \\ \frac{dy}{dt} &= a'x + b'y + c,\end{aligned}\tag{2.9}$$

com x e y descrevendo o ativador (potencial na membrana) e inibidor (fluxo de iões), respectivamente. a' , b' e c são parâmetros e I_{ext} um estímulo externo. Pode-se reescrever o sistema (2.9) para considerar o efeito do campo elétrico do neurônio usando as equações (2.7) e (2.8) da seguinte forma [16]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext}, \\ \frac{dy}{dt} &= a'x + b'y + c + \Delta V \\ &= a'x + b'y + c + rE,\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\varepsilon_1 A} \frac{dq}{dt} = ky.$$

Dado que $k = 1/(2\varepsilon_1 A)$ e $y = \frac{dq}{dt}$. Além disso, o campo elétrico intrínseco do neurônio é modificado pelo campo elétrico externo, E_{ext} . Logo, as equações que descrevem a dinâmica de um neurônio sob efeito de um campo elétrico baseado no modelo de FitzHugh-Nagumo são [18, 19]:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext}, \\ \frac{dy}{dt} &= a'x + b'y + c + rE,\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\frac{dE}{dt} = ky + E_{ext}.$$

Os conjuntos de equações (2.4), (2.6) e (2.11) são utilizados para a obtenção dos resultados numéricos no capítulo 4.

3. REVISÃO TEÓRICA

Neste capítulo será feita uma breve revisão de conteúdos e conceitos essenciais nessa dissertação. Assim, serão apresentadas as definições de mapa, fluxo, atratores, sensibilidade às condições iniciais, expoente de Lyapunov, diagrama de bifurcação, diagrama de Lyapunov, diagrama isoperiódico e bacia de atração.

3.1. Sistemas Dinâmicos

Os estados de muitos sistemas físicos, biológicos, químicos, sociais e econômicos podem ser previstos até certo tempo conhecendo as leis que regem seu comportamento e seu estado inicial, que são as características que definem um sistema dinâmico [20]. Portanto, um sistema dinâmico pode ser descrito por um grupo de equações que demonstram a evolução temporal dos estados do sistema para certa condição inicial. Dependendo do sistema, o tempo pode ser tratado nas equações como uma variável discreta (mapa) ou contínua (fluxo). Considerando o caso de um fluxo, no qual o estado do sistema é composto por n variáveis, pode-se descrever o sistema por n equações diferenciais ordinárias, autônomas, de primeira ordem, como

$$\begin{aligned} \frac{dx^{(1)}}{dt} &= F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} &= F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \\ &\vdots \\ \frac{dx^{(n)}}{dt} &= F_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Utilizando notação vetorial, as equações diferenciais podem ser dadas por:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \tag{3.2}$$

sendo \mathbf{x} um vetor de n dimensões e \mathbf{F} uma função de \mathbf{x} . Considerando um estado inicial $\mathbf{x}(0)$, as equações representam um sistema dinâmico, pois podemos obter as soluções das equações e definir o estado $\mathbf{x}(t)$ para um $t > 0$.

Há três formas de se resolver as equações que descrevem o comportamento do sistema: Por técnica analítica, quando se integram analiticamente as equações

diferenciais obtendo as soluções em termos de fórmulas gerais (porém são poucos os sistemas de tempo contínuo que se pode obter a solução analítica); Por técnica numérica, que utiliza computadores para obter soluções específicas para certo conjunto de parâmetros e condições iniciais; E pela técnica qualitativa, que utiliza cálculos analíticos simples para fornecer pistas do comportamento do sistema. Basicamente se determinam soluções assintóticas do sistema, ou seja, os possíveis estados do sistema quando $t \rightarrow \infty$ [21].

Utilizando as soluções de um sistema dinâmico é possível analisar a evolução temporal via espaço de fase. A figura 3.1 mostra o espaço de fase de um fluxo iniciado num estado inicial $\mathbf{x}(0)$ até um estado $\mathbf{x}(t)$ para o caso em que $n = 3$.

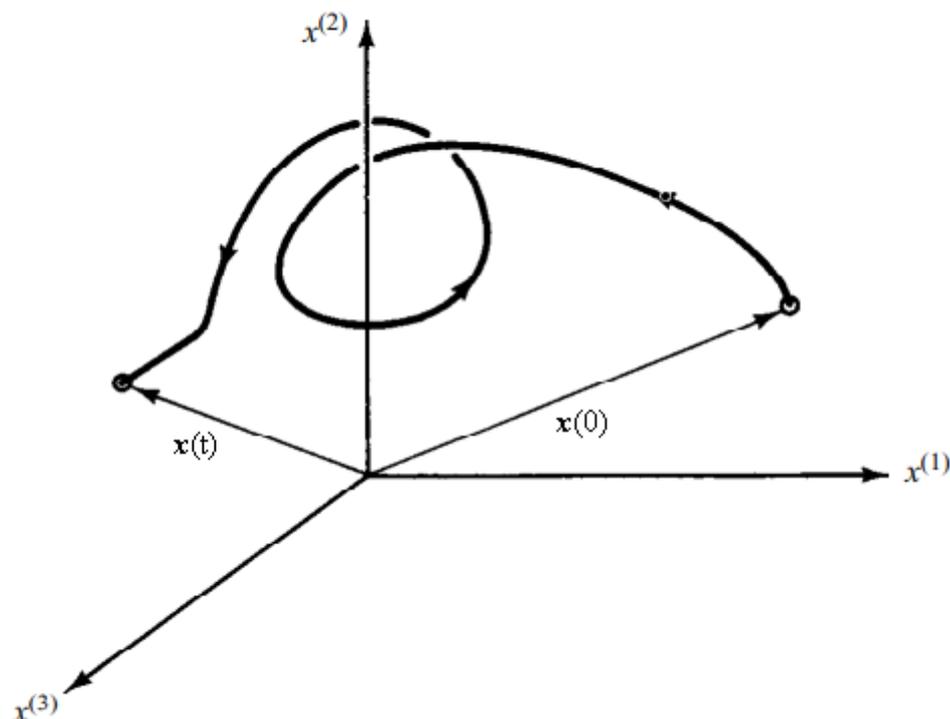


Figura 3.1: Órbita de um espaço de fase tridimensional ($n = 3$). Retirado da referência [20].

No caso de mapas, o tempo assume valores inteiros, e de forma análoga ao fluxo, as equações que descrevem o sistema podem ser escritas da seguinte forma vetorial [20]:

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_t), \quad (3.3)$$

sendo que \mathbf{y}_t é um vetor n dimensional $(y_t^{(1)}, y_t^{(2)}, \dots, y_t^{(n)})$ e \mathbf{M} uma função da variável \mathbf{y}_t . A evolução temporal dos estados do sistema pode ser obtida através das sucessivas iterações do sistema, ou seja, a solução atual é obtida através do resultado da solução anterior, partindo de uma condição inicial \mathbf{y}_0 . Portanto, para o primeiro passo em que $t = 1$ se obtém o estado $\mathbf{y}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{y}_0)$, em $t = 2$ se obtém $\mathbf{y}_2 = \mathbf{M}(\mathbf{y}_1)$ e assim sucessivamente. A trajetória (ou órbita) no espaço de fase do sistema é gerada pelo conjunto dos pontos $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$

3.2. Atrator

Os sistemas dinâmicos podem ser categorizados como sistemas dissipativos ou conservativos. Através da análise de um fluxo no espaço de fases via teorema de Liouville é possível saber se o sistema é conservativo ou dissipativo, observando a evolução do hipervolume n dimensional no espaço de fases através do tempo e partindo de uma condição inicial. Se o fluxo mantiver constante o volume no espaço de fases o sistema é dito conservativo. Caso o volume no espaço de fases diminua com o tempo o sistema é dito dissipativo. Para sistemas dissipativos as trajetórias formadas pela evolução temporal dos seus estados, quando não divergem, convergem para certas regiões limitadas no espaço de fases, denominada de atrator, que é um conjunto fechado de pontos invariantes no tempo [21].

No caso de sistemas dinâmicos contínuos, autônomos e tridimensionais, podemos ter os seguintes tipos de atratores:

- Ponto de equilíbrio: é um ponto no espaço de fases cuja dinâmica do sistema converge e independe do tempo;
- Atrator periódico ou ciclo limite: é um conjunto de valores em que a dinâmica do sistema converge demonstrando uma trajetória periódica (movimento periódico) no espaço de fases;
- Atrator quase-periódico (Torus): exibe uma dinâmica quase-periódica que tem duas frequências fundamentais independentes. Situação que surge quando as órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, entretanto, não apresenta sensibilidade às condições iniciais;

– Atrator caótico: apresenta sensibilidade às condições iniciais, ou seja, a distância entre duas órbitas cresce exponencialmente, mas o atrator ocupa um volume limitado no espaço de fases.

3.3. Sensibilidade às condições iniciais e Expoente de Lyapunov

Sistemas dinâmicos caóticos são caracterizados por possuir uma divergência exponencial de trajetórias com condições iniciais próximas, que se denomina sensibilidade às condições iniciais. A taxa de afastamento entre as trajetórias pode ser obtida utilizando os expoentes de Lyapunov [21]. A figura 3.2 apresenta a evolução temporal de duas órbitas com condições iniciais próximas, $x_1(0)$ e $x_2(0) = x_1(0) + \Delta(0)$, no espaço de fase para as órbitas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ após um tempo t (contínuo). A separação entre as órbitas evolui de $\Delta(0)$ para $\Delta(t) = x_2(t) - x_1(t)$. Caso a diferença entre as órbitas $\Delta(t)$ cresça exponencialmente com o tempo, ou seja, $|\Delta(t)| = \Delta(0)e^{\lambda t}$, com λ o expoente de Lyapunov maior que zero, é dito que o sistema apresenta sensibilidade às condições iniciais e é caótico [20]. Devido a essa sensibilidade, fenômenos que apresentam uma dinâmica caótica podem se tornar imprevisíveis em longo prazo, pois pequenos erros nas soluções podem crescer exponencialmente com o tempo. Mesmo que se trate de sistemas determinísticos, essa imprevisibilidade em longo prazo se dá ao erro intrínseco de uma medida utilizada para prever um fenômeno via um modelo matemático [22].

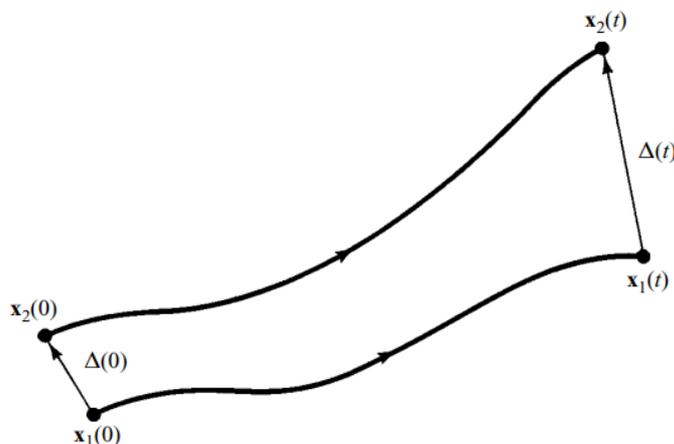


Figura 3.2: Evolução de órbitas próximas no espaço de fase. Retirado da referência [20].

Para se quantificar a taxa de divergência das trajetórias num espaço de fase n dimensional composto de n equações diferenciais ordinárias, como o do sistema (2.1), precisamos obter o expoente de Lyapunov. Para isso, iremos considerar o sistema numa hipersfera de condições iniciais centradas no ponto $\mathbf{x}(t_0)$. Conforme o tempo passa, o volume da hipersfera se deforma, e considerando que ao longo da j -ésima dimensão ($j = 1, 2, \dots, n$) o raio inicial $r_j(t_0)$ varie exponencialmente no tempo de forma que o raio evolua para um valor $r_j(t)$ no instante, teremos

$$r_j(t) = r_j(t_0)e^{\lambda_j(t-t_0)}, \quad (3.3)$$

que pode ser reescrito como

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[r_j(t)/r_j(t_0)]}{t-t_0}, \quad (3.4)$$

onde o conjunto dos expoentes de Lyapunov λ_j é denominado de espectro do expoente de Lyapunov. Para o caso de o sistema dinâmico ser dissipativo, a soma dos j expoentes de Lyapunov deve ser negativa. Com a exceção de sistemas em que as derivadas de suas equações são constantes e que o expoente de Lyapunov pode ser obtido algebricamente, o cálculo dos expoentes de Lyapunov é realizado numericamente.

Num sistema contínuo tridimensional existem 3 expoentes de Lyapunov, que podem ser associados aos tipos de atratores da seguinte forma [21]:

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0)$: O atrator é um ponto fixo;
- $(\lambda_1 = 0; \lambda_2, \lambda_3 < 0)$: O atrator é dito periódico ou ciclo limite;
- $(\lambda_1, \lambda_2 = 0; \lambda_3 < 0)$: O atrator é do tipo tórus;
- $(\lambda_1 > 0; \lambda_2 = 0; \lambda_3 < 0)$: Atrator é caótico e tem-se o maior expoente positivo ($\lambda_1 > 0$), associado à dependência sensível nas condições iniciais.

3.4. Diagrama de Lyapunov

Outra forma de se utilizar os expoentes de Lyapunov é analisar o comportamento de um sistema observando a variação de magnitude de certa quantidade variando dois parâmetros do sistema. Dessa forma, o diagrama de Lyapunov é um gráfico tridimensional que demonstra bidimensionalmente a variação de dois parâmetros do sistema associados à um terceiro valor, que nesse caso é o maior

expoente de Lyapunov. No gráfico é utilizado gradiente de cores para representar a intensidade do maior expoente de Lyapunov relacionado ao par de parâmetros escolhidos. A variação de cores no diagrama de Lyapunov permite identificar regiões em que um sistema contínuo irá possuir atratores do tipo ponto fixo, periódico ou torus (no diagrama de Lyapunov não é possível diferenciar tórus e período, dado que em ambos o maior expoente de Lyapunov é nulo), e caótico. Para o de um sistema discreto, o diagrama de Lyapunov permite identificar regiões de período, bifurcação e caos. A figura 3.3 é um exemplo gráfico do diagrama de Lyapunov para o modelo de mapa generalizado que é um sistema discreto, no gradiente do amarelo ao vermelho temos regiões com atrator caótico, em cinza regiões periódicas e em preto as regiões de bifurcação (regiões em que a mudança no atrator).

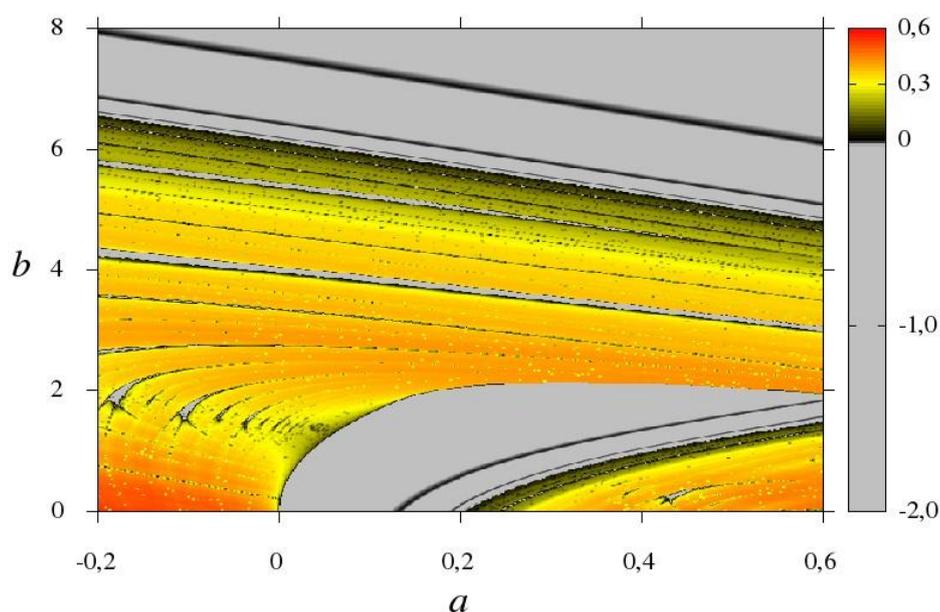


Figura 3.3: Diagrama de Lyapunov do sistema (2.4).

3.5. Diagrama de Bifurcação

O termo bifurcação foi inicialmente utilizado por Poincaré em 1885 para tratar da mudança qualitativa do atrator de um sistema dinâmico conforme um parâmetro fixo de controle passa por um valor crítico [21].

Portanto, o diagrama de bifurcação é uma representação gráfica do comportamento qualitativo do conjunto das órbitas de um sistema dinâmico para um

certo parâmetro. Para o caso de mapas, no diagrama de bifurcação são plotados os pontos no qual o sistema converge após determinado número de iterações. Na figura 3.4 temos o diagrama de bifurcação do sistema (2.4) utilizando o parâmetro a como parâmetro de controle. No caso de fluxos o Diagrama de Bifurcação é construído de forma análoga, porém os pontos utilizados no gráfico são os pontos de máximo da variável analisada.

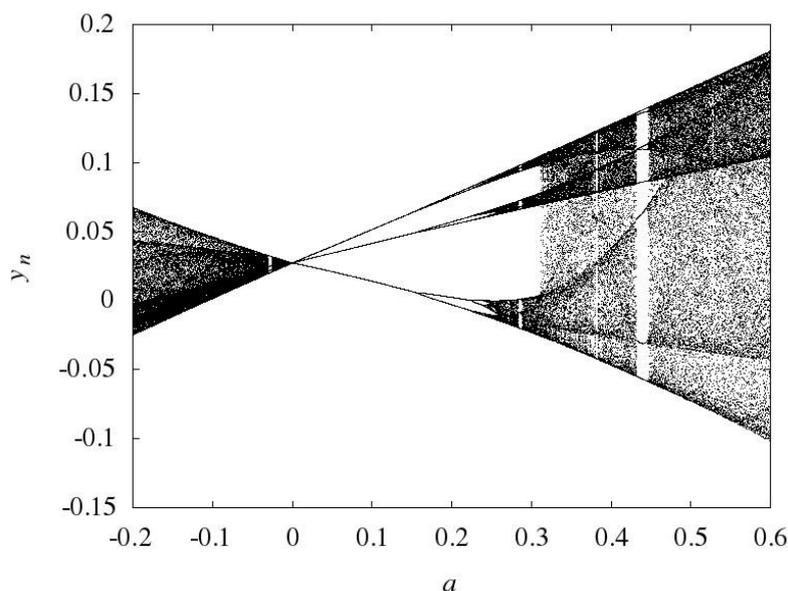


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação $y_n \times a$ do sistema (2.4) com os valores de condições iniciais $x_0 = 0,15$; $y_0 = 0,39$ e parâmetros $b = 0,3$; $I_{ext} = 2,0$.

3.6. Diagramas Isoperiódicos

Além dos diagramas de bifurcação, outra forma de se estudar a mudança no comportamento das órbitas de um sistema dinâmico é o uso de diagramas isoperiódicos [23]. O diagrama isoperiódico é construído, no caso do sistema contínuo através da variação de dois parâmetros fixos do sistema pelos números de máximos locais de uma dada variável no caso, obtendo assim os períodos das estruturas periódicas num certo intervalo. Para o sistema a tempo discreto, o diagrama isoperiódico é construído de forma análoga, porém agora são contados os períodos dos atratores periódicos. A figura 3.5 representa um diagrama isoperiódico do sistema (2.4).

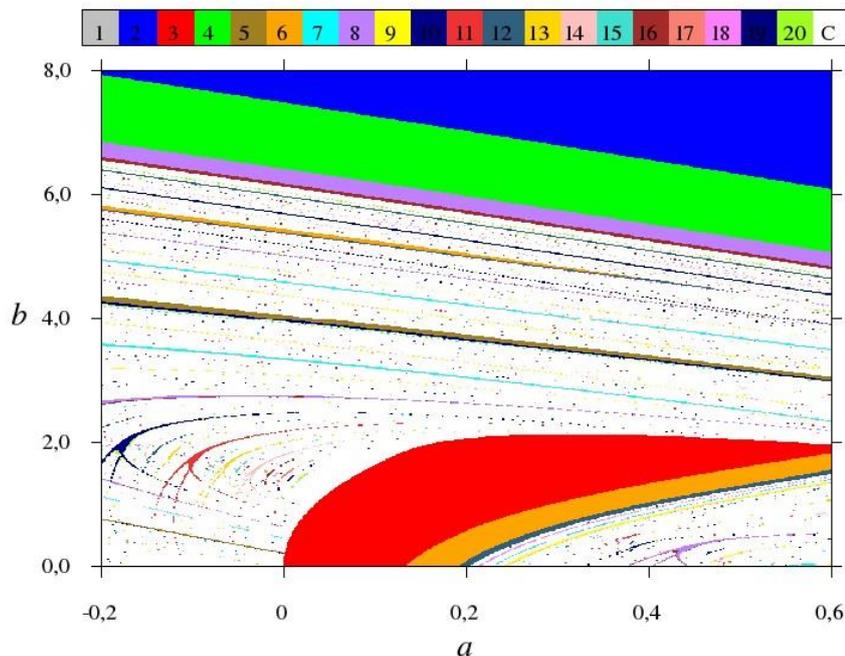


Figura 3.5: Diagrama isoperiódico do sistema (2.4).

3.7. Bacia de atração

Ao analisar os parâmetros de um sistema é possível obter informações acerca dos comportamentos do sistema, como visto no diagrama de Lyapunov que pode caracterizar regiões periódicas e caóticas. Além disso, em alguns casos um sistema dinâmico pode apresentar mais de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável [22]. Ou seja, nesses casos, além da mudança causada pela alteração dos valores do parâmetro, pode-se obter uma mudança no comportamento do sistema ao alterar os valores das condições iniciais. Analisar a mudança da dinâmica via os valores da condição inicial permite identificar intervalos de condições em que a órbita do sistema diverge.

Para essa análise do comportamento do sistema pela condição inicial é construída a bacia de atração. Nesse trabalho, as bacias foram construídas utilizando um par de parâmetros de controle e analisamos o comportamento do atrator do sistema para as condições iniciais. No caso do atrator foram utilizadas três cores para caracterizar o seu tipo. O atrator caótico é representado pela cor vermelha, periódico preto e situações em que a órbita diverge branco. Na figura 3.6 temos um exemplo de uma bacia de atração do sistema (2.4).

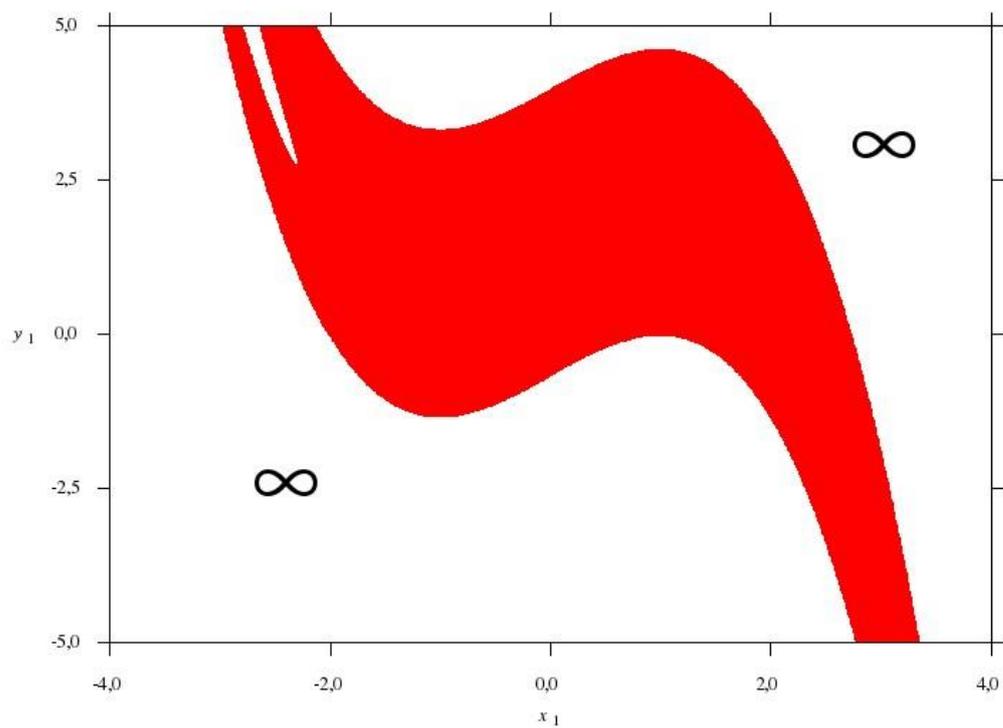


Figura 3.6: Bacia de atração do sistema (2.4). Em vermelho regiões com atrator caótico e em branco regiões sem atrator que a órbita diverge.

4. RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para o modelo de mapa generalizado baseado no modelo FitzHugh-Nagumo, o mesmo modelo modificado por meio de um forçamento externo e o modelo de FitzHugh-Nagumo sob efeito de um campo elétrico. Os resultados são obtidos por meio de métodos computacionais. As ferramentas utilizadas para se estudar a dinâmica são espaços de parâmetros, diagramas de bifurcação e diagramas isoperiódicos.

Para a construção das figuras dos espaços de parâmetros foram obtidos os expoentes de Lyapunov em uma malha quadrada de 500×500 pontos igualmente espaçados. O integrador numérico utilizado foi o Runge-Kutta de quarta ordem com um passo fixo de 10^{-2} e um tempo de integração de 10^5 iterações para o fluxo, e um número de passos na ordem de 10^6 iterações para o mapa. Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov foram utilizadas as mesmas condições iniciais, ou seja, não foi seguido o atrator. As cores usadas no gradiente das figuras estão associadas ao valor do maior expoente de Lyapunov do sistema ou a divergência do sistema, e as cores são branco (divergência), cinza (regiões de ponto fixo no fluxo ou regiões periódicas no mapa), preto (regiões periódicas ou ciclos no fluxo) e variações de amarelo, laranja e vermelho (regiões caóticas em ambos os casos).

Os diagramas de bifurcação foram construídos utilizando também o integrador numérico Runge-Kutta de quarta ordem com passo fixo igual a 10^{-2} no caso do sistemas a tempo contínuo. No caso dos mapas a variável observada é o passo de iteração x_n após o descarte de um transiente de 10^6 passos e para fluxos é observado os valores de máximos locais da variável x após um descarte de transiente de também 5×10^4 passos.

Da mesma forma, foram utilizadas as mesmas configurações do diagrama de Lyapunov para a construção dos diagramas isoperiódicos, com a diferença de que para os valores dos períodos foi utilizada uma malha de 750×750 pontos.

No caso do sistema (2.4), (2.6) e (2.11), os parâmetros que não foram alterados durante as simulações numéricas estão dispostos na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros fixados durante as simulações numéricas. Valores baseados em [14, 18].

Mapa generalizado	Modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico (2.11)
Sem forçamento (2.4)	
$k_1 = 1,0$	$a' = 1,0$
$k_2 = 1,0$	$b' = -1,0$
$k_3 = -0,1$	$c = 0,0$
$k_4 = 0,1$	$k = 1,0$
$I_{ext} = 2,0$	$r = 0,1$
Com forçamento (2.6)	
$\omega = 0,1$	

4.1. Análise dos resultados para o modelo de mapa generalizado

O mapa generalizado (2.4) pode simular comportamentos de descarga de neurônios como também apresenta dinâmicas caóticas. Analisando a órbita do sistema e adotando os valores de $a = 0,1$, $b = 0,3$ e comparando com a evolução temporal do sistema (2.2), podemos ver similaridades nas dinâmicas na figura 4.1. As condições iniciais utilizadas em (2.2) e (2.4) são $V(0) = 1,0$, $W(0) = -0,7$ e $x_0 = 0,15$, $y_0 = 0,39$, respectivamente. Utilizando as mesmas configurações do sistema para figura 4.1 (a), porém alterando o valor do parâmetro a para 0,5 obtém-se uma dinâmica caótica no mapa generalizado (veja figura 4.2).

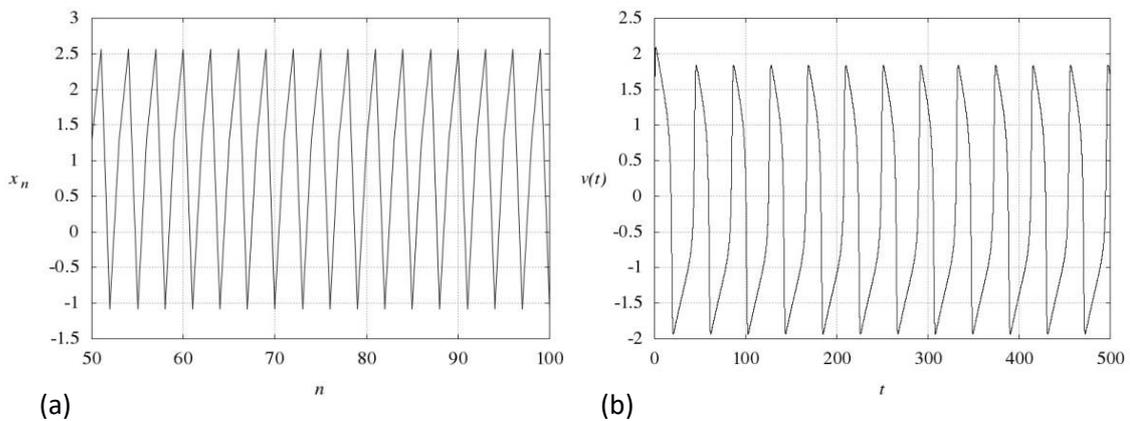


Figura 4.1: (a) Órbita do mapa generalizado (2.4). (b) Evolução temporal do modelo de FitzHugh-Nagumo (2.2) com $a = 1,0$, $b = 0,7$, $\tau = 12,5$ e $I_{ext} = 0,5$.

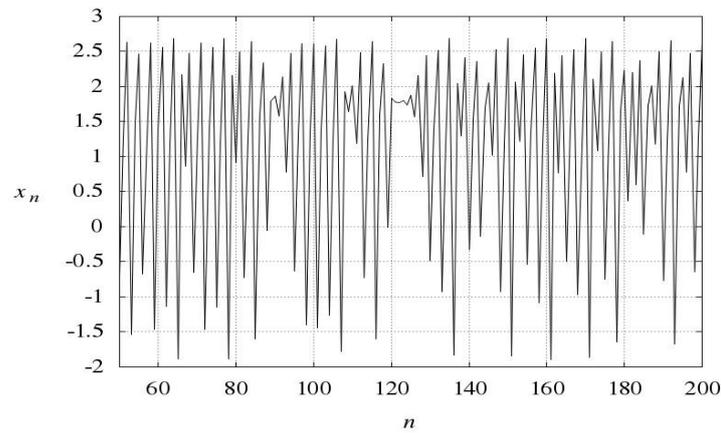


Figura 4.2: Órbita com dinâmica caótica do sistema generalizado. Os valores para os expoentes de Lyapunov são $\lambda_1 \approx 0,437$ e $\lambda_2 \approx -2,231$.

Outra característica do mapa generalizado apresentado na referência [14] é a de o sistema ser semelhante a um mapa do tipo Hénon. Segundo os autores, essa semelhança é devido ao seu atrator estranho (ou caótico) possuir uma estrutura semelhante ao atrator estranho do mapa de Hénon. Na figura 4.3 é apresentado o atrator caótico da série temporal na figura 4.2 ao lado do atrator caótico do mapa Hénon. O atrator do mapa Hénon, figura 4.3 (b), foi retirado da referência [25].

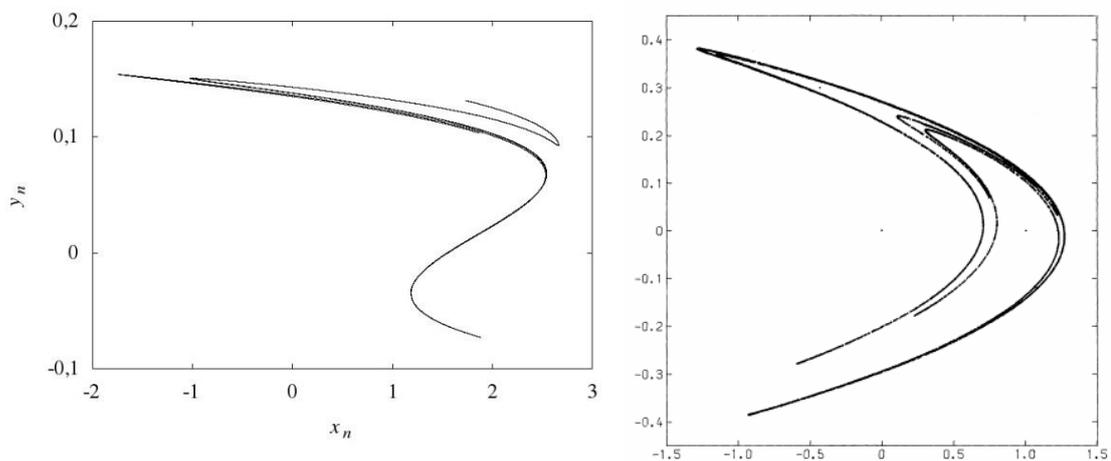


Figura 4.3: (a) Atrator caótico no espaço de fases do mapa generalizado. (b) Um atrator caótico do mapa Hénon.

Para uma análise geral das dinâmicas do mapa generalizado foi construído o diagrama de Lyapunov do sistema para o par de parâmetros $a \times b$. As condições iniciais adotadas foram as mesmas em todas as simulações do mapa generalizado. As condições iniciais foram escolhidas arbitrariamente e os valores adotados são os mesmo da figura 4.1 (a).

Na figura 4.4 (a) pode-se visualizar o diagrama de Lyapunov $a \times b$ do mapa generalizado dentro do intervalo $-0,2 \leq a \leq 0,6$ e $0 \leq b \leq 8$. As cores utilizadas no diagrama de Lyapunov, como informado no início do capítulo, representam a intensidade do valor do maior expoente de Lyapunov do sistema, λ_1 . Dado que o sistema é um mapa, as regiões em cinza possuem o maior expoente negativo e as órbitas nessas regiões são periódicas. As regiões pretas possuem o maior expoente nulo e as órbitas estão passando numa região de bifurcação, ou seja, há uma mudança na dinâmica, podendo ser uma duplicação de período ou crise. Por fim, as regiões com um gradiente de cores do amarelo para o vermelho têm o maior expoente positivo e as órbitas são caóticas. Portanto, o sistema possui uma região periódica no centro da parte inferior da figura e na parte superior. Nas laterais e no centro há regiões caóticas, e no meio dessas regiões podem-se notar pequenas estruturas periódicas. Na figura 4.4 (b) temos uma ampliação da região da caixa azul na figura 4.4 (a) para observar com mais detalhes algumas dessas estruturas.

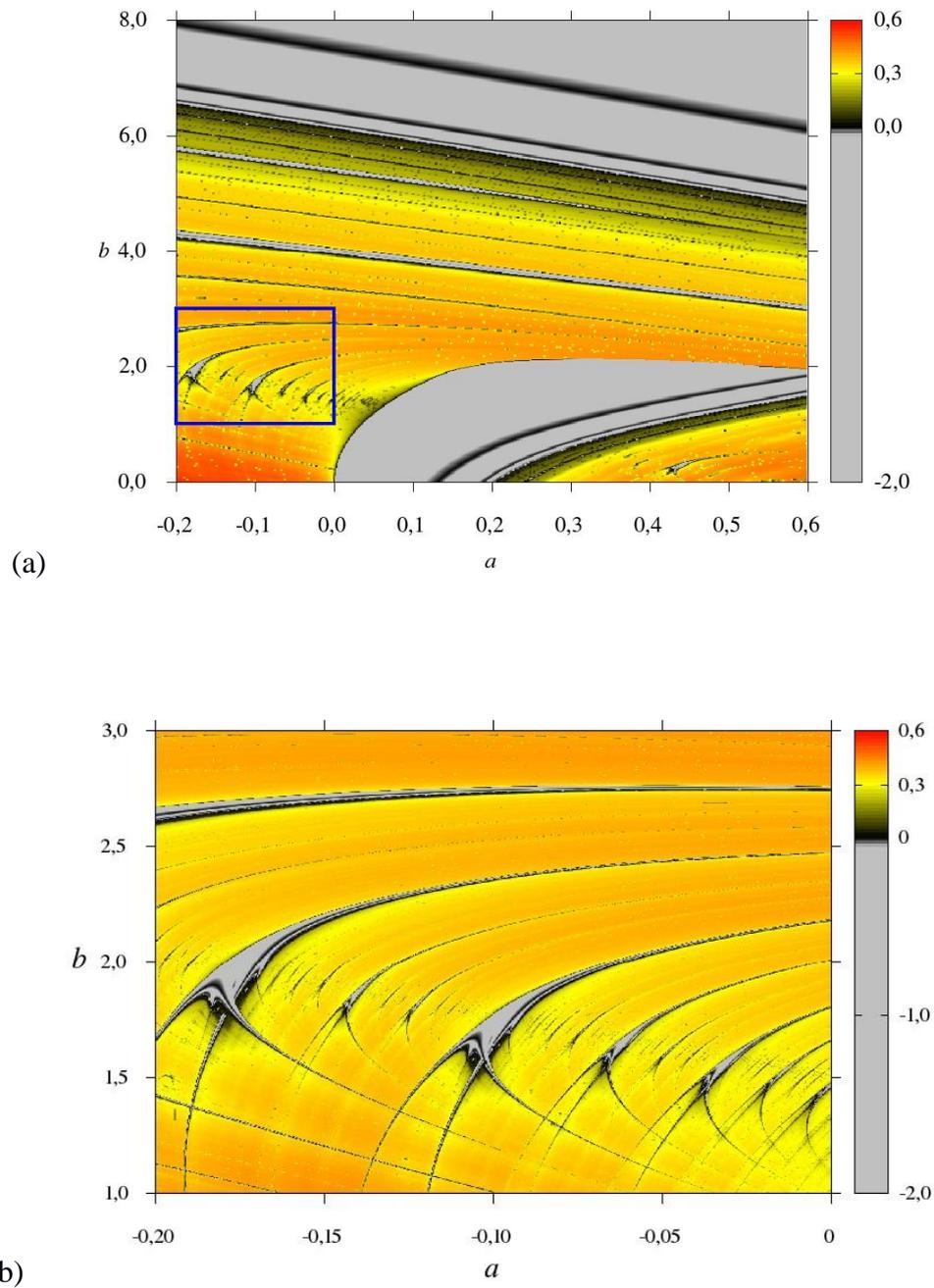


Figura 4.4: (a) Diagrama de Lyapunov $a \times b$ do mapa generalizado para $-0,2 \leq a \leq 0,6$ e $0 \leq b \leq 8$. (b) Diagrama de Lyapunov ampliado na região $-0,2 \leq a \leq 0$ e $1,0 \leq b \leq 3,0$, dentro da caixa azul da figura 4.4 (a).

Ao delimitar uma linha vermelha no diagrama de Lyapunov que passa pelas estruturas periódicas imersas no caos (conforme figura 4.5 (a)), pode-se construir o diagrama de bifurcação para o parâmetro a , figura 4.5 (b). Para a construção do diagrama de bifurcação o parâmetro b foi considerado uma função linear do parâmetro a na forma $b(a) = -3,0a + 1,5$

que é equação da reta para a linha vermelha na figura 4.5 (a). Analisando o diagrama de bifurcação (veja figura 4.5 (b)), nota-se que na região periódica central do diagrama de Lyapunov tem-se uma região periódica de período-3 que surge do comportamento caótico a esquerda por uma bifurcação do tipo crise e que ao aumentar o valor de a o sistema vai retornar ao caos via uma cascata de duplicação de período a direita.

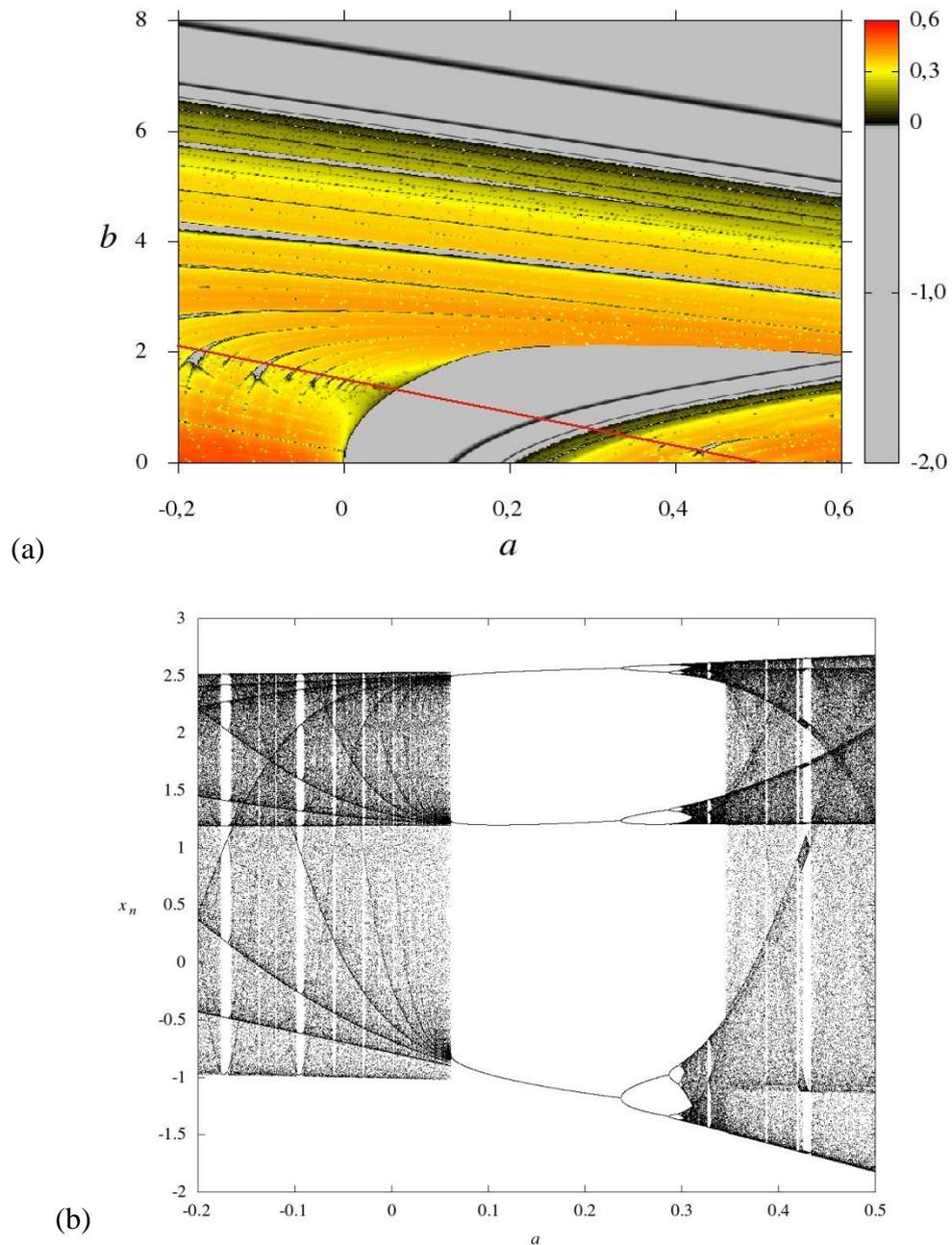


Figura 4.5: (a) Diagrama de Lyapunov do mapa generalizado com a reta do diagrama de bifurcação. (b) Diagrama de bifurcação do sistema (2.4) com relação a variável x_n , para $-0,2 \leq a \leq 0,5$.

Na figura 4.6 temos o diagrama isoperiódico do sistema delimitado na mesma região da figura 4.5 (a). É possível ver que na região periódica que está na parte de cima da figura, há uma redução do período quando o valor de b aumenta, pode-se perceber na figura que há uma redução do período 16 para o 8 e por fim, do período 4 para o 2. No centro da parte inferior da figura, como já observado no diagrama de bifurcação, o sistema sai do caos para período 3 e volta para o caos via uma cascata de duplicação de período. No diagrama estão visíveis as duplicações com período-6 e 12.

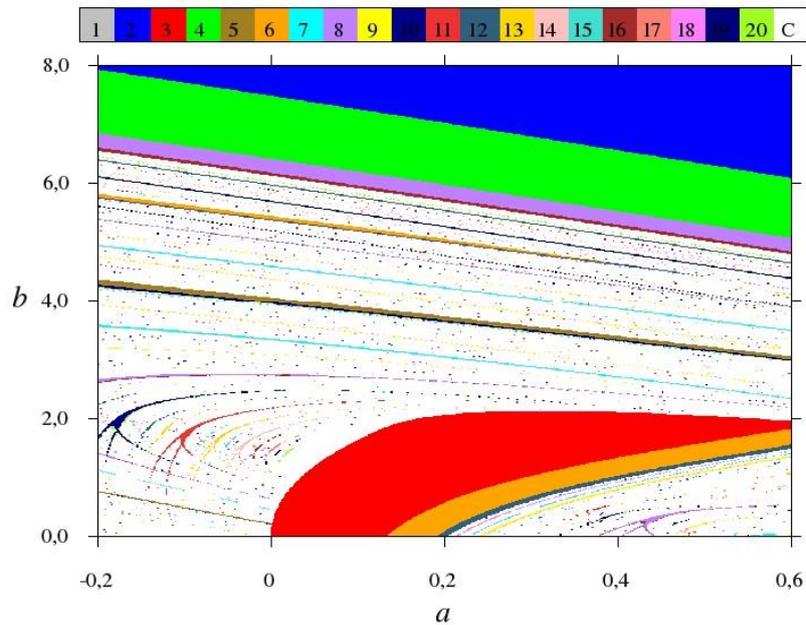


Figura 4.6: Diagrama isoperiódico da figura 4.5 (a).

Considerando a região ampliada na figura 4.4 (b), é construído o diagrama isoperiódico do sistema nessa mesma região, que é apresentado na figura 4.7. As estruturas periódicas imersas no caos possuem uma forma conhecida na literatura denominada de camarão (*shrimp* em inglês) e essa estrutura é recorrente em sistemas dinâmicos discretos ou contínuos [26, 27, 28, 29]. Na primeira estrutura temos uma região de período-10 que tem uma duplicação de período. Na segunda estrutura que está mais visível temos um período-12, na terceira temos um período-11. Ao analisar as estruturas, não aparenta que exista uma regra de adição de período para estruturas seguintes. Nas três primeiras, como já evidenciado, temos os períodos $10 \rightarrow 12 \rightarrow 11$ e ao analisar os próximos três temos $13 \rightarrow 14 \rightarrow 16$. As estruturas de período-15 estão presentes entre os períodos 10 e 12, 11 e 13 e também entre os períodos 13 e 14. Na figura 4.8 é ampliada a figura 4.7 e trocado o intervalo da paleta de cores para contemplar as duplicações das estruturas de período 11, 12, 13, 14 e 15. Na figura 4.8 (a)

visualizam-se as estruturas de período 10 e 12. As estruturas que seguem, são as de período 11, 13 e 14 apresentadas na figura 4.8 (b). Na figura 4.8 (c) é ampliada a figura 4.8 (b) para visualizar a estrutura de período-15 formada entre os períodos 11 e 13.

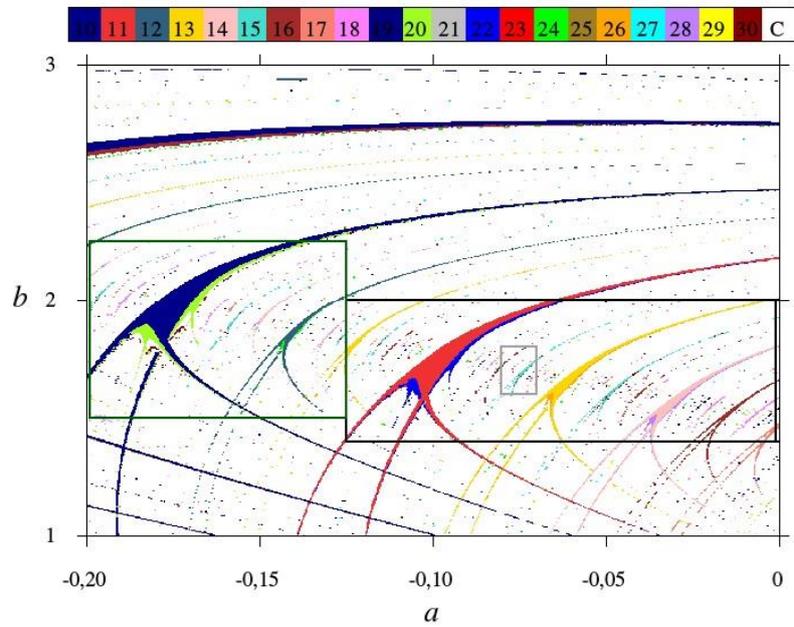


Figura 4.7: Diagrama isoperiódico da figura 4.4 (b).

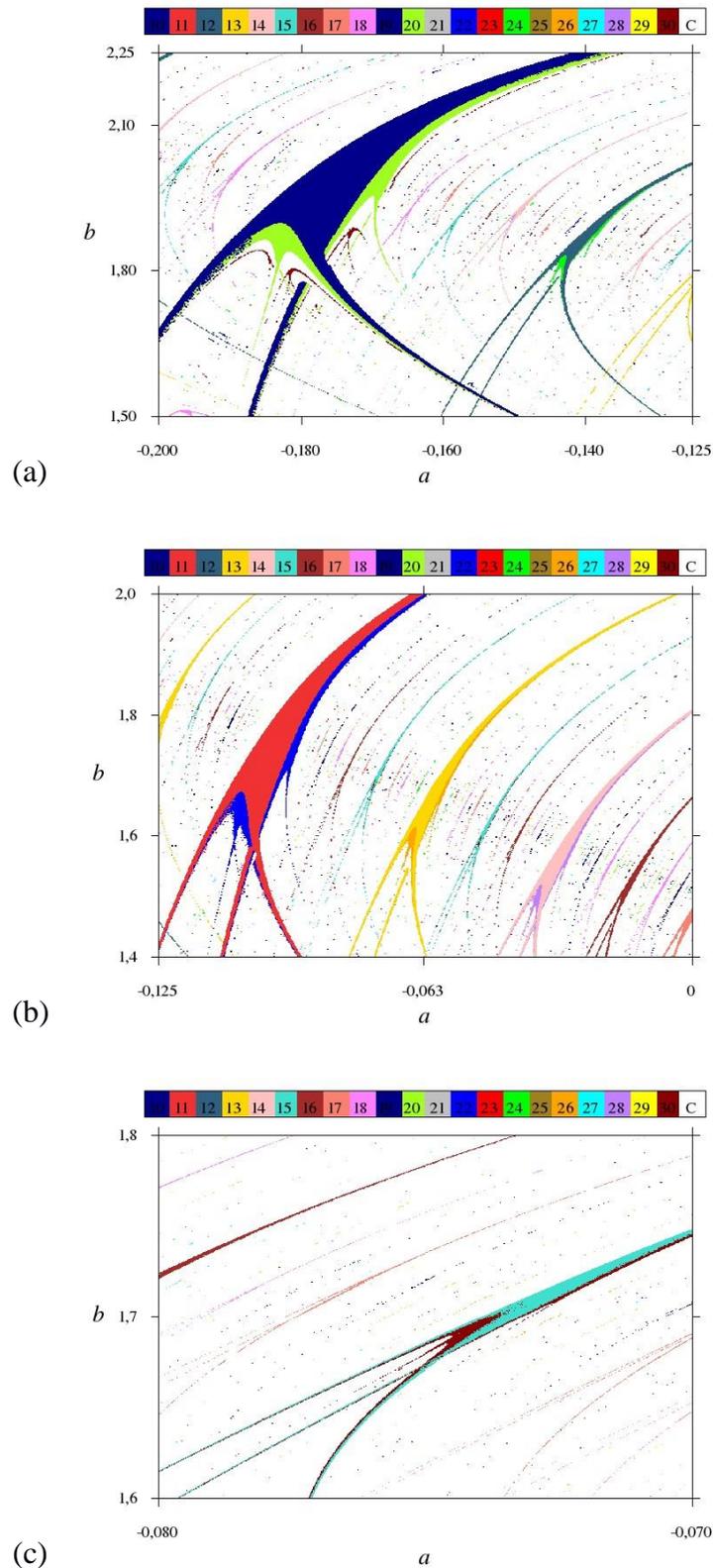


Figura 4.8: Diagramas isoperiódicos das estruturas de período 11, 12, 13, 14 e 15 presentes na figura 4.8 para os seguintes intervalos de a e b : (a) caixa verde com $-0,2 \leq a \leq -0,125$ e $1,5 \leq b \leq 2,25$; (b) caixa preta com $-0,125 \leq a \leq 0$ e $1,4 \leq b \leq 2$; (c) caixa cinza com $-0,08 \leq a \leq -0,07$ e $1,6 \leq b \leq 1,8$.

Por fim, para demonstrar como o sistema se comporta ao alterar os valores de suas condições iniciais foi construído bacias de atração considerando os pontos $(a, b) = (0,2; 3)$ e $(a, b) = (0,05; 1)$ da figura 4.4 (a). Os pontos foram escolhidos para que se tenha um ponto em uma região caótica, periódica. Na figura 4.9 são apresentadas as bacias de atrações e percebe-se que não há mudança no tipo de dinâmica do sistema, com exceção de regiões em que o sistema diverge.

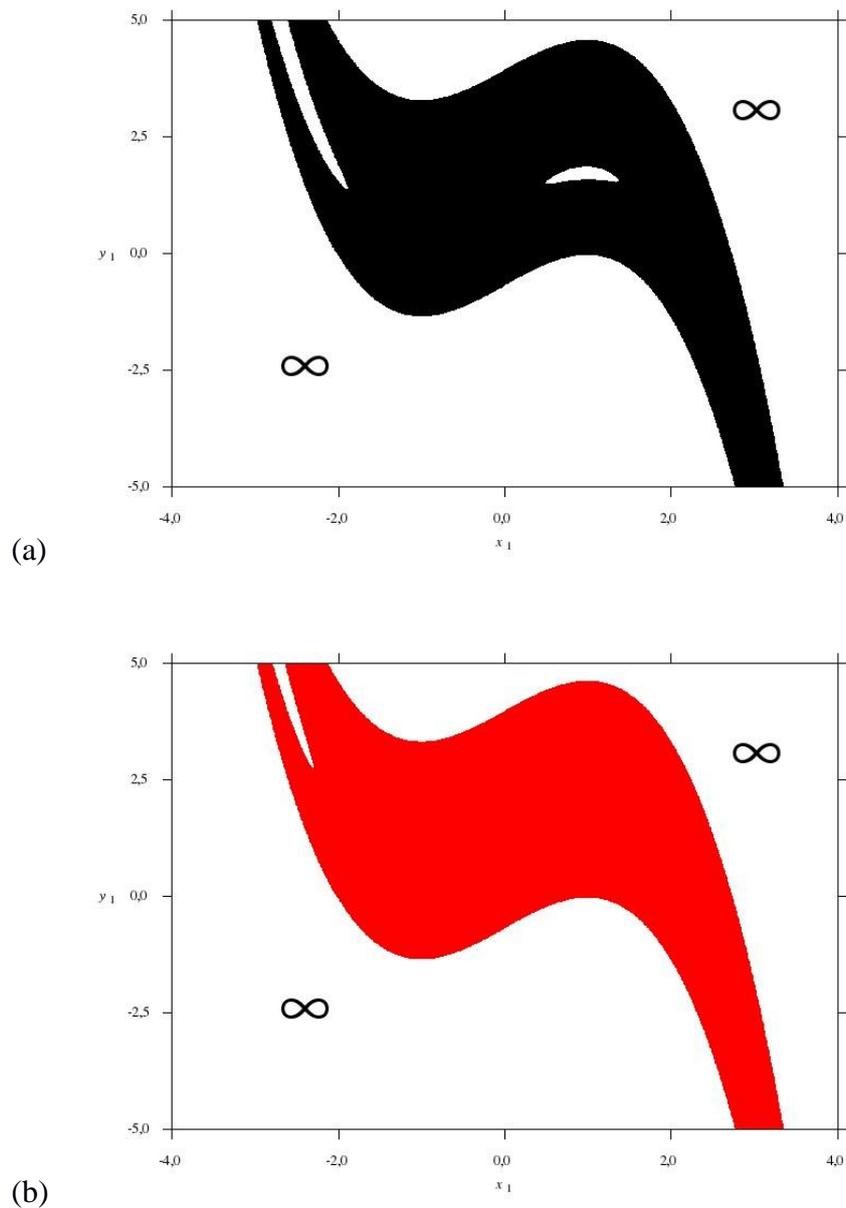


Figura 4.9: Bacia de atração dos pontos (a) $(0,05; 1,0)$ e (b) $(0,2; 3,0)$ no diagrama de Lyapunov $a \times b$. Preto (periódico), vermelho (caos) e branco (divergência).

4.1.1. Análise dos resultados do mapa generalizado forçado

Os resultados do mapa generalizado forçado foram obtidos considerando um forçamento periódico, ou seja, a frequência angular ω do forçamento é um racional. O valor utilizado é o mesmo em todas as simulações, $\omega = 0,1$. Para analisar as alterações da dinâmica do sistema foram utilizadas as mesmas configurações do mapa generalizado não forçado. Porém, agora há a uma terceira equação no sistema, portanto teremos três expoentes de Lyapunov. O valor da condição inicial θ_0 não foi alterado em nenhuma simulação e o valor utilizado foi $\theta_0 = 0,27$.

Na figura 4.10 foi variada a amplitude do forçamento periódico, ϵ , para a construção dos espaços de parâmetros. Nota-se que há pouca diferença do diagrama de Lyapunov da figura 4.4 (a) para a figura 4.10 (a), ou seja, há pouca mudança na dinâmica do sistema para um forçamento com uma amplitude de $\epsilon = 10^{-4}$. Para os valores de $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-2}$ há alterações visíveis na dinâmica (veja figura 4.10 (b)). Nota-se que algumas regiões periódicas se tornam caóticas e há um aumento da estrutura periódica do tipo camarão de período-10 observado na figura 4.8 (a), além do desaparecimento das outras estruturas periódicas tipo camarão vistas nas figuras 4.8 (b) e (c). Na figura 4.10 (d) foi considerada uma amplitude de forçamento $\epsilon = 10^{-1}$ e nesse caso há uma maior alteração na dinâmica comparada com os outros valores de amplitude.

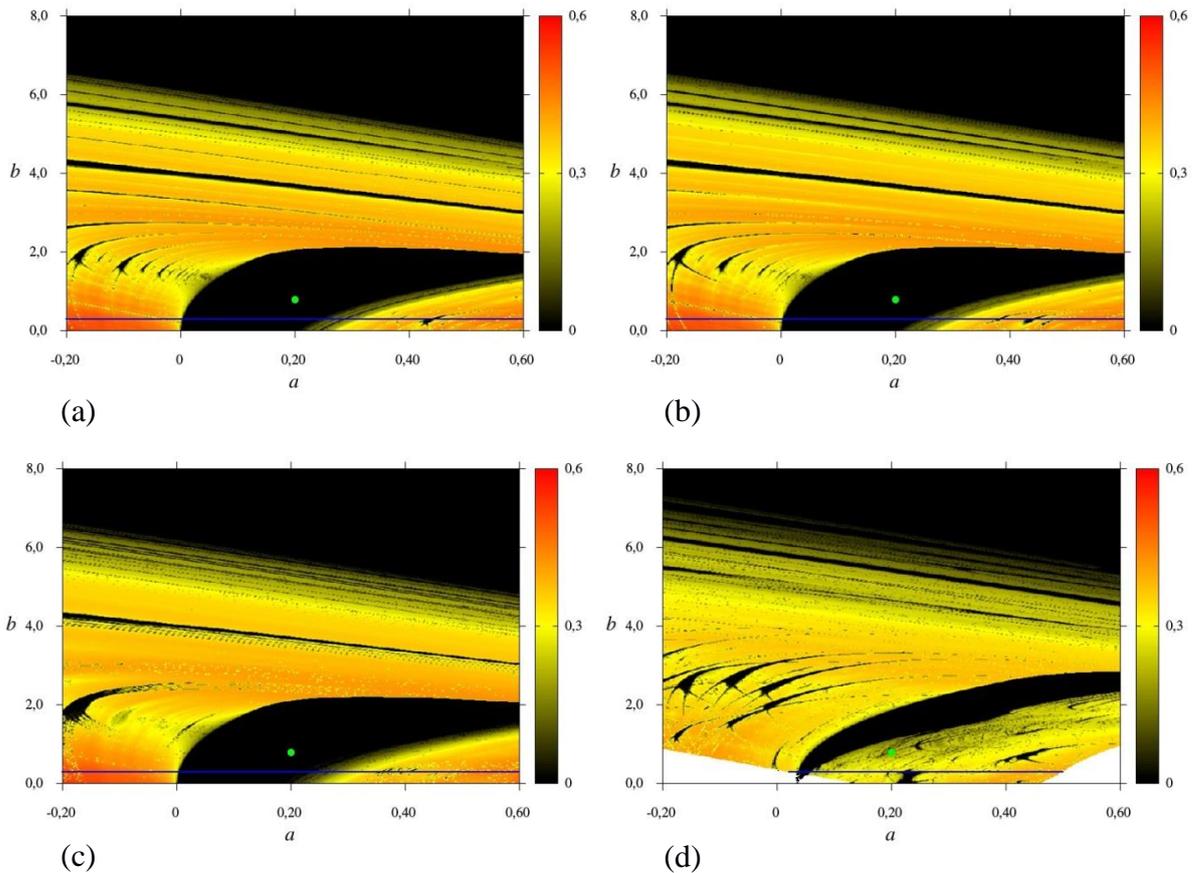


Figura 4.10: Diagrama de Lyapunov $a \times b$ do mapa generalizado forçado para $-0,2 \leq a \leq 0,6$ e $0 \leq b \leq 8$ e com os seguintes valores de amplitude forçamento: (a) $\epsilon = 10^{-4}$; (b) $\epsilon = 10^{-3}$; (c) $\epsilon = 10^{-2}$; (d) $\epsilon = 10^{-1}$.

Note que no mapa forçado, diferente do sistema original o menor valor do maior expoente de Lyapunov no diagrama de Lyapunov é *zero*. Isto condiz com a dinâmica do sistema sem forçamento, pois agora para o maior expoente com valor negativo teremos uma dinâmica de ponto fixo que não ocorria para o sistema não forçado. Para o maior expoente nulo, temos uma dinâmica periódica.

Na figura 4.11 é analisada a mudança de um atrator periódico do sistema de acordo com o valor da amplitude de forçamento. O atrator periódico escolhido é o evidenciado no diagrama de Lyapunov com o ponto verde $(a; b) = (0,2; 0,8)$ da figura 4.10. Percebe-se que para os valores de $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-2}$ não há alteração aparente na forma do atrator (veja Figura 4.11 (a), (b) e (c)). Na figura 4.11 (d) para $\epsilon = 10^{-1}$ há uma mudança do tipo do atrator, indo de um atrator periódico para um caótico.

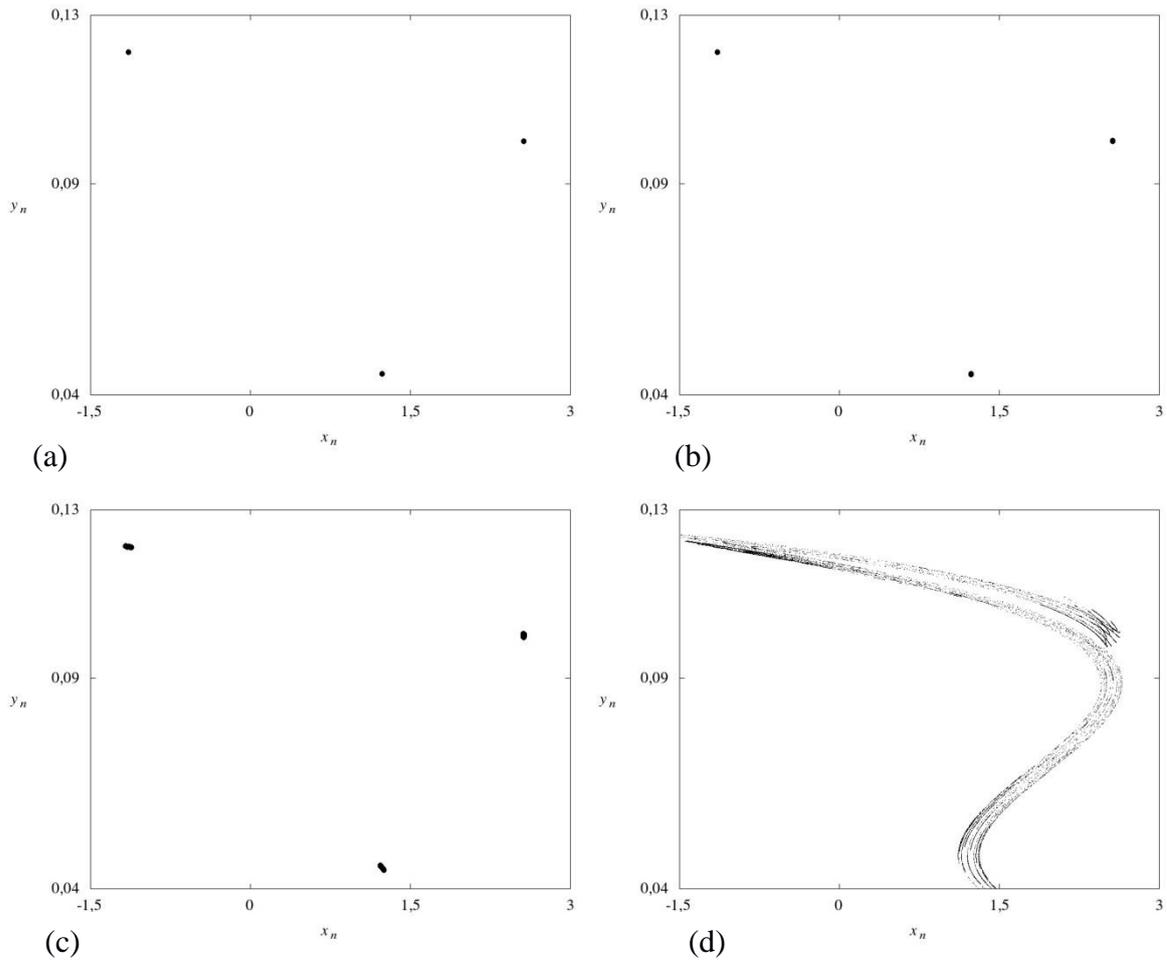
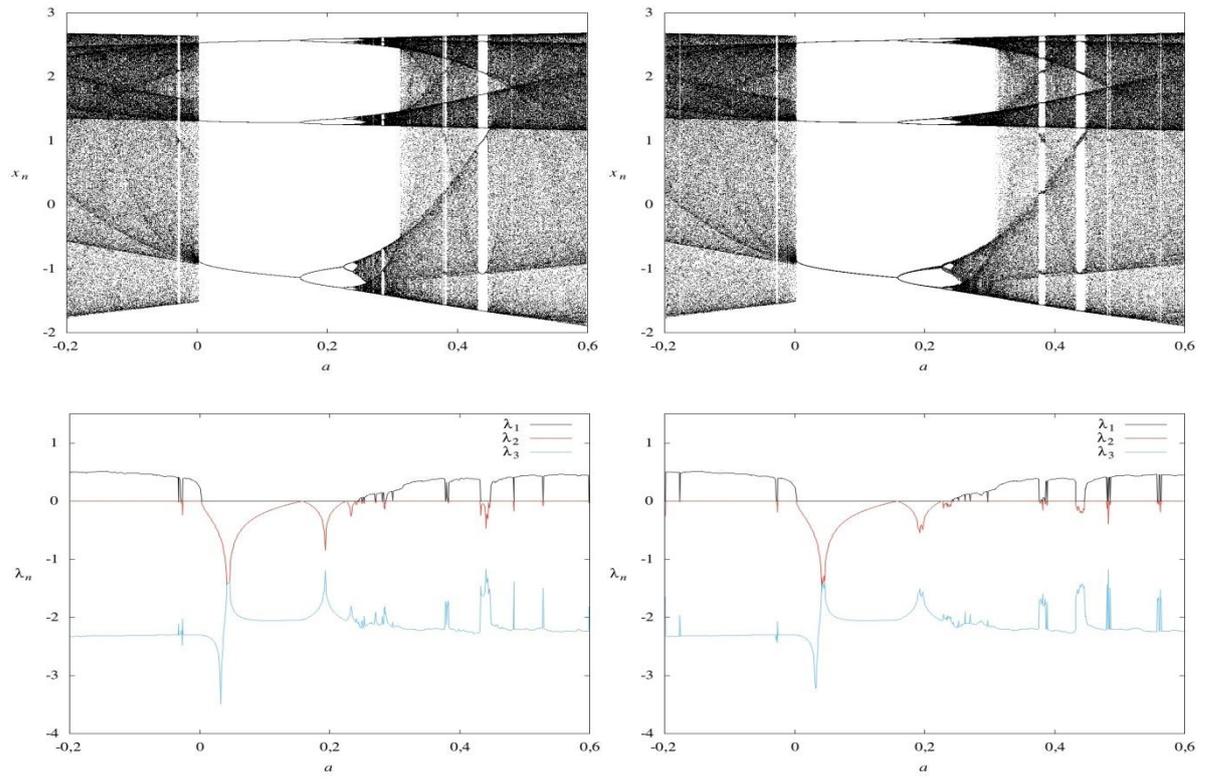


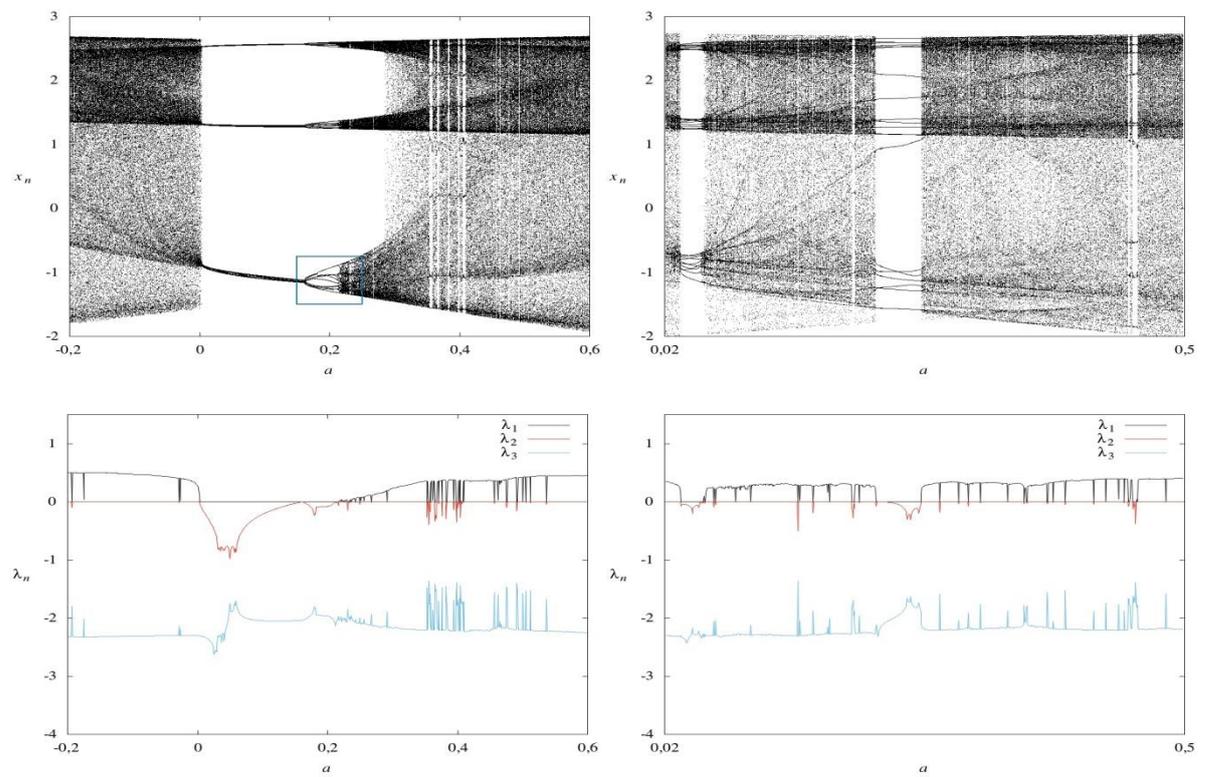
Figura 4.11: Atrator no plano $x \times y$ do sistema (2.6) com o par de parâmetros fixos em $a = 0,2$ e $b = 0,8$ e com os seguintes valores para os expoentes de Lyapunov e forçamento de amplitude: (a) $\epsilon = 10^{-4}$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \simeq -0,008$; $\lambda_3 \simeq -1,965$. (b) $\epsilon = 10^{-3}$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \simeq -0,008$; $\lambda_3 \simeq -1,965$. (c) $\epsilon = 10^{-2}$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 \simeq -0,009$; $\lambda_3 \simeq -1,960$ e (d) $\epsilon = 10^{-1}$; $\lambda_1 \simeq 0,152$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 \simeq -2,261$.

Na figura 4.12 utilizamos o valor de b fixado em $0,3$, que representa a reta azul no diagrama de Lyapunov da figura 4.10, para construir os diagramas de bifurcação em relação ao parâmetro a e a variável x . Abaixo de cada diagrama de bifurcação é apresentado o valor correspondente dos expoentes de Lyapunov para cada órbita no diagrama de bifurcação. Percebe-se no diagrama de bifurcação um pequeno aumento na espessura das linhas das regiões periódicas, principalmente nas janelas periódicas imersas no caos, ao aumentar o valor de $\epsilon = 10^{-4}$ para $\epsilon = 10^{-3}$. Para $\epsilon = 10^{-2}$ o aumento da espessura das linhas nas regiões periódicas continua e também há uma redução do intervalo de período 3 no eixo do parâmetro a . Por fim, para $\epsilon = 10^{-1}$ os valores de x_n divergem para valores $a \lesssim 0,02$ ou para $a \gtrsim 0,5$.



(a)

(b)



(c)

(d)

Figura 4.12: Diagramas de bifurcação com seus respectivos valores dos expoentes de Lyapunov em relação ao parâmetro a . (a) $\epsilon = 10^{-4}$; (b) $\epsilon = 10^{-3}$; (c) $\epsilon = 10^{-2}$; (d) $\epsilon = 10^{-1}$.

Outro comportamento que ocorre no sistema é a descontinuidade do diagrama de bifurcação em regiões que antes ocorriam bifurcações do tipo duplicação de período para o sistema não forçado. Para visualizar esta descontinuidade foi ampliada a figura 4.12 (c) na região da caixa azul e apresentada na figura 4.13.

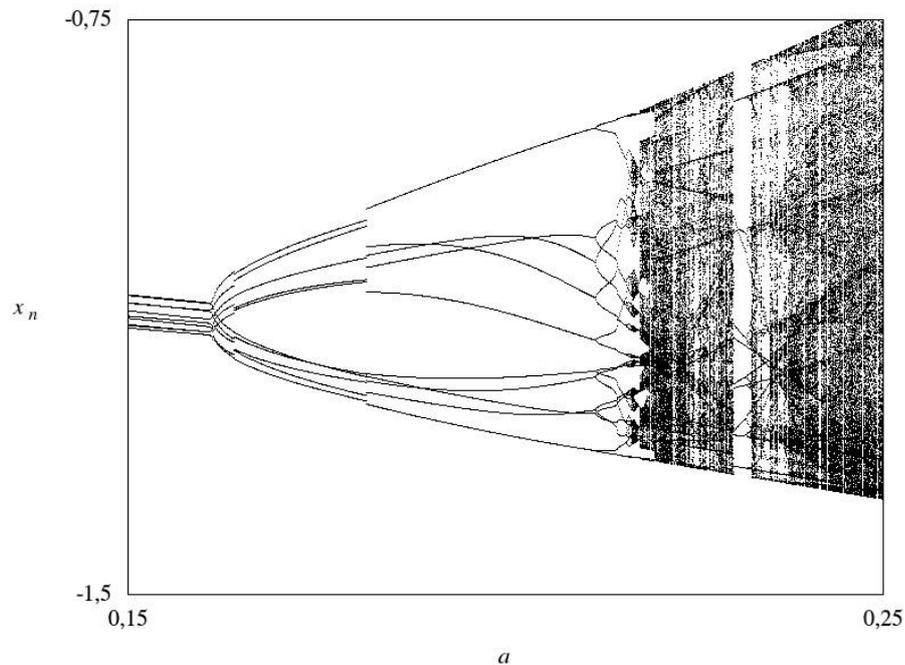


Figura 4.13: Diagrama de bifurcação da figura 4.12 (c) ampliado na região da caixa azul $0,15 \leq a \leq 0,25$ e $-1,5 \leq x_n \leq -0,75$.

Na figura 4.14 são apresentadas as bacias de atração no ponto dos atratores da figura 4.11. As bacias de atração foram construídas variando apenas os valores das condições iniciais x_0 e y_0 . A condição inicial θ_0 não foi variada nas simulações dado que no conjunto de equações (3.6) a variável θ_n não é alterada pelas variáveis x_n e y_n . Percebe-se que o sistema mantém o mesmo comportamento de não alterar o seu atrator em relação às condições iniciais x e y , mesmo alterando o valor de ϵ . Porém, agora a dinâmica altera de acordo com o valor de ϵ , como já evidenciado nos espaços de parâmetros da figura 4.10.

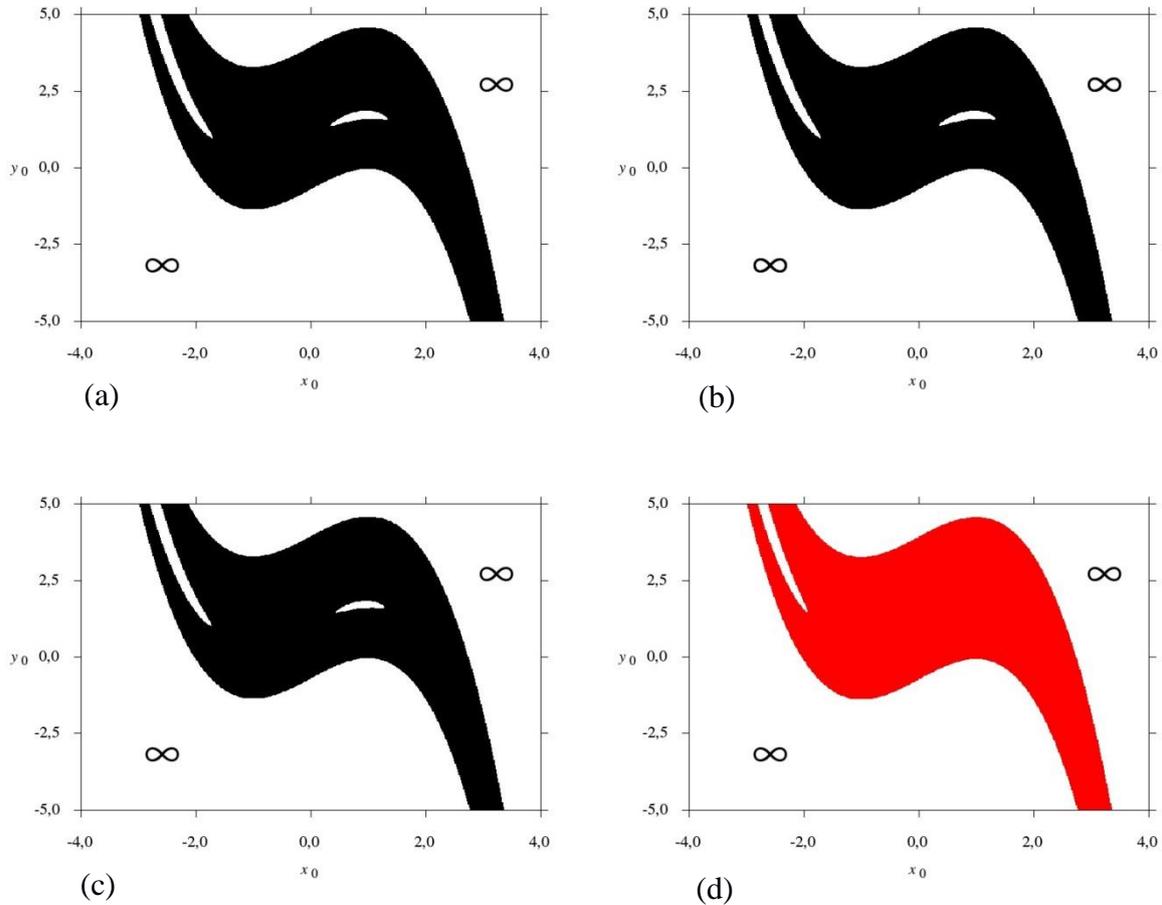


Figura 4.14: Bacias de atração do mapa generalizado com forçamento e com os valores: $(a; b) = (0,2; 0,8)$ e (a) $\epsilon = 10^{-4}$; (b) $\epsilon = 10^{-3}$; (c) $\epsilon = 10^{-2}$; (d) $\epsilon = 10^{-1}$. Preto (periódico), vermelho (caos) e branco (divergência).

4.2. Análise dos resultados do modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico

Para a análise do sistema (2.11) o estímulo I_{ext} foi considerado como um parâmetro que varia em função de um parâmetro ω e com o tempo na forma de $I_{ext} = 0,1\cos(\omega t)$. Esta escolha se deu tomando como base a referência [18]. Com isso, os parâmetros que foram variados nas simulações numéricas são ω e E_{ext} . Nas simulações não foram alterados os valores das condições iniciais, com exceção nas simulações da bacia de atração, e os valores adotados foram $x(0) = 0,2$, $y(0) = 0,01$ e $E(0) = 0,3$.

Na figura 4.15 é apresentado o diagrama de Lyapunov $\omega \times E_{ext}$. No eixo E_{ext} do diagrama de Lyapunov da figura 4.15 (a) é possível notar uma simetria para os valores do maior expoente de Lyapunov. Os pontos marcados no diagrama de Lyapunov da figura 4.15 (b) são os pontos utilizados para os atratores representados na figura 4.16, com exceção do

ponto em branco que é um ponto fixo no espaço de fases. As retas são as regiões utilizadas para a construção do diagrama de bifurcação na figura 4.17. A escolha dos pontos se deu para que fosse contemplado cada tipo de atrator presente no sistema.

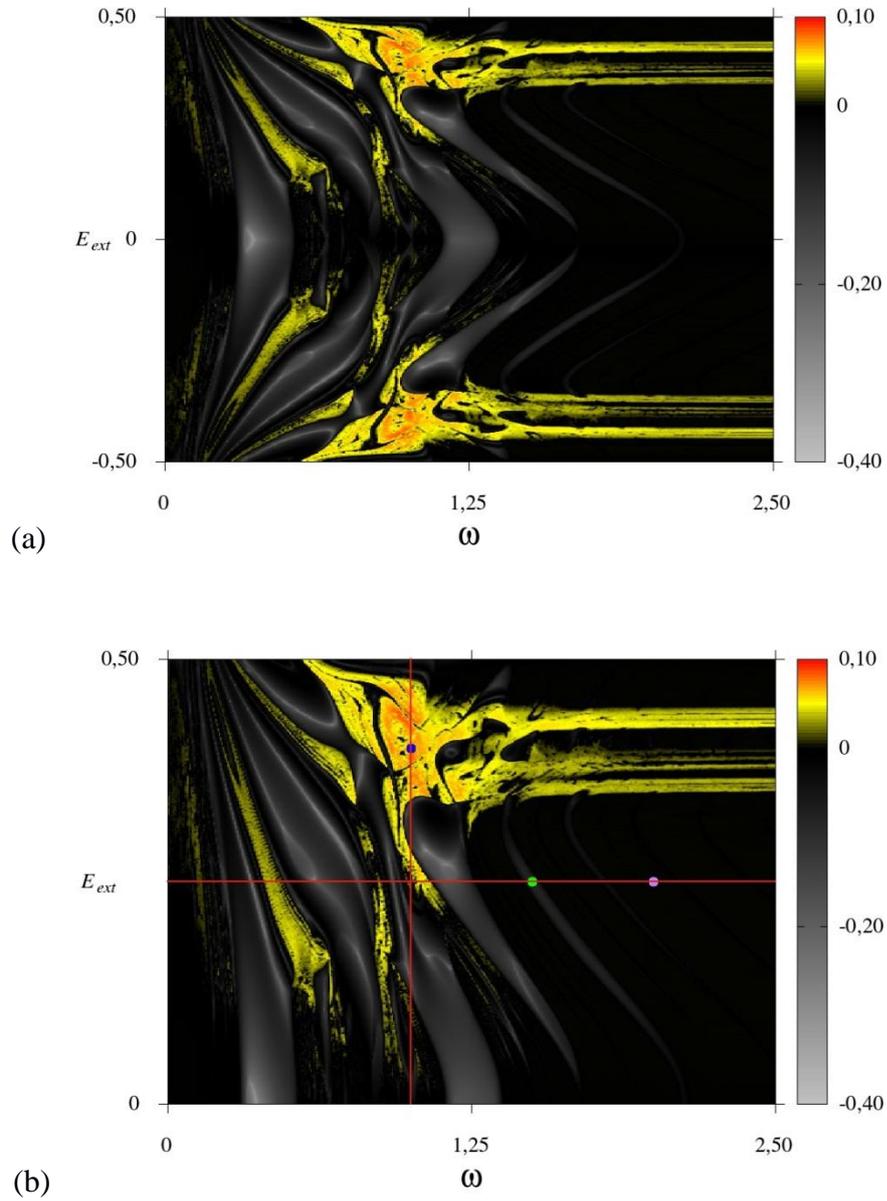
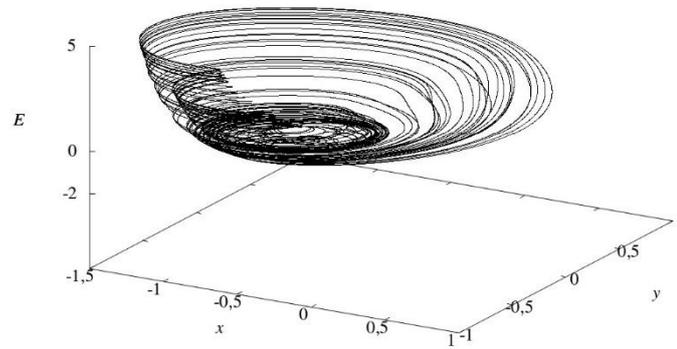
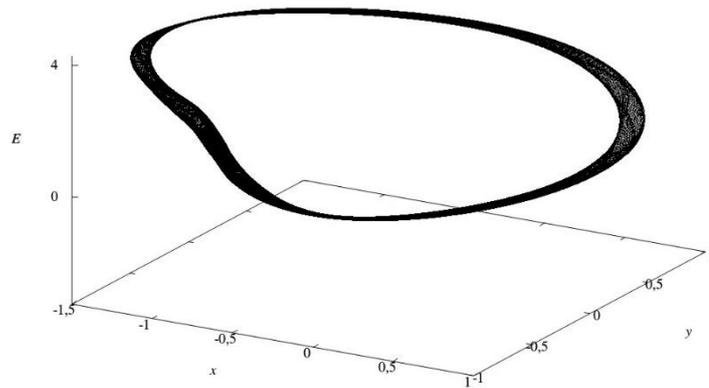


Figura 4.15: Espaços de parâmetros $\omega \times E_{ext}$ do sistema (2.11) para os seguintes intervalos:

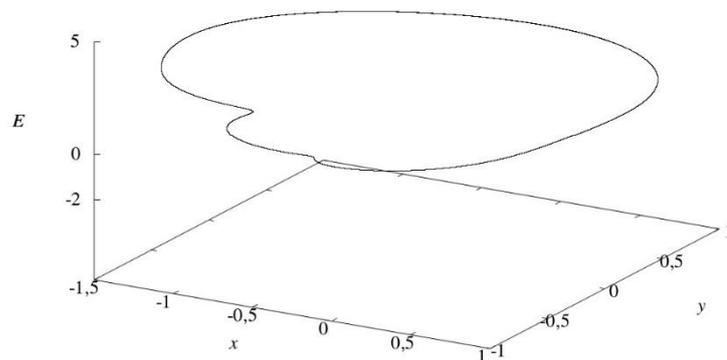
(a) $0 \leq \omega \leq 2,5$; $-0,5 \leq E_{ext} \leq 0,5$; (b) $0 \leq \omega \leq 2,5$; $0 \leq E_{ext} \leq 2,5$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.16: Atratores do tipo: (a) caótico $(\omega; E_{ext}) = (1,0; 0,4)$; (b) Torus $(\omega; E_{ext}) = (2,0; 0,25)$; (c) periódico $(\omega; E_{ext}) = (1,5; 0,25)$.

Considerando as duas retas no diagrama de Lyapunov da figura 4.15 (b) e observando os valores dos máximos locais da variável x , obtêm-se os diagramas de bifurcação apresentados na figura 4.17. Na figura 4.17 (a) o diagrama de bifurcação $\omega \times x$ foi escolhido de forma que se pudessem notar as janelas periódicas que correspondem às estruturas periódicas formadas no diagrama de Lyapunov. Na figura 4.17 (b) o valor de ω foi fixado de forma que o diagrama de bifurcação passe pela região caótica da parte superior do diagrama de Lyapunov na figura 4.15 (b).

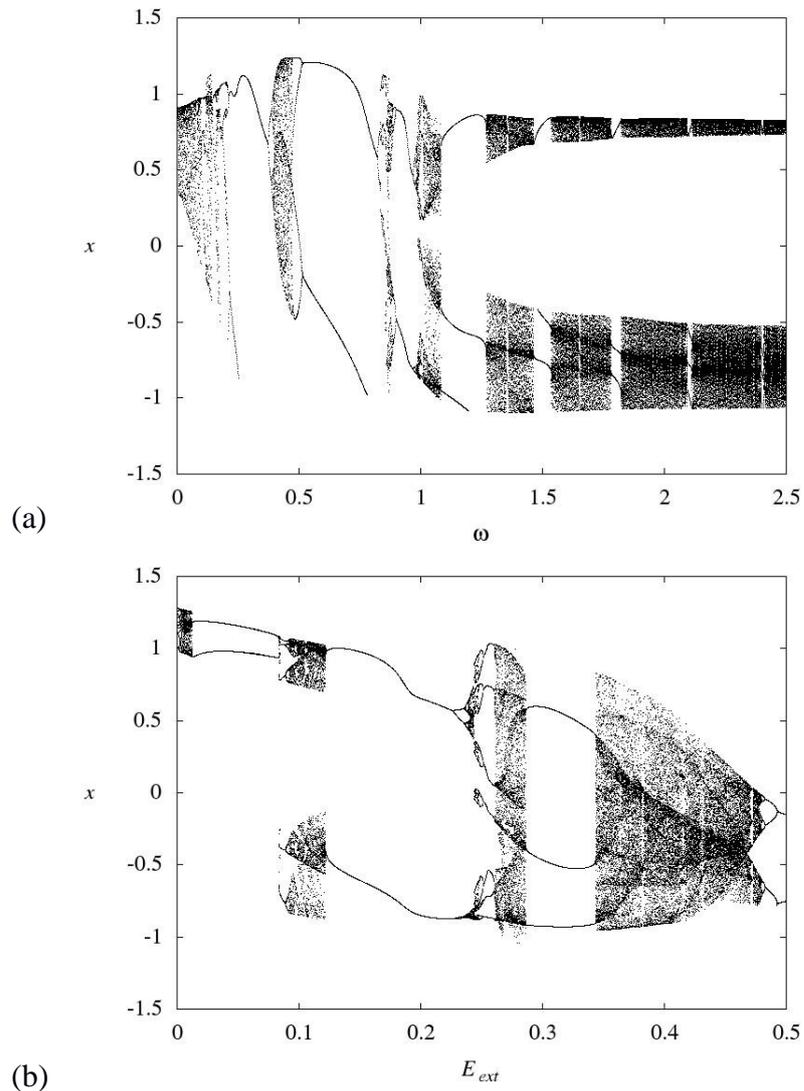


Figura 4.17: (a) Diagrama de bifurcação $\omega \times x$ com $E_{ext} = 0,25$. (b) Diagrama de bifurcação $E_{ext} \times x$ com $\omega = 1,0$.

A fim de visualizar o período das estruturas periódicas formadas no diagrama de Lyapunov, temos o diagrama isoperiódico no mesmo intervalo de parâmetros da figura 4.15 (b) na figura 4.18. Percebe-se que as estruturas periódicas formadas no intervalo

aparentemente não possuem uma regra de adição de período de uma estrutura para outra. Além disso, ao longo de uma estrutura o seu período reduz com o decréscimo do valor de E_{ext} .

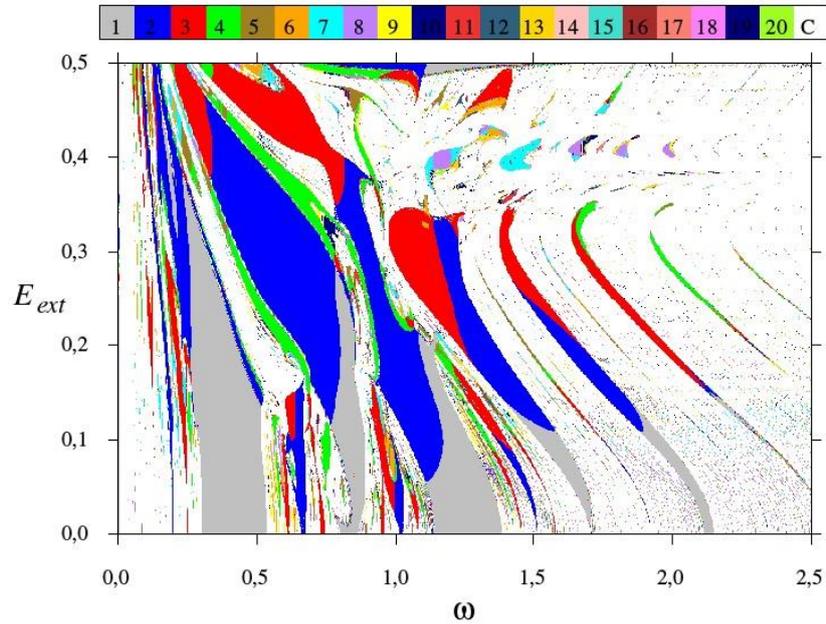


Figura 4.18: Diagrama isoperiódico $\omega \times E_{ext}$ do sistema (2.11) no intervalo de $0 \leq \omega \leq 2,5$ e $0 \leq E_{ext} \leq 0,5$.

Ao comparar as figuras 4.15 e 4.18 percebe-se que de acordo com o diagrama de Lyapunov (figura 4.15) ocorrerem regiões brancas dentro das estruturas periódicas de cor preta, sugerindo que os atratores seriam pontos de equilíbrios nessa parte interna. Entretanto, pela figura 4.18, as regiões internas das estruturas sugerem atratores de ciclos periódicos. Para a análise dessa inconsistência entra as figuras foram construídos alguns atratores para as regiões em que o maior expoente de Lyapunov é negativo. Como exemplo tem-se a figura 4.19. Pode-se notar que o atrator é periódico ou ciclo limite, o que não condiz com os valores do seu expoente de Lyapunov numérico. Para determinar o expoente de Lyapunov na figura 4.19 o modelo foi iterado 10^6 vezes.

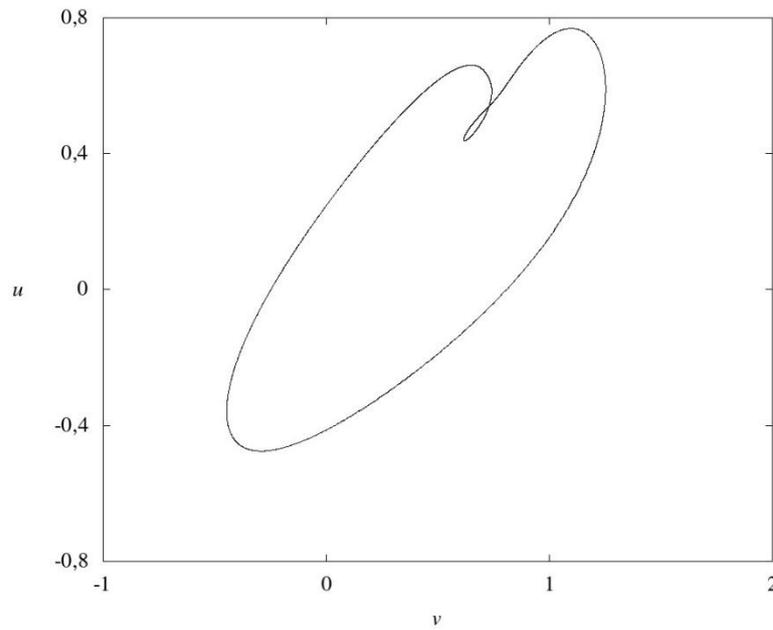


Figura 4.19: Um atrator do modelo com campo elétrico com $\omega \simeq 0,140$ e $E_{ext} \simeq -0,436$. Os valores dos expoentes de Lyapunov do atrator são $\lambda_1 \simeq -0,119$, $\lambda_2 \simeq -0,122$ e $\lambda_3 \simeq -0,421$.

Logo, pode-se concluir uma limitação do método numérico utilizado para determinar o espectro dos expoentes de Lyapunov de alguns atratores deste sistema. Além do atrator apresentado acima, também foi testado para outros atratores com o maior expoente de Lyapunov negativo e se repetiu a forma dos atratores, ou seja, foram obtidos novamente atratores periódicos com o maior expoente de Lyapunov negativo.

Por fim, na figura 4.20 são apresentadas as bacias de atração do atrator na figura 4.16 (a). Da mesma forma que no mapa generalizado, percebe-se que o sistema não apresenta alteração no tipo de atrator ao variar apenas as condições iniciais, com exceção das regiões em que o sistema diverge. A escolha do intervalo das condições iniciais $x(0)$, $y(0)$ e $E(0)$ foi adotada de forma que fosse possível ver para quais valores o sistema começa a divergir.

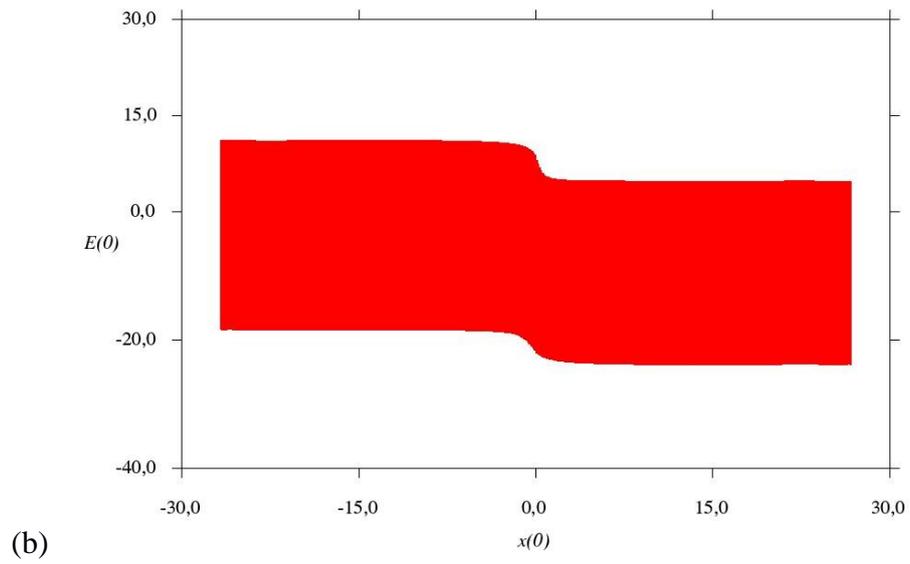
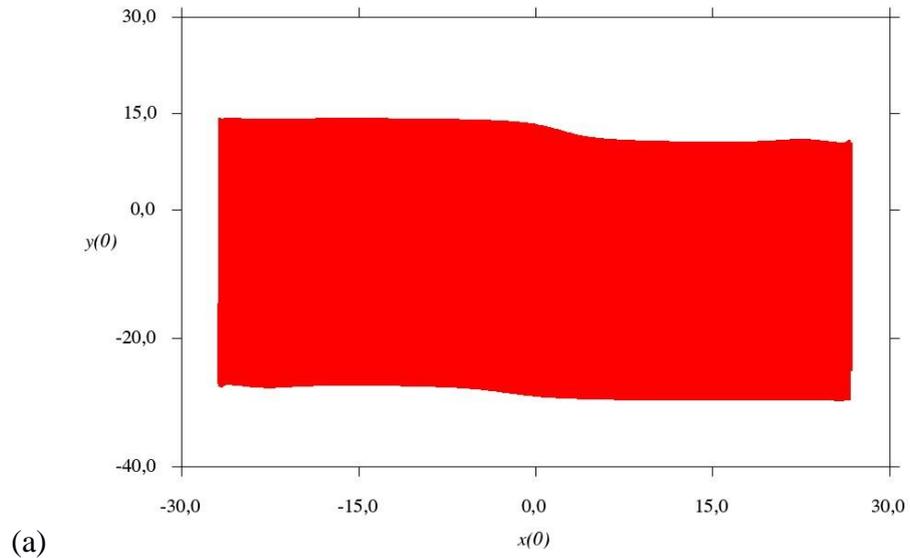


Figura 4.20: Bacias de atração do atrator na figura 4.17 (a) e com os seguintes pares de condições iniciais: (a) $x(0) \times y(0)$; (b) $x(0) \times E(0)$.

CONCLUSÃO

Nesta dissertação foram estudados dois modelos obtidos do modelo de neurônio de FitzHugh-Nagumo. Além disso, um dos modelos foi analisado sob efeito de um forçamento periódico. Os modelos descrevem a dinâmica do potencial elétrico na membrana do neurônio, que tem como função a propagação dos impulsos nervosos. Os modelos estudados são divididos em mapa e fluxo. No caso do mapa, foi analisado um mapa generalizado com e sem forçamento, que apresenta o comportamento de *spiking* e também dinâmicas caóticas [14]; no caso do fluxo, foi explorado o modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico. O foco desses estudos foi caracterizar as possíveis dinâmicas do sistema, ao variar os parâmetros e as condições iniciais.

Para análise das dinâmicas foram construídos espaços de parâmetros, diagramas de bifurcação e diagramas isoperiódicos, os quais foram apresentados no capítulo 4.

No mapa generalizado, via diagrama de Lyapunov e diagramas isoperiódicos observou-se estruturas periódicas do tipo camarão imersas no caos. Além disso, utilizando diagrama de bifurcação e o diagrama isoperiódico, foi visualizado bifurcações do tipo duplicação de período e crise. Utilizando a bacia de atração foi possível perceber que o sistema não apresenta uma alteração no seu tipo de atrator ao variar as condições iniciais, excluindo os casos que os valores de x_n e y_n divergem.

Para o mapa generalizado forçado evidenciou-se as mudanças no diagrama de Lyapunov, diagramas de bifurcação e atratores de acordo com a amplitude de forçamento ϵ . O tipo de forçamento considerado nas simulações foi um forçamento periódico, dado que a frequência angular do forçamento era um número racional. Assim como no mapa generalizado sem forçamento, foi observado que além de divergir o sistema não altera o atrator da órbita ao variar as condições iniciais.

Por fim, para o modelo de FitzHugh-Nagumo com campo elétrico, foi demonstrado um atrator caótico, um ciclo limite e um torus para três pontos do diagrama de Lyapunov $\omega \times E_{ext}$. Também foram apresentados dois diagramas de bifurcações, um para o parâmetro ω e outro para o parâmetro E_{ext} . Com a bacia de atração foi obtido a mesma observação dos mapas.

Como possíveis propostas de trabalhos futuros, para o caso do mapa generalizado com e sem forçamento, pode-se investigar a dinâmica para as combinações de $a \times I_{ext}$ e $b \times I_{ext}$, como também, procurar outros valores para os parâmetros k_i 's em que se possa

reproduzir dinâmicas semelhantes a potenciais de ação. Para o modelo FitzHugh-Nagumo tem-se a possibilidade investigar as dinâmicas variando o parâmetro r ou considerando um campo elétrico externo em função do tempo, $E_{ext}(t)$.

REFERÊNCIAS

- [1] Ferrari, Elenice A. de Moraes et al. Plasticidade neural: relações com o comportamento e abordagens experimentais. *Psicologia: Teoria e Pesquisa* [online]. 2001, v. 17, n. 2 [Acessado 14 Julho 2021], pp. 187-194. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S0102-37722001000200011>>. 29 Abr 2002.
- [2] A. Peters, S. Palay, and H. Webster. *The Fine Structure of the Nervous System*. Oxford, New York, 1991.
- [3] Izhikevich, E. Solving the distal reward problem through linkage of stdp and dopamine signaling. *Cereb. Cortex* 17(10), 2443–2452 (2007).
- [4] Rulkov, N. Regularization of synchronized chaotic bursts. *Physical Review Letters* 86(1), 183–186 (2001).
- [5] H. Korn and P. Faure. Is there chaos in the brain? Experimental evidence and related models. *C.R.Biologies*, vol. 326, pp. 787–840, 2003.
- [6] LENT, R. Cem bilhões de neurônios: conceitos fundamentais de neurociência. In: *Cem bilhões de neurônios: conceitos fundamentais de neurociência*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [7] NEURÔNIO: o que é, tipos, função, estrutura. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/biologia/neuronios.htm>. Acesso em: 06 jul. 2021.
- [8] A. C. Guyton and J. E. Hall. *Tratado de Fisiologia Médica*. Elsevier, Rio de Janeiro, 2006.
- [9] G. J. Tortora. *Corpo Humano-Fundamentos de Anatomia e Fisiologia*. Artmed Editora, Porto Alegre, 2000.
- [10] A. Hodgkin and A. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*, vol. 117, pp. 500–544, 1952.
- [11] R. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of the nerve membrane. *Biophysical Journal*, vol. 1, pp. 445–465, 1961.
- [12] R. FitzHugh. Mathematical models of excitation and propagation in nerve,” *Biological Engineering*. vol. 43, pp. 867–896, 1969.

- [13] J. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of the IRE*, vol. 50, pp. 2061–2070, 1962.
- [14] Zhan, F., Liu, S. A Hénon-like map inspired by the generalized discrete-time FitzHugh–Nagumo model. *Nonlinear Dynamics* **97**, 2675–2691 (2019).
- [15] U. Feudel, S. Kuznetsov, A. Pikovsky. *Strange Nonchaotic Attractors*. World Scientific, New Jersey, 2006.
- [16] Ma, J., Zhang, G., Hayat, T., Ren, G. Model electrical activity of neuron under electric field. *Nonlinear Dynamics*. 95(2), 1585–1598 (2019).
- [17] Ullner, E., Zaikin, A., Garcia-Ojalvo, J., et al. Vibrational resonance and vibrational propagation in excitable systems. *Physics Letter A* 312, 348–354 (2003).
- [18] Yan, B., Panahi, S., He, S. et al. Further dynamical analysis of modified FitzHugh–Nagumo model under the electric field. *Nonlinear Dynamics* **101**, 521–529 (2020).
- [19] KUSNETSOV, Y. A. *Elements of applied bifurcation theory*. Nova York: Springer-Verlag, 1998.
- [20] OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. Nova York: Cambridge University Press, 2000.
- [21] ALVES MONTEIRO, L. H. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2011.
- [22] Schueler, Gerald J. The Unpredictability of Complex Systems. *Journal of the Washington Academy of Sciences* 84, no. 1 (1996)
- [23] J. G. Freire and J. A. Gallas. Stern-Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer-van der Pol and the FitzHugh-Nagumo models of excitable systems. *Physics Letters A*, vol. 375, pp. 1097–1103, 2011.
- [24] L. F. C. Alberto. *Caracterização e estimativas da área de atração de sistemas dinâmicos não lineares*. Tese de livre docência, USP, São Carlos, 2006.
- [25] Hénon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*. 50, 69–77 (1976).
- [26] FAÇANHA, W.; OLDMAN, B.; GLASS, L. Bifurcation structures in two-dimensional maps: the endoskeletons of shrimps. *Physics Letters A* v. 377, p. 1264, 2013.

[27] MEDEIROS, E. S. et al. Torsion-adding and asymptotic winding number for periodic window sequences. *Physics Letters A*, v. 377, p. 628, 2013.

[28] VITOLO, R.; GLENDINNING, P.; GALLAS, J. A. C. Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows. *Physical Review E*, v. 84, p. 016216, 2011.

[29] GALLAS, J. A. C. Dissecting shrimps: results for some onedimensional physical models. *Physica A*, v. 202, p. 196, 1994.