UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENSINO EM CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

ANDRESSA CANEPPELE SCHLICKMANN

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

JOINVILLE

2020

ANDRESSA CANEPPELE SCHLICKMANN

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do Centro de Ciências Tecnológicas – CCT da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias.
Orientador: Rogério de Aguiar

JOINVILLE

2020

Ficha catalográfica elaborada pelo programa de geração automática da
Biblioteca Setorial do CCT/UDESC,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Schlickmann, Andressa Caneppele
O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS / Andressa Caneppele Schlickmann. -- 2021.
116 p.

Orientador: Rogério de Aguiar
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, Joinville, 2021.

1. Geometria Plana. 2. Modelo de van Hiele. 3. Apreensões em Geometria. 4. Ensino de Geometria. I. Aguiar, Rogério de . II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias. III. Título.

ANDRESSA CANEPPELE SCHLICKMANN

O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA NO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias do Centro de Ciências Tecnológicas – CCT da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC (Orientador/Presidente)

Membros: Profa. Dra. Regina Helena Munhoz
CCT/UDESC

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti

UFSC

Joinville, SC, 10 de dezembro de 2020

Dedico este trabalho aos meus pais e ao meu marido, que muito me apoiaram nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus por ter me possibilitado estar firme durante toda essa trajetória, caminho esse que irá me levar á realização dos meus sonhos!

Ao meu esposo Fernando Schlickmann, por todo amor, carinho e paciência que teve durante todas as horas difíceis, não apenas durante este curso, mas, também, por todos os anos que estamos juntos. Ele, sem margem de dúvida, é a maior motivador que eu tenho, incentivando-me sempre em todos os momentos da minha vida.

Mãe e Pai, a vocês eu devo a vida e tudo que conquistei até hoje, sem vocês nada disso seria possível. Obrigado pelo apoio, carinho e compreensão.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério de Aguiar, por ter acreditado neste projeto, aceitado e me orientado durante essa caminhada, bem como, pela paciência nas orientações e incentivo para que essa Dissertação fosse concluída. E a todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta Dissertação.

A professora Elisandra, que auxiliou na construção dos sólidos geométricos.

Aos diretores e professores das escolas que, gentilmente, aceitaram participar desta pesquisa, auxiliando no que fosse necessário.

Aos estudantes que participaram das aplicações.

Aos colegas de mestrado, em especial ao Adriano Moser, por toda a ajuda e sugestões dadas.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota” (Madre Teresa de Calcutá).

RESUMO

O conteúdo de Geometria está presente em todos os anos do Ensino Fundamental e Médio e é utilizado em várias aplicações no cotidiano e na área de ciências exatas. Com o intuito de contribuir nessa temática a presente dissertação, realizada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias (PPGEMCT), teve por objetivo geral desenvolver e aplicar um caderno de atividades para o ensino de geometria no sexto ano do ensino fundamental a partir da utilização de sólidos geométricos com aporte da Teoria de Van Hiele. Esta pesquisa viabilizou a produção de um caderno de atividades que servirá de suporte para aprendizagem de Geometria no sexto ano do Ensino Fundamental. Com a finalidade de atingir este objetivo geral, se fez necessário cumprir algumas etapas, como a aplicação de um questionário prévio utilizando a teoria de van Hiele, explanação do conteúdo de Geometria partindo da explicação de sólidos Geométricos e para finalizar, a aplicação de atividades durante as aulas para analisar a compreensão do educando em relação ao conteúdo abordado. Como referencial teórico principal para analisar o nível de conhecimento geométrico utilizou-se o modelo de van Hiele, que também servirá para elaborar atividades geométricas para que qualquer professor possa aplicar em suas aulas. Como referencial teórico foi usado a teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval para a realização das análises das apreensões em geometria nas resoluções das atividades feitas pelos alunos.

Palavras-chave: Geometria Plana. Modelo de van Hiele. Apreensões em Geometria. Ensino de Geometria

ABSTRACT

The geometry content is present in all elementary and high school grades and is used in various applications in everyday life and in the exact sciences area. In order to contribute to this theme, the present dissertation, carried out together with the Postgraduate Program in Teaching of Sciences, Mathematics and Technologies (PPGEMCT), had as the general objective to develop and apply a book of activities for the teaching of geometry in the sixth year of elementary school based on the use of geometric solids based on van Hiele's Theory. This research enabled the production of an activity notebook that will serve as a support for learning Geometry in the sixth grade of Elementary School. To achieve this general objective, it was necessary to complete some steps, such as the application of a previous questionnaire using the theory of van Hiele, explanation of the Geometry content, starting from the explanation of Geometric solids and, finally, the application of activities during the classes to analyze the understanding of the student in relation to the study addressed. As the main theoretical framework for analyzing the level of geometric knowledge, the van Hiele model was used, which will also serve to develop geometric activities for any teacher to apply in their classes. As a theoretical framework, Raymond Duval's theory of Semiotic Representation Records was used to carry out the analysis of apprehensions in geometry in the resolution of activities carried out by students.

Key words: Flat Geometry. Van Hiele's model. Apprehensions in geometry. Teaching of geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Blocos de modelos Classificáveis A 31

Figura 2 - Blocos de modelos Classificáveis B. 31

Figura 3 - Classificação das unidades figurais elementares 41

Figura 4 - Apreensões e olhares em Geometria 43

Figura 5 - Modificação da dimensão 3 para a dimensão 2. 67

Figura 6 - Resposta do Aluno 39 68

Figura 7 - Resposta do Aluno 47 69

Figura 8 - Resposta do Aluno 49 70

Figura 9 - Resposta do Aluno 55 70

Figura 10 - Resposta do Aluno 54 71

Figura 11 - Resposta do Aluno 78 85

Figura 12 - Resposta do Aluno 23 85

Figura 13 - Resposta do Aluno 39 85

Figura 14 - Resposta do Aluno 78 91

Figura 15 - Resposta do Aluno 16 92

Figura 16 - Resposta do Aluno 47 93

Figura 17 - Resposta do Aluno 41 93

Figura 18 - Resposta do Aluno 39 94

Figura 19 - Resposta do Aluno 52 94

Figura 20 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 01 de acordo com o teste do nível de van Hiele. 97

Figura 21 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 02 e acordo com o teste do nível de van Hiele. 98

Figura 22 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 03 e acordo com o teste do nível de van Hiele. 98

Figura 23 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 04 e acordo com o teste do nível de van Hiele. 99

Figura 24 - Sólidos Geométricos 103

Figura 25 - Utilização dos Sólidos Geométricos nas Turmas 1 e 2 104

Figura 26 - Utilização dos Sólidos Geométricos nas Turmas 3 e 4 104

Figura 27 - Introdução as retas paralelas e concorrentes 105

Figura 28 - Atividade de van Hiele 1 nas Turmas 1 e 2 105

Figura 29 - Atividade de van Hiele 1 nas Turmas 3 e 4 106

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Entendimento do enunciado 65

Quadro 2 – Acertos e erros referentes a Questão 1 66

Quadro 3 – Característica obtidas nas respostas... 68

Quadro 4 – Diferentes representações semióticas para “retas paralelas”. 77

Quadro 5 – Níveis de compreensão referente a Questão 5... 78

Quadro 6 – Respostas obtidas na Questão 8.. 83

Quadro 7 – Respostas obtidas na Questão 9.. 84

Quadro 8 – Respostas obtidas na Questão 10.. 86

Quadro 9 – Respostas obtidas na Questão 13... 91

Quadro 10 – Respostas obtidas na Questão 14.. 93

Quadro 11 – Legenda de identificação de acertos e erros referentes ao questionário aplicado97

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Idades os alunos das Turmas 1 e 2 46

Gráfico 2 – Idades dos alunos das Turmas 3 e 4 46

Gráfico 3 – Respostas da Questão 1 65

Gráfico 4 – Respostas da Questão 2 72

Gráfico 5 – Respostas obtidas na Questão 4 76

Gráfico 6 – Respostas obtidas na Questão 5. 78

Gráfico 7 – Respostas obtidas na Questão 6 80

Gráfico 8 – Respostas obtidas na Questão 7 82

Gráfico 9 – Respostas obtidas na Questão 11 88

Gráfico 10 – Respostas obtidas na Questão 15 95

LISTA DAS ABREVIAÇÕES E SIGLA

PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17

2 REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA 22

2.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL 23

2.2 GEOMETRIA NAS ESCOLAS 25

3 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR 27

4 MODELO DE VAN HIELE 29

4.1 PROPRIEDADES DA TEORIA 32

4.2 REPERCUSSÕES DO MODELO DE VAN HIELE PARA A SALA DE AULA 34

5 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA 36

5.1 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA 40

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS 44

6.1 CARÁTER GERAL DA PESQUISA 44

6.2 PERFIL DOS PARTICIPANTES 45

6.3 PROCEDIMENTOS GERAIS 47

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS 62

7.1 QUESTÕES DO MODELO DE VAN HIELE SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL 62

7.1.1 Questões do primeiro nível 64

7.1.2 Questões do segundo nível 79

7.1.3 Questões do terceiro nível 87

7.2 IDENTIFICANDO OS NÍVEIS DE VAN HIELE 96

7.3 NÍVEIS DE APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA 99

7.4 CONTEXTO DA PRÁTICA... 101

7.5 DESCRIÇÃO DA PRÁTICA 102

8 PRODUTO EDUCACIONAL: APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO.............. 107

9 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS... 108

REFERÊNCIAS 109

APÊNDICES.. 114

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 114

APÊNDICE B: CONSENTIMENTO PARA FOTOGRAFIAS, VÍDEOS E GRAVAÇÕES.. 116

1 INTRODUÇÃO

À medida que a Matemática foi evoluindo começou a ganhar nova forma e assim foi dividida em algumas subáreas, estas, muitas vezes, são trabalhadas e ensinadas separadamente, como é o caso da Geometria que está muito presente na vida de todos e hoje em dia se encontra desprestigiada. Cabe então ao professor fazer essa ligação entre a beleza Matemática e a vida do aluno, trazendo a realidade de cada um para dentro da sala de aula. Essa conexão entre realidade e sala de aula é possível de ser observada nos primeiros anos escolares do educando.

Assim que a criança entra na vida escolar, até aproximadamente o 5º ano do Ensino Fundamental, a Matemática, como todas as outras áreas do conhecimento, é um novo mundo para a criança. Independente se a criança frequentou a pré-escola ou não ela carrega consigo uma bagagem matemática informal que irá se desabrochar a partir do momento em que começar a entender os conceitos matemáticos. Como consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs, a forma que as crianças observam seus pais no dia a dia, sendo nas compras de supermercado, na numeração das casas, nos horários para as tarefas da família, ou até mesmo os cálculos que elas fazem sem perceber, como por exemplo, a soma de pontos em um jogo, quantidade de bolas de gude ou o quanto precisa economizar para comprar seu brinquedo, essa matemática informal será transformada em objeto de reflexão para o entendimento dos primeiros conceitos matemáticos.

Depois de muito observar as turmas em que lecionei pude perceber grandes dificuldades encontradas pelos alunos na disciplina de Matemática, talvez isso aconteça pelo fato de muitos professores de Matemática não abordarem o cotidiano do educando. Dessa forma, normalmente tem-se um maior número de crianças que gostam e compreendem a disciplina de matemática até o 5º ano, pois muitos professores acabam trazendo o dia a dia do educando para dentro da sala de aula, isso pelo fato de conhecerem melhor seus alunos, pois convivem com eles por um período de quase quatro horas acompanhando os alunos em seus estudos. Não obstante, percebo que a partir do 6º ano há uma grande queda pelo gosto da Matemática, pois nesta fase o aluno precisa desenvolver melhor suas habilidades em resolver determinados problemas, bem como a partir deste ano o aluno entra em um mundo mais abstrato, aprende álgebra, geometria, conjuntos, saindo da sua zona de conforto, e quando o aluno não entende o que está estudando acaba por demonstrar um grande desgosto pela disciplina.

Como consta na BNCC (2018, p. 60), "Ao longo do **Ensino Fundamental – Anos Finais**, os estudantes se deparam com **desafios de maior complexidade**, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas.” Como toda mudança de uma fase para a outra, a cada ano do ensino fundamental o nível de dificuldade vai aumentando, causando uma certa apreensão por parte do aluno.

Além desse “desgosto” pela Matemática, o livro didático é outra questão muito debatida pelos professores nas escolas e vem ganhando espaço em muitas instituições de ensino, desde os anos iniciais do ensino fundamental até o ensino superior, sendo uma ferramenta muito útil para o ensino de Matemática.

A preocupação com a produção dos livros didáticos vem de um longo tempo, Santos e Nacarato (2014) relatam a dificuldade de ensinar a Geometria e muitas vezes os livros didáticos não ajudam, pois o conteúdo de Geometria se faz presente apenas nos últimos capítulos, não sendo suficiente o tempo para discutir o assunto com os alunos. Porém, ao analisar o livro didático utilizado na rede Municipal de São Bento do Sul – SC, Projeto Teláris de Luiz Roberto Dante, percebe-se que isso não acontece, pois tal conteúdo encontra-se no capítulo 3 do livro didático.

Levando em consideração a proposta deste trabalho, buscar possibilidades ao trabalhar geometria com o sexto ano do ensino fundamental, tendo como ponto de partida a Geometria Espacial e o modelo de van Hiele, surge o seguinte questionamento: Como propor o ensino em geometria plana aos alunos do sexto ano do ensino fundamental partindo do conhecimento dos sólidos geométricos com o aporte da Teoria de van Hiele?

De uma forma simplista, a resposta seria da Geometria Plana para a Geometria Espacial, pois o aluno primeiro precisa saber os conceitos básicos de ponto, reta e plano para depois entender todo o conjunto. Contudo, de um modo imprevisível o livro aqui tratado já abordava o tema, pensando primeiro no tridimensional, o mundo em que vivemos, e em seguida parte para os conceitos, ou seja, parte da Geometria Espacial para Plana.

Não obstante, após conversa com alguns professores de Matemática pude perceber que a maioria relata que primeiro se faz necessário que o educando se familiarizar com os conceitos primitivos da Geometria para que depois seja mais fácil de compreender o mundo em sua forma geométrica. À vista disso surge a possibilidade de o professor inverter a ordem do conteúdo de Geometria proposto pelo autor do livro didático.

Tendo em a falta de interesse pela disciplina de matemática apresentada por muitos educandos, faz-se necessário compreender o motivo pelo qual isso acontece. Segundo Félix (2014), essa dificuldade em ampliar e desenvolver habilidades matemáticas está associada a falta de distinção entre o objeto e sua representação. O registro das representações apresenta uma grande importância sobre o desenvolvimento cognitivo das habilidades, do mesmo modo que a significância dos objetos matemáticos.

O ensino da Matemática desde o seu início vem sofrendo modificações, isso pelo fato de ser uma ciência inacabada, ou seja, sempre esteve e sempre estará em constante evolução. Desde seus primeiros passos auxilia na vida das pessoas, podendo ser na forma de contar até as grandes invenções tecnológicas, estando presente em praticamente todos os caminhos traçados pela humanidade. A Geometria como sendo uma subárea da Matemática tem um papel muito importante para o desenvolvimento da noção de espaço e distância e para a visualização espacial. Porém, segundo Passos e Nacarato (2014), o ensino de geometria está sendo relegado a um segundo plano, normalmente proposto nas últimas páginas do livro didático, cumpre-nos uma tentativa de resgatar o ensino de geometria e torná-lo mais atrativo aos alunos, surgem então a seguinte questão: Quais as possibilidades que surgirão ao trabalhar Geometria Plana com o sexto ano do Ensino Fundamental, tendo como ponto de partida a Geometria Espacial e o modelo de van Hiele?

A hipótese é de que no momento em que o professor inverter a ordem de ensinar a Geometria Plana haverá uma maior aprendizagem por parte do aluno, pois o professor ao oportunizar o educando na temática da Geometria Espacial estará correlacionando o objeto matemático com o dia a dia da criança e depois construindo, juntamente com ela, suas particularidades chegando assim, a Geometria Plana.

A escolha desse tema, ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, decorre de situações vivenciadas na construção do meu trabalho de conclusão de curso e, também, durante a minha atuação docente em algumas escolas públicas. Em minha trajetória como professora pude constatar certo abandono da Geometria por parte de alguns professores, fazendo assim com que haja um distanciamento dos alunos com tal área.

Sabe-se que o primeiro contato que a criança tem com o ensino da Geometria tem grande influência no seu interesse por esse campo da matemática, dessa forma o professor deve criar estratégias e materiais que despertem a atenção do aluno para a Geometria.

Entretanto, existe um constante abandono da Geometria nas últimas décadas na educação brasileira, como relata Pavanello (1993). Este é um assunto que tem preocupado muitos educadores matemáticos, embora esteja acontecendo em todas as instituições é mais visível nas escolas públicas. Após a promulgação da Lei 5692/71, que facultou “às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas possibilitou que muitos professores de matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, deixassem de inclui-la em sua programação” (PAVANELLO, 1993, p. 1). Da mesma forma, muitos que optaram em ensiná-la, acabaram deixando como o último assunto ficando o conteúdo de geometria com um tempo muito escasso para ser ministrado.

Pavanello (1993) relata que o ensino da matemática nas séries iniciais do ensino fundamental, como hoje é chamado, era essencialmente utilitário, buscando apenas o domínio de técnicas operatórias que seriam necessárias para a vida prática e atividades realizadas para o comércio. Da mesma forma algumas noções de geometria eram trabalhadas. Não obstante, o ensino secundário normalmente era pago e destinava-se as a pessoas da mais alta classe e a preparação para os cursos superiores. E segundo Pavanello (1993, p. 1),

> Os conteúdos de matemática (aritmética, álgebra, geometria, etc.) são ensinados separadamente e por professores diferentes. O tratamento dado a eles é puramente abstrato, sem qualquer preocupação com as aplicações práticas. Os livros utilizados também desenvolvem cada assunto progressiva e sistematicamente como um todo, sem procurar estabelecer qualquer relação entre os diferentes ramos da matemática.

Contudo, essa não é mais a realidade do ensino da matemática vivenciada no ensino fundamental, pois como consta na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p.267),

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos.

Durante o Ensino Fundamental a articulação entre Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade "[...] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações [...] e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas." (BRASIL, 2018, p. 221) O progresso dessas habilidades está relacionado a como essa aprendizagem está organizada, buscando relacionar situações do dia a dia com outras áreas do conhecimento, bem como, com a própria disciplina.

Ensinar com qualidade não se refere apenas em repassar o conteúdo, é preciso que o professor vá além, busque novas metodologias, esteja sempre atualizado e principalmente, conheça seus alunos, procurando indagá-los, saber o que eles já sabem, para então saber seu ponto de partida. Dessa forma o modelo de van Hiele é de grande valor para o professor, pois assim poderá compreender o que o aluno já sabe e então trabalhar com suas dificuldades.

Percebendo a dificuldades encontrada pelos alunos no desenvolvimento de atividades envolvendo o estudo a Geometria, buscou-se promover o ensino da Geometria plana para o sexto ano do ensino fundamental a partir da utilização de sólidos geométricos com aporte da Teoria de van Hiele, bem como, desenvolver e aplicar um caderno de atividades para o ensino de Geometria no sexto ano do Ensino Fundamental.

Como objetivos específicos pretendeu-se efetuar um pré-teste com o conteúdo de Geometria; averiguar em que fase do modelo de van Hiele os alunos se encontram; reproduzir os principais sólidos geométricos por meio da impressora 3D; criar atividades para o ensino de Geometria com a utilização dos sólidos geométricos e produzir um caderno de atividades para os professores de matemática do sexto ano do ensino fundamental.

2 REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA

Para a aprendizagem da Matemática exigem-se procedimentos metodológicos que, muitas vezes se tornam de difícil compreensão por parte do aluno e para que de fato lhe seja compreendido há uma necessidade de buscar novas formas de ensinar, bem como entender as dificuldades encontradas por cada aluno.

A Geometria é certamente uma das mais antigas subáreas da matemática. Surgiu pela grande necessidade que o ser humano tinha em demarcar terrenos, atualmente é um conhecimento que se encontra muito presente na sociedade para inúmeras finalidades, sendo ela na construção civil, na música, na arte, na informática, na navegação, até mesmo nas descobertas feitas sobre o espaço. O conhecimento Geométrico é utilizado no dia a dia das pessoas, sendo essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico de cada estudante. Para Oliveira e Velasco (2007), existe um grande número de alunos que estão ingressando no curso superior sem apresentar noções básicas sobre a Geometria, e para que os alunos consigam acompanhar o assunto em aula são oferecidas aulas de nivelamento em matemática para quem desejar, mas não são todas instituições que oferecem esse tipo de revisão, havendo assim, muitas reprovações em Cursos de Matemática, bem como em áreas vinculadas a Matemática.

Segundo Lorenzato (1995), inúmeras são as causas da omissão da Geometria nas escolas, mas existem duas importantes causas que tornam o ensino da Geometria como um conteúdo distante da realidade do aluno. O primeiro empecilho, segundo o autor, é o fato de muitos professores não possuírem o conhecimento geométrico, contudo fica difícil ensinar o que não se sabe e nesse momento o professor opta em tentar ensinar Geometria sem saber do que se trata ou não a ensina. A segunda causa refere-se à importância que desempenha o livro didático, mas que muitas vezes somente aborda definições e propriedades, se esquecendo de fazer ligação com outras áreas do saber.

Muitas crianças precisam de todos os seus sentidos para entender o que está sendo proposto, ou seja, precisam ver, ouvir, tocar, e até muitas vezes cheirar e degustar (quando possível). Quanto mais esses sentidos são desenvolvidos, melhor será o aprendizado do indivíduo, para tal, Waldomiro (2011), apresenta em sua dissertação o uso da Geometria Dinâmica através de *Softwares*, trazendo o visual para a realidade do aluno. “Esses *softwares* unem a técnica ao raciocínio dedutivo, valorizando o pensamento geométrico, permitindo realizar ações independentes. [...] assim o aluno se sente motivado, capaz de formular argumentos informais [...].” (WALDOMIRO, 2011, p. 19).

Além disso, todos os materiais que são utilizados para uma melhor interpretação, sendo ele um desenho ou um objeto refletem na criança uma imagem mental que, segundo Rogenski e Pedroso (2015), permite que na próxima aula o aluno lembre mais facilmente do que foi estudado mesmo na ausência do objeto, sendo este um raciocínio visual. Deve-se ressaltar aqui que os objetos ajudam na forma de estudo, mas não garantem o conhecimento ou melhor dizendo, a habilidade de visualizar, pois nenhum aluno é igual ao outro, podendo um aprender mais rapidamente do que o outro.

Segundo Beline e Costa (2010), grande parte do que está em nosso redor é representado em uma forma tridimensional, então seria mais interessante para as crianças se o professor começasse mostrando formas do seu dia a dia, ou seja, começar com as figuras geométricas espaciais.

Utilizar a tecnologia para o ensino de geometria é bom para o crescimento de qualquer indivíduo, principalmente quando se quer chamar a atenção das crianças e jovens, mas não se pode perder o objetivo proposto, deixando de lado a sala de aula, o escrever, o calcular, o pensar.

O uso da tecnologia para o ensino de geometria deve vir acompanhado de uma metodologia e ser utilizado em conjunto com outros recursos didáticos como materiais concretos, livros didáticos, atividades lúdicas etc. O professor deve também procurar saber o que o aluno já conhece, propor atividades de investigação, tudo isso para que o aluno tenha uma aprendizagem significativa.

2.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

A Geometria está em toda parte, para onde quer que se olhe é possível ter a noção da ideia geométrica, pois todos estão vivendo em um mundo cercado por formas tridimensionais. Nesse sentido, a Geometria é considerada a ciência do espaço, pois é através dela que se estudam as diferentes formas e medições.

Essa ciência contribui para uma visão ampla do espaço, sendo um conhecimento que se encontra em diferentes áreas, além disso, permite ao aluno um desenvolvimento da sua percepção, linguagem e do seu raciocínio geométrico para que assim possa construir os conceitos relacionados à Geometria. (ROGENSKI; PEDROSO, 2015)

O ensino de Geometria, principalmente no Brasil, ainda é muito precário e um dos motivos está escrito em sua história. Durante muitos anos existiu e ainda existe grande parte da população que é analfabeta. No início do século XX a educação tinha por objetivo diminuir esse alto número de pessoas sem escolaridade, para tal, não importava que essas pessoas dominassem toda a matemática e sim que soubessem ler e escrever. Dessa forma o ensino da Geometria quase não existia, ensinando-se somente o essencial, o cálculo de áreas e volumes.

Segundo Santos e Nacarato (2014), pelo fato de muitos professores não terem a oportunidade de estudar a Geometria com maior ênfase no ensino fundamental eles desconhecem a importância do pensamento geométrico. A falta de contato com o pensamento geométrico fez com que muitos professores fossem formados com lacunas no seu aprendizado de geometria o que acontece até os dias de hoje. Apesar das mudanças ocorridas com o livro didático, muitos docentes ainda se sentem inseguros para repassar os conhecimentos referentes à Geometria.

Essa defasagem encontra-se em todo ciclo do ensino fundamental, desde os anos iniciais (1º ao 5º ano) até os anos finais (6º ao 9º ano), como destaca Fonseca et al. (2011, p. 17), onde em uma pesquisa com os professores dos anos iniciais foi possível perceber "um certo desconforto ao falar sobre o ensino de Geometria, o que não acontece quando se referem ao ensino de números,[...] pouco tempo é dedicado ao trabalho com a Geometria,[...] falta aos professores clareza sobre o que ensinar de Geometria".

Saber se localizar no espaço ou até mesmo saber classificar objetos semelhantes é ver a aplicabilidade da geometria nas séries iniciais, pois esta tem um papel fundamental para o desenvolvimento de habilidades e competências de cada estudante, principalmente nos primeiros anos de escolaridade, uma vez que essa é a fase da "descoberta", de conhecer o desconhecido.

Apesar da Geometria ser um conhecimento muito importante para a vida do aluno, "por servir principalmente de instrumento para outras áreas do conhecimento, professores do ensino fundamental apontam problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à sua aprendizagem. Talvez por isso solicitem [...] cursos de extensão que priorizem reflexões [...]" e que auxiliem no desenvolvimento de suas práticas pedagógicas (ALMOULOUD, 2004, p. 94).

Percebe-se, então, que existe um desconforto por parte dos professores referente ao ensino de Geometria, ocorrendo tanto com os professores dos Anos Iniciais como também com os professores dos Anos Finais, acarretando assim, grandes dificuldades no ensino da Geometria durante o Ensino Médio, pois esta não foi compreendida pelos educandos nas fases anteriores. Por consequência, o aluno acaba não usufruindo de todo o conhecimento geométrico existente.

2.2 GEOMETRIA NAS ESCOLAS

O ensino de Geometria sofreu várias mudanças desde seu início até nos dias de hoje, principalmente no Brasil. Como em todas as áreas do conhecimento, esta também passou por suas fases, contribuindo constantemente para a evolução do raciocínio lógico. Segundo Santos e Nacarato (2014, p. 14),

> O ensino de Geometria no Brasil passou por várias fases. Sabemos que, até 1960, ele se baseava nos estudos de Euclides. Entre 1970 e 1980, recebeu a influência do Movimento da Matemática Moderna, em que o ensino tinha ênfase principalmente na linguagem, dificultando a compreensão dos conceitos.

Ao mesmo tempo em que a Geometria passava por mudanças, muitos docentes não sabiam como lidar com a situação, pois apresentavam dificuldade em ensinar tal conteúdo e se isso não bastasse, o conteúdo de Geometria encontrava-se nos capítulos finais do livro didático (SANTOS; NACARATO, 2014). Assim sendo, qual seria a motivação que os alunos teriam em estudar Geometria? Dessa forma muitos professores devem se perguntar: mas para que devo ensinar Geometria? De que forma irá contribuir para o desenvolvimento cognitivo do meu aluno? Perguntas estas, que não são difíceis de responder, pois a Geometria permite a cada indivíduo uma interpretação mais completa do mundo em que vive. Como enfatiza Lorenzato (1995, p. 5),

> Na verdade, para justificar a necessidade de se ter a Geometria na escola, bastaria o argumento de que sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas. Também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida.

A argumentação anterior permite observar que esta área do conhecimento se encontra em diferentes situações que auxiliam na aprendizagem, ajudando na construção de conceitos geométricos e na visualização do mundo como um todo. Além disso, ajudará o aluno na busca do conhecimento, dando-o a oportunidade de descobrir, construir, explorar e investigar todas as propriedades dos sólidos e das formas que o cercam.

De certa forma, para que o estudante tenha uma boa aprendizagem de geometria é necessário que o professor tenha uma um conhecimento pedagógico e de conteúdo de geometria para decidir que conteúdos priorizar, que abordagens adotar e que estratégia utilizar para que o aluno seja interessado e focado na busca pelo conhecimento e que a escola propicie um ambiente adequado para que a aprendizagem seja efetivamente alcançada.

3 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

O currículo, desde o seu início, vem sendo apresentado de diferentes maneiras e entendido de várias formas distintas, “não havendo consenso entre os pesquisadores, a não ser em relação ao seu objeto de estudo, que é a ligação à educação” (OLIVEIRA, 2014, p. 31).

A formulação do currículo é muito importante para o contexto escolar, pois é através dele que são feitas discussões sobre os conhecimentos escolares, a metodologia e as relações sociais que estão ligadas ao ensino e aprendizagem.

Com base nos documentos curriculares, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, Brasil (2018, p.266),

> [...] leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento.

Para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental tem por objetivo, em relação à educação matemática, que os alunos aprendam a resolver “problemas com números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, envolvendo diferentes significados das operações, argumentem e justifiquem os procedimentos utilizados para a resolução e avaliem a plausibilidade dos resultados encontrados” (BRASIL, 2018, p. 266).

No que se refere às expectativas para a educação matemática no Ensino Fundamental Anos Finais, segundo Brasil (2018, p. 267),

> é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. [...] Os alunos devem dominar também o cálculo de porcentagem, porcentagem de porcentagem, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Para um melhor entendimento do estudo da matemática, ela é separada em unidades temáticas que envolvem todos os conteúdos a serem trabalhados no ensino fundamental, sendo eles: “Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística” (BRASIL, 2018, p. 267).

Percebe-se que a aprendizagem apresenta situações diversificadas possibilitando várias ações ao aluno, como por exemplo, explorar, investigar, deduzir, abstrair, identificar, construir, entre outras tão importantes para que ocorra o ensino e, também, a aprendizagem. Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 273),

> A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos.

Para tal, algumas das habilidades adquiridas com o estudo da geometria são, “quantificar e estabelecer relações entre vértice, face e arestas de prismas e pirâmides [...]. Reconhecer, nomear e comparar polígonos [...]. Identificar características dos triângulos [...]” e dos quadriláteros. (BRASIL, 2018, p. 302).

4 MODELO DE VAN HIELE

Muitos docentes de Matemática do Ensino Fundamental ou Médio, relatam por meio de suas percepções, um desenvolvimento lento, ou inadequado, de seus alunos nas aulas de Geometria. Os motivos para isso são vários, como por exemplo a dificuldade dos alunos em adquirir um novo conceito ou até mesmo em pôr na prática os conhecimentos recém aprendidos. Muitos estudantes estão presos as fórmulas que lhes são ensinadas, esquecendo de compreender o contexto da situação apresentada. Porém, essa situação é enfrentada por muitos professores, não somente não educação matemática brasileira, mas em todo o mundo e por muitos anos (PAVANELLO, 1993).

Diante dessa problemática enfrentada por muitos professores, um casal de professores holandeses de Matemática sentiu a necessidade de contribuir para que esse cenário fosse mudado, o que os levou a estudar profundamente este problema, para então, encontrar uma solução. O casal, Dina van Hiele-Geldof e Pierre Marie van Hiele são os autores do modelo de van Hiele, mas tiveram a ajuda e orientação de professor Hans Freudentahl.

A pesquisa dos van Hiele sobre o ensino de Geometria consistia em uma ênfase na manipulação de figuras, e seu público-alvo eram alunos de 12 e 13 anos. Não obstante, Dina não pode contribuir para melhorias da sua pesquisa, pois faleceu logo após terem terminado a tese e concluírem o doutorado na Universidade de Utrecht. Para tal, Pierre foi quem aperfeiçoou e deu o nome a teoria (JAIME; GUTIERREZ, 1990).

A teoria van Hiele que trata do desenvolvimento do pensamento geométrico contribui e auxilia os professores na sua formação, bem como uma forma diferente de ver e entender as habilidades de seus alunos.

O modelo de van Hiele é uma forma de classificação do desenvolvimento do pensamento geométrico, em que o raciocínio de cada estudante passa por vários níveis sequenciais e ordenados. Sendo assim, a Geometria deve ser analisada em sua totalidade, buscando em atividades de caráter exploratório e investigativo que o aluno obtenha sucesso no seu aprendizado. Não obstante, muitos estudos provam que os alunos não aprendem da mesma forma, ou seja, cada um tem uma maneira diferente de processar o conhecimento, em virtude disso o ensino da Geometria não pode ser mecanizado, precisa nascer da prática vivenciada pelo educando para então chegar a seus conceitos propriamente ditos (PÉRTILE, 2011).

Foi através de observações feitas pelo casal durantes suas aulas que surgiu a ideia de encontrar uma metodologia para analisar os níveis de desenvolvimento mental em relação à

Geometria. O modelo de van Hiele foi desenvolvido durante a elaboração da tese de doutorado de Dina van Hiele-Geldof e de seu marido Pierre van Hiele, em 1957, na Universidade de Utrecht, Holanda (CONTE, 2011).

> Enquanto a tese de Pierre tentava, principalmente, explicar o porquê os alunos tinham problemas ao aprender geometria (sob tal aspecto, ela era **explicativa** e **descritiva**), a tese de Dina versava sobre um experimento educacional e, sob tal aspecto, é mais **prescriptiva** com relação à ordenação do conteúdo de geometria e atividades de aprendizado dos alunos. A principal característica da teoria é a distinção de cinco diferentes níveis de pensamentos com relação ao desenvolvimento da compreensão dos alunos acerca da geometria (VILLIERS, 2010, p. 400).

O casal van Hiele, tendo por base as dificuldades apresentadas pelos alunos durante as aulas de matemática do curso secundário, séries em que ministravam suas aulas na Holanda, buscavam entender por que motivos seus alunos tinham tantas dúvidas no ensino de Geometria. Dessa forma o modelo de van Hiele "sugere que os alunos progridam segundo uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, enquanto eles aprendem geometria" (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 6). Sendo assim este modelo serve como um guia para que o professor possa analisar o grau de competência desenvolvida pelo aluno referente aos conceitos geométricos.

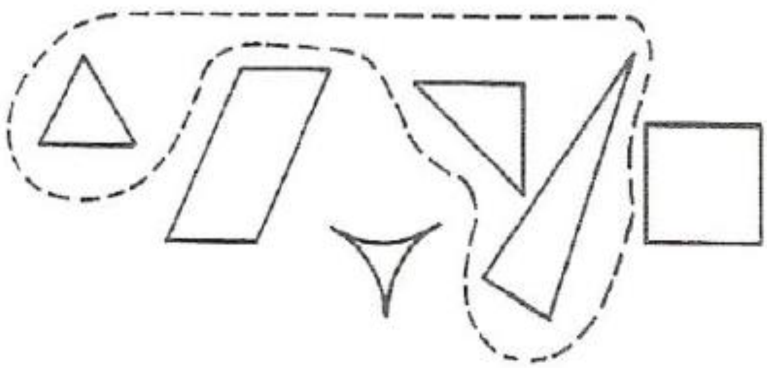
Para que o aluno progrida de um nível para o seguinte se faz necessário à vivência de atividades adequadas, em que estas devem ser organizadas pelo professor, pois é ele quem conhece sua turma e sabe em qual nível cada um se encontra. Segundo Nasser e Sant'anna (2010, p. 6), "a elevação de nível depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação. Segundo van Hiele, cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagem próprias". Pontando, o ensino desta deve acontecer de modo que haja um nível de raciocínio que englobe toda a turma.

O modelo de van Hiele apresenta cinco níveis hierárquicos, dessa forma o aluno somente passaria de fase se, e somente se, já atingisse o nível de raciocínio proposto na fase anterior, ou nas fases anteriores. Em vista dessa linha de aprendizagem da Geometria, pode-se então perceber o porquê de tantos educandos apresentarem dificuldades para aprender o conteúdo geométrico, pois o modelo de ensino que se faz presente atualmente é separado por séries, em que a idade define em que categoria cada indivíduo se encontra. Porém, muitas vezes os alunos não estão preparados para compreender o próximo nível, pois ainda não entenderam o nível anterior.

Dessa forma, para que o aluno progrida no seu conhecimento geométrico, os van Hiele apresentaram cinco níveis de raciocínio, que ajudarão na compreensão das dificuldades na formação do pensamento geométrico. Segundo Nasser e Santa'anna (2010, p. 7) existem cinco níveis:

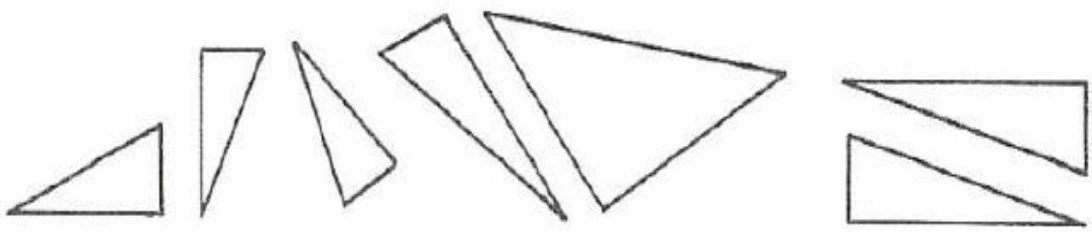
Primeiro Nível (Básico): Reconhecimento – Esse período tem por características principais: o reconhecimento, a comparação e as nomenclaturas das figuras geométricas por sua aparência global. Pode-se dizer que a Geometria é visualizada, mas somente por sua aparência física, não por suas propriedades. A classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios é um exemplo da compreensão que a criança deve ter nesta fase. Outro exemplo seria saber identificar relações entre figuras geométricas, como mostra as imagens a seguir (Figura 1 e 2).

Figura 1 – Blocos de modelos classificáveis A



Fonte: Conte (2011, p.18).

Figura 2 - Blocos de Modelos Classificáveis B.



Fonte: Conte (2011, p. 18).

Segundo Nível: Análise – Nesta fase acontece a análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecendo suas propriedades geométricas e usando-as para resolver problemas. Não obstante, ainda não é possível explicar a relação que existe entre as propriedades. Tem-se como exemplo a descrição de um quadrado por meio de suas propriedades: possui quatro lados iguais, quatro ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos, mas o aluno ainda não consegue fazer a relação entre suas propriedades para dizer que todo quadrado também é um retângulo.

Terceiro Nível: Abstração - Neste nível os alunos já possuem percepção da necessidade de uma definição precisa, compreendendo que uma propriedade pode decorrer de outra. Começa a argumentar informalmente e consegue fazer ordenação de classes de figuras geométricas. Reconhecer as características principais de um quadrado, como quatro lados iguais, quatro ângulos retos e ainda reconhecer que todo quadrado é um retângulo.

Quarto Nível: Dedução – percebe-se nessa fase o domínio do processor dedutivo e das demonstrações, bem como o reconhecimento das condições necessárias e suficientes. O aluno passa a compreender alguns axiomas, postulados e teoremas, partindo assim, para a construção de demonstrações. Um exemplo seria a demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros por meio da congruência de triângulos.

Quinto Nível: Rigor - Neste nível o aluno já está apto ao estudo da Geometria, sendo capaz de compreender demonstrações formais e, também, o estabelecimento de teoremas em diversos sistemas, bem como fazer comparação entre eles.

Segundo Nagata (2016, p. 29), "para que haja compreensão do conteúdo o professor precisa conhecer toda a estrutura envolvida de forma coerente, utilizando a linguagem adequada para cada grupo de alunos, a fim de tornar o processo de aprendizagem mais proveitoso". Dessa forma, cabe ao professor ser um mediador, entendendo em que nível do conhecimento seu aluno se encontra, para assim poder guiá-lo para o nível seguinte.

4.1 PROPRIEDADES DA TEORIA

O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico possui cinco propriedades segundo Crowley (1994), identificando generalidades que caracterizam o modelo. "Essas propriedades são particularmente significativas para educadores, pois podem orientar a tomada de decisões quanto ao ensino.” (CROWLEY 1994, p. 4). Dessa forma, as propriedades são divididas em:

1ª. Sequencial. Como próprio nome diz, a propriedade sequencial refere-se a seguir uma sequência. Da mesma forma que em grande parte “das teorias desenvolvimentistas, uma pessoa deve necessariamente passar pelos vários níveis, sucessivamente.” (CROWLEY 1994, p. 5). Para que o aluno obtenha um bom desenvolvimento em determinado nível, este deve conhecer as estratégias dos níveis anteriores.

2ª. Avanço. Para que o educando progrida (ou não) de um nível para o outro “depende mais do conteúdo e dos métodos de instrução recebidos do que da idade. Nenhum método de ensino permite pular de um nível”. Segundo o mesmo autor citado, quando o aluno memoriza fórmulas de áreas, por exemplo, ou faz relações como *todo quadrado é um losango*, “o que ocorre é que a essência do assunto é reduzida a um nível inferior e não há compreensão.”.

3ª. Intrínseco e extrínseco. Está propriedade refere-se as características essenciais a um determinado nível, sendo elas importantes no nível seguinte. Por exemplo, reconhecer quadrados e separá-los das demais figuras geométricas é uma característica do Nível Básico – Visualização, pois a figura é percebida. Não obstante, o que determina o agrupamento dos quadrados são suas propriedades, estas vistas no nível seguinte, Nível 2 – Análise. No Nível 2 a figura é analisada, buscando descobrir suas propriedades (CROWLEY 1994).

4ª. Linguística. Ao definir uma propriedade, o aluno pode referir-se formalmente ou informalmente, dependendo em que nível do pensamento geométrico se encontra, pois cada nível apresenta suas próprias simbologias linguísticas. Dessa forma, uma resposta pode ser aceita para um nível e para outro mais avançado não. Por exemplo, em relação as nomenclaturas, pode existir mais de um nome para a mesma figura geométrica, que é o caso do quadrado – um quadrado pode ser chamado retângulo, pois suas propriedades o permitem. Contudo, um aluno que está no Nível 1 não consegue perceber que esse tipo de conciliação possa acontecer, visto que essas compreensões e linguagens são características do Nível 2.

5ª. Combinação inadequada. “Se o aluno está num certo nível e o curso num nível diferente, o aprendizado e o progresso desejados podem não se verificar” (CROWLEY 1994, p. 5). Em síntese, se faz necessário que o professor, o material didático, conteúdo, vocabulário, e todo o contexto estejam voltados ao nível em que o aluno se encontra, pois somente dessa forma o educando será capaz de acompanhar os processos de pensamento inclusos em cada nível.

4.2 REPERCUSSÕES DO MODELO DE VAN HIELE PARA A SALA DE AULA

A teoria de van Hiele apresenta cinco níveis de raciocínio, porém para progredir de um nível para o outro o aluno precisa passar por cinco fases de aprendizagem e o professor tem um papel muito importante em cada etapa.

> O professor tem um papel de destaque no modelo de van Hiele, que pressupõe que o progresso nos níveis depende mais da aprendizagem do que de idade ou maturação. Isto é, cabe ao professor selecionaras atividades que o aluno deve vivenciar para que avance para o nível seguinte. Segundo van Hiele, para progredir de nível é necessário que o aluno passe por cinco **fases de aprendizagem** (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 7).

As cinco fases de aprendizagem propostas por van Hiele são sequenciais e são desenvolvidas por nível e ao completar a quinta fase de cada nível o aluno terá condições de passar ao nível seguinte. As fases de aprendizagem são denominadas de *informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre, integração.* A fase inicial é a de *informação*, em que ~~o~~ professor e aluno buscam dialogar sobre o objeto de estudo, o professor deve perceber quais os conhecimentos prévios do aluno sobre o assunto a ser estudado. A próxima fase é a de *orientação dirigida*, em que por meio dos materiais selecionados pelo professor os alunos exploram o assunto de estudo, as atividades deverão proporcionar respostas específicas e objetivas. Na terceira fase, *explicação*, o professor é mais um observador e os alunos precisam se expressar e se necessário modificar sua forma de pensar sobre as estruturas observadas. Na fase seguinte de *orientação livre*, as tarefas são constituídas de vários momentos, possibilitando diversas respostas, de modo que o aluno obtenha mais experiências e autonomia solucionando assim tarefas mais complicadas. Já a quinta e última fase é a *integração*, é o momento em que o educando busca rever e resumir o que aprendeu, entendendo de uma forma geral as relações e sistemas de objetos do nível atingido e o professor tem um papel importante no processo de síntese, fornecendo experiências e observações globais, sem apresentar novas e discordantes ideias (NASSER; SANT'ANNA, 2010).

Contudo, essas mudanças não ocorrem de uma hora para a outra, os alunos precisam de tempo para a assimilação do conhecimento, pois é necessário o amadurecimento das estratégias (varia de aluno para aluno) que irão auxiliá-lo durante as atividades sobre Geometria, dos meios de estudo e da aquisição das características daquele nível. Acredita-se que é preciso alguns meses para que a quinta fase seja atingida, mas isso depende muito das características da turma, do meio em que estão inseridos, do relacionamento entre ambos, enfim, são muitas as variáveis que precisam ser analisadas para que haja um resultado positivo e mais eficiente no final.

5 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Os problemas conceituais encontrados por muitos alunos na disciplina de Matemática, mais propriamente em geometria, é o foco de estudo de vários professores e pesquisadores da área. “As observações realizadas sobre o baixo desempenho na resolução de problemas, no campo geométrico, nos levam a buscar elementos, semióticos e cognitivos, que possam apontar direcionamentos que estabeleçam um salto para o avanço da didática da matemática.” (DE SOUZA; MORETTI; ALMOULOUD, 2019).

Para De Souza, Moretti e Almouloud (2019), as figuras geométricas, abordadas em problemas de geometria, acabam por vezes sendo vistas de forma distorcida por grande parte dos alunos, ou nem sempre são bem elaboradas pelos professores, causando um obstáculo ao avanço dos conceitos.

As diversidades da representação de um objeto matemático devem ser consideradas para o ensino da matemática já que estas possuem estruturas abstratas, que dependem de conceitos específicos para serem apreendidas. Para tal, o educador precisa estar atento as diversidades de metodologias buscando uma compreensão ampla dos conceitos matemáticos para cada situação.

Para uma melhor compreensão sobre os Registros de Representação Semiótica, explanar-se-á os estudos da semiótica segundo o filósofo, psicólogo e professor Raymond Duval. Suas pesquisas referentes a Psicologia Cognitiva estão contribuindo para os estudos em Educação Matemática, onde as representações de um objeto matemático são fundamentais para a compreensão em matemática. Para Duval (2012, p. 268),

> A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. [...] Não obstante, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes.

Essa distinção é muito significativa, pois as diversas representações semióticas não são tão importantes quanto o objeto em questão. Um objeto matemático pode ter diferentes representações, podendo ser de natureza mental ou não, dessa forma, quando Duval (2012) utiliza a expressão registros de representação semiótica está designando restritamente aos diferentes tipos de representações semióticas de um objeto, sendo essas, “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento" Duval (2012, p. 269).

Segundo Duval (2012), o acesso aos objetos matemáticos não pode ser visto como uma compreensão conceitual, uma vez que somente é possível realizar a atividade sobre objetos matemáticos por meio de suas representações semióticas, logo isso pode ser considerado um paradoxo cognitivo, pois "como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas?" (DUVAL, 2012, p. 268)

Como destaca Duval (2012, p.269), este paradoxo é desconhecido por muitos educadores pois existe uma ênfase nas representações mentais, excluindo as representações semióticas. As representações mentais são conjuntos de imagens que podem ser conceitualizadas sobre determinado objeto, situação ou associações. Já as "**representações semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.".

As representações semióticas podem ser caracterizadas de diferentes sistemas semióticos, como por exemplo, "uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico[...]". Sendo esta uma simples forma de exteriorização de representações mentais, tornando determinada situação acessível a outros (DUVAL, 2012, p. 269). Dessa forma, "[...]as representações semióticas podem parecer, apenas, ser o meio de que o indivíduo dispõe para exteriorizar suas representações mentais para fins de comunicação, ou seja, tornarem visíveis ou acessíveis ao outro." (KLUPPEL, 2014, p. 34). Entretanto, os registros de representações semióticas são essenciais, também, para o desenvolvimento de atividades cognitivas do pensamento, pois além da função de comunicação desempenha, por exemplo, a função de tratamento, característica marcante das representações conscientes.

As representações estão ligadas a questões epistemológica do objeto, ou seja, estão ligados a tudo que envolve o objeto desde o seu surgimento, até mesmo nas dificuldades encontradas pelo aluno, pois todo o conhecimento entorno desse objeto faz parte da sua epistemologia. Por exemplo, ao se estudar os conhecimentos referentes a geometria no sexto ano e todos os obstáculos inerentes as suas propriedades e relações verifica-se que muitos desses obstáculos são persistentes e muitas vezes são levados até o Ensino Superior. Outro fator que está diretamente ligado as representações é o funcionamento do pensamento, onde Duval (1993, p.39), afirma que o "funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros de representação semiótica".

Segundo Duval (2012, p. 270), o funcionamento cognitivo do estudante e em geral do ser humano está fortemente ligado a uma ampla gama de registros semióticos e ele denomina de “semiose” a “apreensão ou produção de uma representação semiótica”. Mas somente a “semiose” não é suficiente, é necessário algo a mais. Duval (2012), chama esse algo mais de “noesis” e a define como “a apreensão conceitual de um objeto” e afirma que as duas andam juntas, são inseparáveis. Em relação a estes dois conceitos Duval é categórico:

> O paradoxo cognitivo do pensamento matemático e as dificuldades que resultam para sua aprendizagem se dão pelo fato de que não há noesis sem semiose enquanto houver vontade de ensinar matemática, como se a semiose fosse uma operação desprezível em relação a noesis. No entanto, é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, **o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações**. (DUVAL, 2012, p. 270, grifo do autor).

Na área de matemática a produção de representações semióticas é feita na pesquisa avançada em matemática, onde o que se requer dos estudantes durante a aprendizagem de conceitos é a percepção, assimilação, de uma representação semiótica.

As representações semióticas contribuem para o desenvolvimento de fatores relevantes para o indivíduo, como **o desenvolvimento das representações mentais**, em que as representações semióticas são interiorizadas pelo indivíduo, da mesma forma que cada pessoa consegue fazer uma interiorização das representações mentais, ou seja, de tudo aquilo que é percebido. O segundo fator é a **realização de diferentes funções cognitivas**, onde as representações semióticas cumprem além da função de objetivação, ao tomar consciência do contexto semiótico que está inserido também, as funções de tratamento e conversão.

Duval (2012) estabelece também três atividades cognitivas primordiais ao se transitar entre registros de representação semiótica: a formação, o tratamento e a conversão. A formação significa a utilização das chamadas regras de conformidade já estabelecidas pela sociedade para reconhecer as representações, ou seja, utilizar das representações existentes para criar a imagem mental do objeto e fazer a reprodução da representação deste objeto de alguma forma. Duval (2012, p. 272) declara que as “regras de conformidade, não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer que o conhecimento de regras de conformidade não está relacionado a competência para formar representações, mas somente para reconhecê-las.”. O tratamento consiste em transitar entre representações dentro do mesmo registro, por exemplo, resolver uma equação de primeiro grau permanecendo dentro do registro algébrico. A conversão consiste em transitar entre diferentes registros de representação, por exemplo, passar do registro algébrico para o registro gráfico, as vezes o registro inicial transparece no registro final e as vezes não, isso é chamado de fenômenos de congruência ou não congruência.

Duval postula duas condições para a compreensão em matemática, a primeira condição é a distinção entre um objeto e sua representação sendo este o ponto de partida para a realização de atividades cognitivas sobre o objeto e a segunda é que "a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão."(DUVAL, 2012, p. 282)

Portanto a compreensão em matemática está baseada na existência de registros de representação semiótica, na existência de diversos registros de representação para o mesmo o objeto e na habilidade em efetuar a coordenação entre diferentes registros. A existência de diversos registros embora à primeira vista seja uma desvantagem, na verdade é um facilitador na resolução de problemas, pois oportuniza a economia de tratamento e permite identificar em cada representação particularidades do objeto que não são visíveis em outra representação. Por exemplo, considere as formas de representação da parábola $y=x^2-4x-5$, dadas no registro algébrico por $y=(x-2)^2-9$ e $y=(x+1)(x-5)$. Na forma canônica de representação da parábola, $y=(x-2)^2-9$, identificamos rapidamente o vértice da parábola que é o ponto P(2,9). Na forma fatorada, $y=(x+1).(x-5)$, identificamos rapidamente os zeros da função que são $x=-1$ e $x=5$. Além disso, mudando do registro algébrico para o registro gráfico teremos uma parábola no plano cartesiano, em que se pode observar as interseções com os eixos, os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos de máximo ou de mínimo, porém no registro gráfico não teremos condições de calcular o valor de y para $x = \sqrt{8}$ mas podemos realizar isso no registro algébrico.

O ensino da Matemática, por envolver um alto grau de abstração, necessita do uso de variadas representações e diferentes metodologias por parte do professor. Dessa forma, ao ensinar matemática deve-se estar aberto as variadas formas de registros de representação em que um objeto matemático pode ser representado e permitir o trânsito entre variados registros para que haja a compreensão dos conceitos matemáticos.

5.1 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ENSINO DE GEOMETRIA

A aprendizagem da Geometria está relacionada a vários fatores e segundo as pesquisas apresentadas por Duval, um dos fatores é a dependência da sincronia entre dois tipos de Registros de Representação Semiótica, em geometria além da língua natural que é representada pelo registro discursivo há também o registro figural que merece atenção por permitir vários olhares que serão importantes na resolução de um problema:

> O aprender em geometria necessita, por parte do aluno, da coordenação de um enunciado que guiará os dados do problema e quais dados matemáticos estão associados à determinada figura. Além de interpretar o enunciado, certamente, há a presença da figura geométrica, seja ela desenhada ou imaginada. (MORETTI; BRAND, 2020, p. 193).

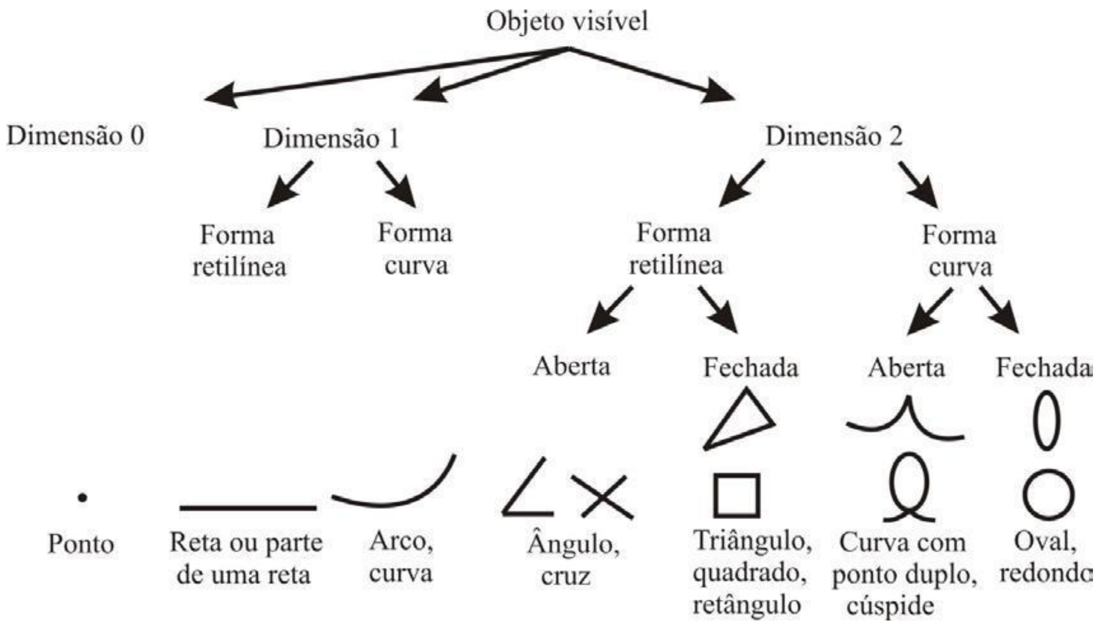
Dessa forma, para resolver um problema de geometria não basta apenas entender o seu enunciado, mas deve-se prestar atenção na figura que está associada ao enunciado. Na maioria das vezes presta-se mais atenção a figura do que ao enunciado e isso leva a erros na resolução do problema. Portanto deve-se buscar a boa coordenação entre o registro discursivo e o registro figural, para retirar dos problemas os dados necessários para efetuar as operações que levarão ao resultado desejado.

Faz-se necessário ressaltar que o registro figural deve ser um suporte eficiente para o entendimento do problema, oferecendo perspectivas que visam auxiliar na resolução, bem como "encontrar" as propriedades e relações existentes.

Segundo Duval (2012, p. 270), "o funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação". Sendo assim, para o autor não existe apreensão conceitual de um objeto sem que haja a apreensão de uma representação semiótica. Por isso, é indispensável poder mobilizar vários registros de representação semiótica durante a resolução de problemas matemáticos, principalmente envolvendo o ensino da Geometria, pois para o aluno o aproveitamento desses registros, com por exemplo, figuras, gráficos, língua natural, símbolos matemáticos, entre outros, ajudará para um correto desenvolvimento do problema.

Não obstante, saber mobilizar o olhar e reconhecer uma figura são formas diferentes de ver a mesma situação, em que ao reconhecer uma figura pela sua forma global refere-se a enxergar o mesmo problema de várias maneiras, podendo assim, fazer uma transformação de uma representação para a outra. "Esse olhar precisa reconhecer a unidades figurais elementares que são as características qualitativas dos formatos e os valores dimensionais a eles relacionados” (MORETTI; BRANDT 2020). A Figura 3 apresenta a classificação das unidades figurais elementares proposta por Duval. Pode-se observar, na Figura 3, que os objetos visíveis estão classificados em três dimensões: 0D, 1D e 2D. O triângulo, o quadrado e o retângulo encontram-se em uma mesma descrição, 2D, pois apresentam as mesmas características, sendo formas retilíneas e fechadas. Ao analisar o triângulo, é possível perceber que este apresenta valores dimensionais oriundo da dimensão um (1D), visto que o triângulo é formado por três segmentos de retas e mais ainda, pode-se incluir a dimensão zero (0D), pois os três pontos de intercessão dos segmentos de reta que formam o triângulos são classificados como 0D. Ao ver a representação de um sólido geométrico em diferentes dimensões, o aluno está desenvolvendo sua atividade cognitiva e dessa forma, ao conseguir observar essas unidades figurais, consegue fazer a desconstrução dimensional da figura. (MORETTI; BRAND, 2020).

Figura 3 - Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: Duval (2004, p. 159)

Mediante o exposto, pode-se afirmar que a desconstrução dimensional das formas comumente presentes no dia a dia dos indivíduos, em outras formas dimensionais de dimensões menores, é uma importante ferramenta para que o educando consiga progredir cognitivamente e amadurecer o seu pensamento geométrico.

Atendendo a necessidade desse salto cognitivo, identifica-se grandes dificuldades encontradas pelos alunos e a causa de não conseguirem avançar está na dificuldade em olhar para as dimensões inferiores da forma dada, entretanto, "trata-se de um processo essencial para o entendimento de propriedades geométricas" (MORETTI; BRANDT, 2020, p. 195):

> Além da desconstrução dimensional, Duval (2004, 2011, 2012a, 2012b) estabelece que outras atividades cognitivas são requisitadas na aprendizagem da Geometria, sendo por ele chamadas de apreensões. As apreensões são de quatro tipos: a apreensão perceptiva, a apreensão operatória, a apreensão discursiva e a apreensão sequencial. (MORETTI; BRANDT, 2020, p. 195).

As apreensões são, portanto, atividades cognitivas específicas relacionadas a visualização, manipulação, transformação e desconstrução de figuras geométricas sejam em 1D, 2D ou 3D. Em problemas de geometria de geometria as quatro apreensões: perceptiva, operatória, discursiva, sequencial, são mobilizadas em maior ou menor grau. Por exemplo: figura geométrica = apreensão perceptiva + apreensão discursiva; visualização = apreensão perceptiva + apreensão operatória; demonstração = apreensão operatória + apreensão discursiva; construção geométrica = apreensão discursiva + apreensão sequencial.

A apreensão perceptiva tem um certo destaque na hierarquia das apreensões embora não seja a mais importante para a resolução de um problema. Em termos de importância todas são importantes e são exigidas em quase todos os problemas de geometria. A apreensão perceptiva permite a identificação e interpretação da figura e depende do olhar de quem a visualiza sendo que há diversas maneiras de olhar para a figura e Duval as classifica em quatro nomenclaturas: olhar do botanista, olhar do agrimensor, olhar do construtor e olhar do inventor. Na resolução de uma atividade geométrica pode ser necessário a presença das quatro apreensões, visto que uma apreensão pode ser mais requisitada que outra. Salienta-se ainda a importância de conhecer os olhares, que para Duval auxiliam na resolução correta de problemas envolvendo geometria, sendo resumidos na Figura 4 a seguir:

Figura 4 – Apreensões e olhares em Geometria

Apreensões			
Perceptiva	**Discursiva**	**Operatória**	**Sequencial**
É o reconhecimento de formas, sendo imediata e automática.	É a interpretação dos elementos da figura, apresentada pelo enunciado.	São as possíveis modificações que podem acontecer em uma figura e as reorganizações perceptivas que as mudanças operam.	É a construção geométrica realizada passo a passo.

Olhares			
Icônico		**Não-icônico**	
Botanista	**Agrimensor**	**Construtor**	**Inventor**
Permite reconhecer o contorno de formas e diferenciá-las. Observar diferenças nas figuras semelhantes e semelhanças nas formas diferentes.	Utilizado para fins de medida e escala, transferir de uma escala de grandeza à outra.	Refere-se ao uso de instrumentos, régua não-graduada e compasso.	É o acréscimo de traços na figura em um problema, operação e modificação para descobrir um método de resolução.

Fonte: Brandt, Moretti e Novak (2018, p. 106).

Note que os olhares icônicos se referem àqueles olhares iniciais de uma figura onde se reconhece os traços e formas mais globais da figura, mas o que se requer para a resolução de problemas são os olhares não icônicos pois são esses que permitirão efetuar modificações na figura e retirar dela os dados necessários para efetuar as operações necessárias a solução do problema. Os olhares icônicos estão ligados a apreensão perceptiva enquanto os olhares não icônicos estão ligados a apreensão operatória. A apreensão sequencial é aquela requerida em construções geométricas e está ligada aos olhares icônicos e não icônicos dependendo do nível de dificuldade da construção a ser realizada.

Conhecendo-se os olhares e as apreensões em geometria pode-se realizar uma análise mais detalhada dos dados coletados, visto que as apreensões segundo Duval irão contribuir no entendimento das respostas obtidas no questionário que visava encontrar o nível de conhecimento geométrico segundo van Hiele.

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

6.1 CARÁTER GERAL DA PESQUISA

Esta é uma pesquisa de caráter qualitativo, não se preocupando com a quantificação dos objetos de estudo, porém, visa aprofundar-se na compreensão dos dados que serão coletados. A pesquisa qualitativa é considerada para Massoni e Moreira (2017, p. 52) como a:

> [...] existência de uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito. É descritiva, interpretativa, utiliza o método indutivo e foca principalmente no processo e nas perspectivas dos atores sociais envolvidos (professores, alunos, administradores, colaboradores, etc.). Estudos qualitativos examinam em profundidade e em extensão os modos e padrões dos fenômenos.

Segundo Ludke e André (1986, p. 11), “a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada”, ou seja, por meio de um trabalho de campo. E neste caso, a questão a ser estudada é a aprendizagem dos alunos por meio do ensino de Geometria por meio de construções geométricas. Para tal, faz-se necessário a presença do pesquisador ministrando as aulas de Geometria e analisando mediante observação e/ou testes as dificuldades encontradas pelos alunos, de forma a verificar suas origens.

Para uma melhor análise, pode-se classificar dentro das modalidades de pesquisas de natureza interventiva (PNI), que esta pesquisa possui características de uma pesquisa experimental, pois segundo Teixeira e Neto (2017, p. 1070), pesquisas deste tipo “são caracterizadas por manipularem diretamente variáveis relacionadas com o objeto de estudo [...]”. Visando explicar de que modo ou por que motivo “[...] o fenômeno é produzido ou alterado em função da ação da variável (independente) introduzida no processo examinado durante a investigação”.

A atual pesquisa buscará analisar por meio do modelo de van Hiele o ensino e aprendizagem da Geometria partindo da Geometria Espacial para a Geometria Plana. A análise será feita através de uma pesquisa de campo que consiste em observar fatos e fenômenos que ocorrem em sua naturalidade e assim coletar dados que fundamentam a pesquisa proposta.

A coleta de dados foi realizada em duas escolas, Escola Básica Municipal Presidente Castelo Branco, e a Escola Básica Municipal Alexandre Pfeiffer, localizadas na cidade de São Bento do Sul, contendo cada escola duas turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, uma no período matutino e outra no período vespertino. A primeira escola localiza-se no Bairro 25 de Julho e as turmas do sexto ano possuem 27 alunos na parte da manhã e 26 na parte da tarde. Já a segunda escola localiza-se no Bairro Colonial e em ambas as turmas do sexto ano possuem 20 alunos. Em cada turma foram ministradas 20 aulas de 45 minutos cada, em um total de 12 encontros, e para que não ocorra conflito de horário, optou-se por ministras as aulas em meses diferentes, na E.B.M. Presidente Castelo Branco as aulas foram ministradas no mês de setembro e na E.B.M. Alexandre Pfeiffer no mês de outubro de 2019.

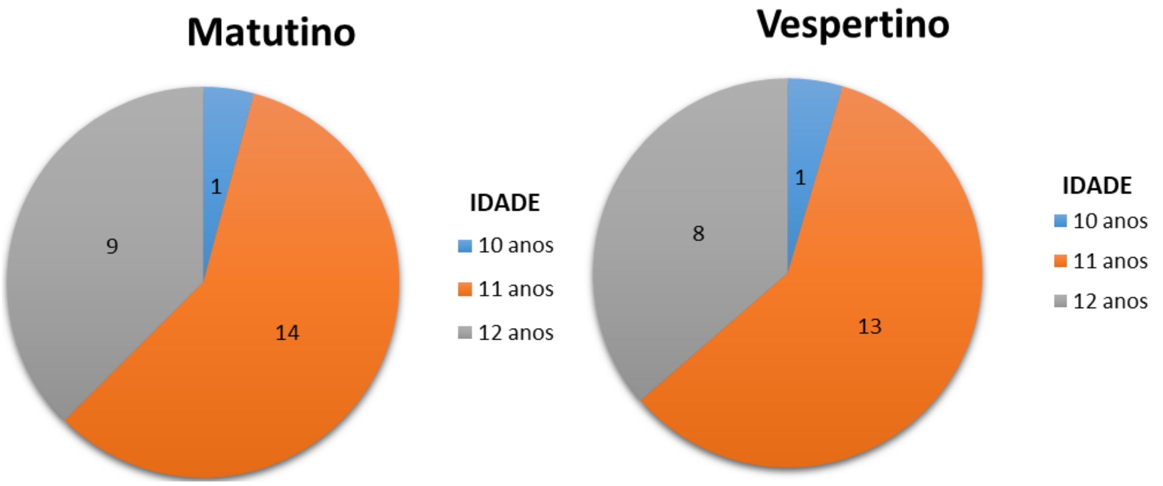
A escolha dessa turma, sexto ano, se deu pelo fato de se constatar que os alunos, ao passarem para o sétimo ano, apresentam muita dificuldade na compreensão da Geometria, fato esse que deve ser investigado e analisado em profundidade. Ao conversar com outros professores do município, se pode perceber que é uma realidade de muitas turmas do 6º ao 9º ano.

Para tal, a pesquisa foi feita em quatro turmas do sexto ano sendo dividido em duas partes, primeiramente foi aplicado um questionário em que se analisou por meio do modelo de van Hiele, em que nível do conhecimento geométrico cada aluno se encontrava. Em seguida apresentou-se para as turmas a explicação da geometria que consta para o sexto ano, porém a explicação partiu da Geometria Espacial para a Geometria Plana, com o intuito de buscar uma melhor compreensão por parte do educando.

6.2 PERFIL DOS PARTICIPANTES

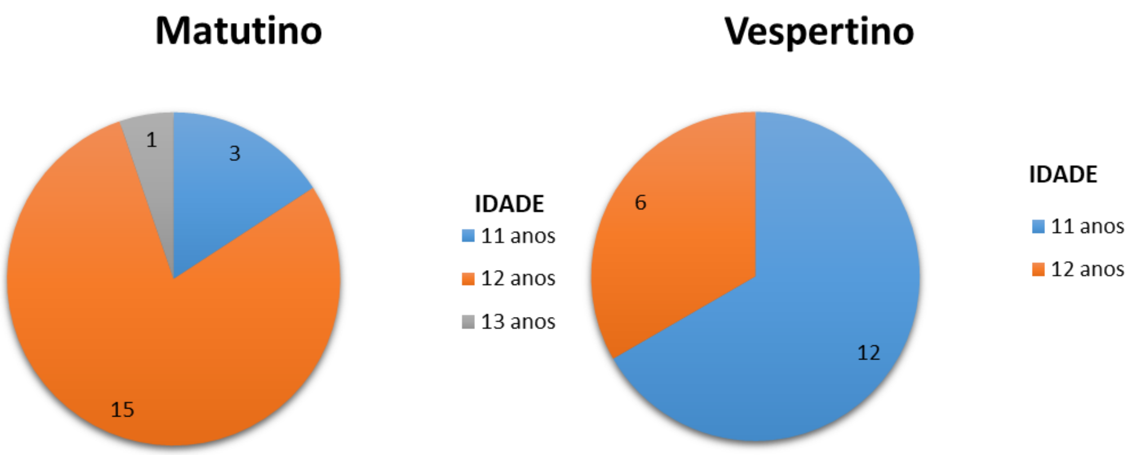
Os participantes desta pesquisa são alunos do sexto ano do Ensino Fundamental de duas escolas municipais da cidade de São Bento do Sul, ambas com duas turmas. Como solicitado pelo Comitê de Ética, houve as assinaturas dos Termos de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), sendo que a coleta dos dados ocorreu por meio de um questionário, contendo questões de Geometria, separado em três níveis, bem como aulas ministradas durante um mês para a explanação do Ensino da Geometria utilizando sólidos geométricos confeccionados na impressora 3D. Nas turmas abordadas os educandos possuíam entre 10 e 13 anos idade, como mostra nos gráficos (1 e 2) a seguir:

Gráfico 1 – Idades dos alunos das Turmas 1 e 2



Fonte: Elaborada pela autora (2020).

Gráfico 2 – Idades dos alunos das Turmas 3 e 4



Fonte: Elaborada pela autora (2020).

A teoria de van Hiele servirá como uma ferramenta que permitirá extrair alguns dados sobre o ensino de Geometria, bem como as percepções que os educandos têm sobre esse conhecimento matemático. Este material é necessário para que depois de feita a coleta de dados possa se fazer uma análise mais aprofundada e assim discutir os resultados obtidos.

6.3 PROCEDIMENTOS GERAIS

Para a execução desta pesquisa, foram adotados os seguintes procedimentos metodológicos:

(1) Revisão de Literatura

Apresentamos a seguir um levantamento bibliográfico de modo a apontar as pesquisas em uma determinada área do conhecimento buscando apresentar os trabalhos que já foram feitos com finalidade de identificar e contrastar trabalhos similares e fontes de pesquisa que serão úteis para a realização da pesquisa.

As buscas por trabalhos relacionados a geometria e teoria de van Hiele foram feitas através da internet, na base de dados da SciELO, Bolema e PROFMAT, por meio dos seguintes descritores: *Ensino de Geometria, van Hiele e Construções Geométricas.* Estas palavras foram selecionadas após leituras sobre o tema, demonstrando ser mais adequadas para a construção do trabalho.

As primeiras palavras usadas na coleta de trabalhos foram "Ensino de geometria", sendo encontrados 92 resultados na plataforma SciELO. Como houve um número muito alto nesta plataforma, foi feito uma classificação pelos títulos analisando qual estava ao encontro desta pesquisa, ficando assim, apenas dois resultados tendo como respectivos títulos, "Que geometria ensinar? Uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças" (VALENTE, 2013) e "A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos" (ALMOULOUD et.al., 2004).

Valente (2013), em seu artigo, "*Que geometria ensinar? Uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças"*, refere-se ao ensino de Geometria para alunos dos primeiros anos escolares, levando em conta a caminhada da Geometria para o nível elementar. Analisa também, as propostas de alteração do ensino destas feitas na década de 1960, buscando mostrar a intenção que se tinha de modificar os conteúdos desse ramo da matemática.

"*A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos"* de Almouloud et.al. (2004), refere-se a um projeto de pesquisa financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), em que este artigo apresenta os principais resultados encontrados, tendo por objetivo investigar questões relacionadas ao aprendizado de Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental, buscando compreender as representações dos professores em relação ao papel da Geometria no desenvolvimento do aluno.

Na plataforma da revista Bolema, utilizando os descritos *Van Hiele e Construções geométricas*, foram selecionados um artigo de cada descritor, tendo como respectivos títulos “Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de van Hiele” (KALEFF; et.al.,1994) e “As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias” (FERREIRA; SOARES; LIMA, 2009).

Kaleff, et.al. (1994), em seu artigo “*Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de van Hiele”* faz uma pesquisa sobre o modelo de van Hiele referente ao pensamento geométrico, pois os autores observaram que muitos alunos que estavam cursando o último ano da graduação em Matemática ainda apresentam dificuldades no pensamento abstrato da Geometria. Enfatiza no texto que apesar desse modelo ser muito relevante para a aprendizagem da Geometria, existem poucas pesquisas sobre, principalmente no Brasil.

O seguinte artigo “*As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias”*, escrito por Ferreira, Soares e Lima, (2009), tem por objetivo investigar a contribuição dos ambientes de Geometria dinâmica na formação dos professores de Matemática, para assim, incentivá-los a ensinar a Geometria por meio de demonstrações. A Geometria dinâmica propõe que os ambientes devem possibilitar ao aluno o experimentar, visualizar, conjecturar, generalizar e demonstrar. Esta análise teve por base os estudos de Piaget (1983), de van Hiele (1959) e da Didática da Matemática (BROUSSEAU, 1986, DUVAL, 1995).

Já na base de dados das dissertações do PROFMAT foram encontradas 420 dissertações utilizando o descritor *Geometria,* destes todos os títulos foram analisados e selecionados dois, pois estão relacionados com o tema em questão, apresentando os seguintes títulos: “O ensino de geometria por meio de construções geométricas*”* (PIMENTEL, 2013) e “O ensino de geometria no sexto ano do ensino fundamental por meio de oficinas” (SILVA et al., 2016).

“O ensino de geometria por meio de construções geométricas”, trabalho de Dissertação escrita por Pimentel (2013), foi apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, tem por objetivo desenvolver uma alternativa metodológica para o ensino da Geometria a partir do nono ano (ensino fundamental) com o auxílio de régua e compasso para o ensino de construções geométricas. O trabalho foi dividido em dois momentos, o primeiro momento acorreu a aplicação de um questionário e o segundo momento as construções geométricas com a utilização de régua e compasso, limitando-se

apenas a figuras planas. No primeiro capítulo o autor apresenta em uma visão geral de como, porque e de que forma desenvolveu o trabalho, no segundo capítulo demonstra como é feita as construções de figuras geométricas planas com a utilização de régua e compasso. Já no terceiro e último capítulo aplica as mesmas construções geométricas, mas com a utilização do *software* Geogebra.

Silva et al. (2016) escreve sua dissertação, com o título "*O ensino de geometria no sexto ano do ensino fundamental por meio de oficinas"*. Está é uma dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A autora relata brevemente a história da Geometria, destacando a Lei de Diretrizes e Bases da Educação nº 9394/96 e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática. Em seguida apresenta algumas alternativas do ensino da Geometria tendo por base o modelo de van Hiele. Fez-se um estudo propondo o Ensino de Geometria por meio de oficinas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, apresentando a Teoria de van Hiele como fundamento. Agrega também, a Geometria Plana e a Geometria Espacial, priorizando a observação dos ambientes que os cercam.

Dentre as pesquisas feitas foi selecionada uma dissertação do banco de dados da Universidade Estadual de Londrina (UEL), que vai ao encontro desta pesquisa, apresentando como título "Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração" (ANDRADE, 2011).

"*Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração"* escrita por Andrade (2011), é uma dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade de Londrina que teve por objetivo compreender como os conceitos da Geometria demonstrativa eram recepcionados. Faz-se uma breve investigação histórica da Geometria grega e apresenta duas propostas para a intervenção didática. Também realizam um estudo buscando causas que justifiquem a ausência ou o pouco estudo da Geometria demonstrativa.

Durante a busca por artigos científicos que pudessem acrescentar no momento da análise dos dados coletados, foram encontrados três artigos que vão ao encontro dessa dissertação. Utilizando a ferramenta de busca intitulada Google Scholar com o descritor "apreensões em geometria" e depois de uma leitura cuidadosa do título e do resumo, os artigos selecionados apresentam os seguintes títulos: "Estudo das apreensões e dos olhares em geometria"(MORETTI, 2013), "Semiosfera do olhar: Um espaço possível para Aprendizagem da Geometria" (MORETTI, 2013) e "Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras” (MORETTI; BRANDT, 2015).

O artigo intitulado “Estudo das apreensões e dos olhares em geometria” escrito pelo professor Dr. Méricles Thadeu Moretti, publicado no VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – ULBRA, realizado na cidade de Canoas – Rio Grande do Sul, no ano de 2013, discorre sobre a importância do olhar para a construção de todo o pensamento geométrico, visto que cada vez mais está assumindo um papel decisivo para o ensino e também para a vida cotidiana. Bem como, descreve as apreensões geométricas propostas por Duval e os olhares icônicos (botanista e agrimensor) e os olhares não-icônicos (construtor e inventos).

Neste mesmo sentido, o artigo, “Semiosfera do olhar: Um espaço possível para Aprendizagem da Geometria”, também escrito por Moretti no ano de 2013, publicado na Revista de Ensino de Ciências e Matemática – Acta Scientiae, volume 15, nº 2, refere-se sobre as principais ideias de aprendizagem da geometria: capacidade espacial em Frostig e Horne (1964), Hoffer (1977) e os olhares icônicos e não-icônicos de Duval, unidos para formar, o que foi denominado de Semiosfera do olhar, referenciando-se a Lotmann (2005). Além disso, o autor reforça a importância do olhar para a aprendizagem em geometria, principalmente nos anos iniciais do Ensino fundamental.

Seguindo o mesmo raciocínio dos dois artigos de Moretti, este estudo intitulado “Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras” escrito pelo prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti e pela prof. Dr. Célia Finck Brandt no ano de 2015 e publicado no III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil - São Paulo, refere-se as ideias de Duval sobre as apreensões e os diferentes tipos de olhares geométricos auxiliando para um ambiente promissor ao estudo da geometria, tendo como referências Lotman (2005). O presente artigo mostra diversos problemas geométricos como intuito de demonstrar a importância dos tratamentos matemáticos para que ocorra as apreensões em geometria, bem como, as interações entre os olhares.

Os artigos e as dissertações aqui relatados serviram também como embasamento teórico, já que estes possuem conteúdos similares, contribuindo na construção desta dissertação.

(2) Aplicação dos sólidos geométricos

Todos os sólidos geométricos foram testados e analisados em quatro turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, de duas escolas municipais da cidade de São Bento do Sul-SC, com o objetivo de coletar informações e sugestões para um melhor desenvolvimento das questões contidas no produto educacional, tanto para os níveis de aprendizagem do modelo de van Hiele, quanto da sequência didática das atividades propostas.

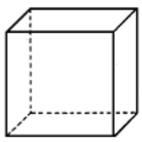
(3) Análise qualitativa da aplicação dos sólidos geométricos

As atividades foram aplicadas e posteriormente analisadas qualitativamente tendo por finalidade aperfeiçoar o produto educacional elaborado, bem como contribuir na compreensão dos conceitos geométricos no viés da Geometria tridimensional para a bidimensional.

(4) Análise a Priori

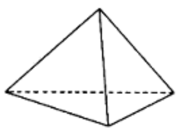
Questão 1 – Como é o nome da FACE de cada sólido geométrico a seguir:

1)



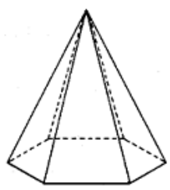
QUADRADO

2)



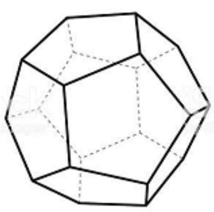
TRIÂNGULO

3)



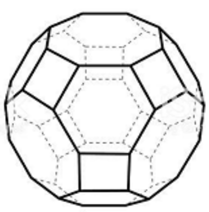
TRIÂNGULO E HEXAGONO

4)



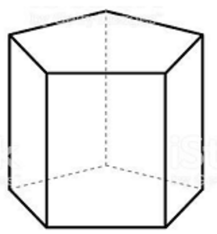
PENTAGONO

5)



QUADRADO E HEXÁGONO

6)



RETÂNGULO E PENTÁGONO

Possíveis respostas:

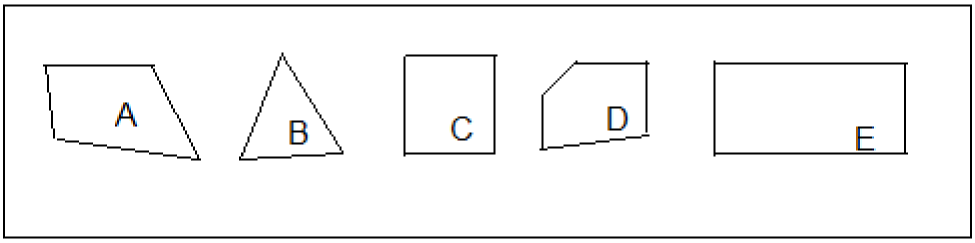
<u>Aluno X</u> : 1)Cubo; 2) Pirâmide; 3) Pirâmide; 4) Sem resposta; 5) Bola; 6) Quadrado.

<u>Aluno Y</u> : 1)Quadrado; 2) Triângulo; 3) Triângulo; 4) Não sei; 5) Quadrado;
6) Quadrado.

<u>Aluno Z</u> : 1)Quadrado; 2) Triângulo; 3) Triângulo; 4) Pentágono; 5) Quadrado e Hexágono; 6) Retângulo.

Segundo o modelo de van Hiele, o aluno X não compreendeu o significado aplicado a palavra FACE para a Geometria, olhando a imagem como um todo, não sendo capaz de responder a pergunta corretamente, para tal, não se encontra no nível básico. O aluno Y consegue reconhecer pouco mais da metade das faces, porém, não consegue lembrar todas as nomenclaturas das figuras geométricas por sua aparência global. Por sua vez, o aluno Z, além de reconhecer as diferenças existentes entre o quadrado e o retângulo, soube também a nomenclatura de todas as faces dos sólidos em questão, demonstrando assim, que possui características referente ao nível básico.

Questão 2 – Analise a figura abaixo e identifique o(s) quadrilátero(s):



R: ____

Possíveis respostas:

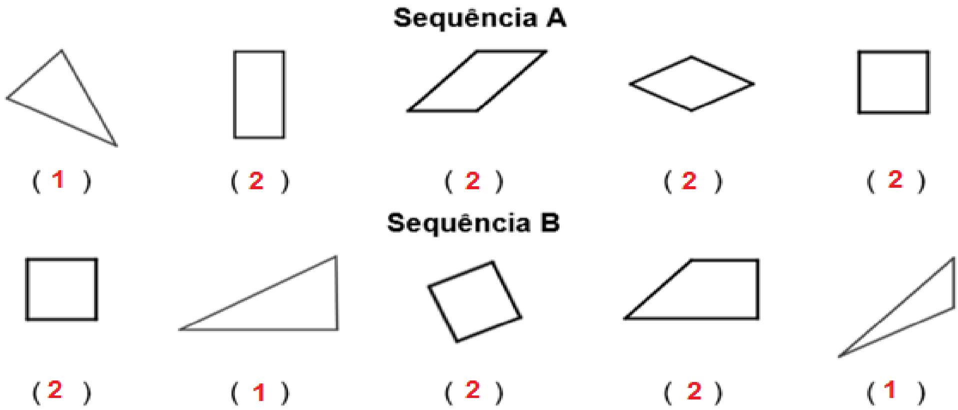
<u>Aluno X:</u> apenas C

<u>Aluno Y:</u> C e E

<u>Aluno Z:</u> A, C e E

O aluno X tem imagem conceitual do quadrilátero apenas como a figura similar a palavra quadrilátero a quadrado, e não é capaz ainda de reconhecer que a figura E também é um quadrilátero, e, portanto, ainda não atingiu o nível básico. O aluno Y consegue reconhecer as duas figuras que representam um quadrilátero, mas ainda não está claro o significado de quadrilátero (quatro lados paralelos ou não), dessa forma apenas baseou-se na aparência (nível de reconhecimento). Já o aluno Z compreendeu a característica dos quadriláteros, reconhecendo também, a figura A, que seria uma característica de raciocínio no nível de análise.

Questão 3- Analise as figuras planas e classifique-as como: (1) triângulo;
(2) quadrilátero; (3) pentágono.



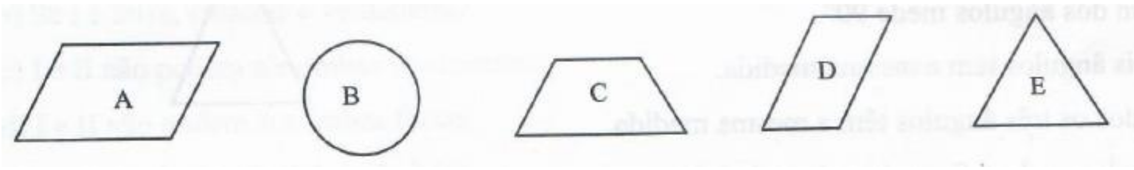
Possíveis respostas:

<u>Aluno X:</u> 1 – 2 – 2 – 3 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3 – 1

<u>Aluno Y:</u> 1 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 1 – 2 – 2 – 1

O aluno X tem a imagem dos quadriláteros apenas em uma posição, dessa forma, quando se depara como uma figura irregular não sabe como classificar, não sendo capaz de reconhecer todas as figuras e, portanto, ainda nem atingiu o nível básico. O aluno Y, por sua vez, reconhece todas as figuras, independentemente de sua posição, o que é característica do nível do reconhecimento.

Questão 4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

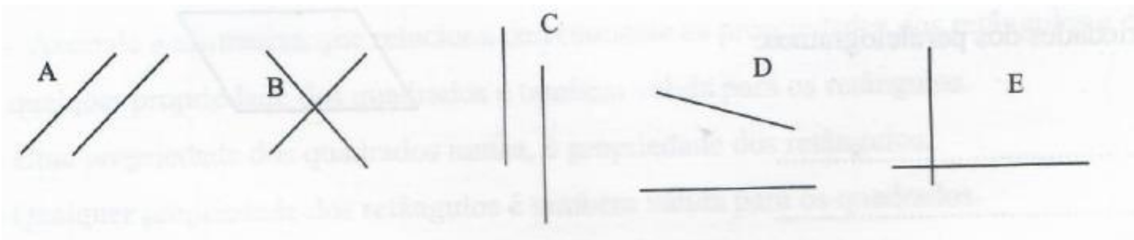


Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas:
Aluno X: B e/ou E
Aluno Y: C
Aluno Z: A e D

O aluno X ainda não reconhece a imagem conceitual de um paralelogramo, muito menos compreende suas características. O aluno Y, analisou pela aparência global da figura e confundiu o paralelogramo com o trapézio. Já o aluno Z, conseguiu entender e visualizar todas as características de um paralelogramo presentes na figura A, bem como compreende que a figura D também é um paralelogramo apesar de não estar representada da forma tradicional.

Questão 5 – Assinale os pares de retas paralelas:

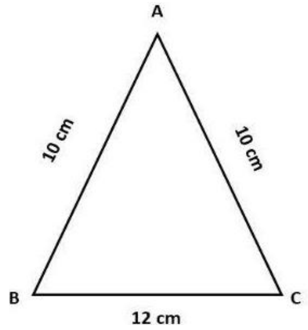


Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas:
Aluno X: B e/ou D e/ou E
Aluno Y: C
Aluno Z: A e C

O aluno X não compreendeu o conceito de retas paralelas, não atingindo o nível básico do reconhecimento. Já o aluno Y, compreendeu o conceito de uma forma visual "tradicional", não acertando a questão por inteiro. O aluno Z, além de reconhecer a figura C, ainda percebeu que na figura A também se encontram retas paralelas.

Questão 6 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

b) Um dos ângulos mede 90°.

c) Dois ângulos têm a mesma medida.

d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

Fonte: Adaptado Nasser e Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas:

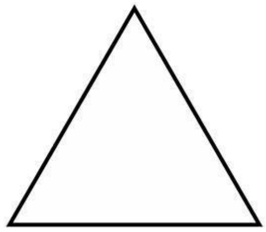
Aluno X: A ou B

Aluno Y: E

Aluno Z: C

O aluno X ainda não conhece as propriedades dos diferentes tipos de triângulos: retângulo, escaleno, equilátero e isósceles. Da mesma forma o aluno Y. Por outro lado, o aluno Z soube interpretar a questão e analisar as características presentes em um triângulo isósceles.

Questão 7 – Todo triângulo equilátero tem suas medidas dos lados iguais. Abaixo temos um exemplo de um triângulo equilátero.



Assinale a opção correta sobre os triângulos equiláteros:

a) Todos seus ângulos medem 30º.
b) Todos os ângulos têm a mesma medida.
c) Um ângulo mede 90º.
d) Nenhuma das afirmativas está correta.

Fonte: Adaptado Nasser e Sant'anna (2010, p. 95)

Possíveis respostas:
Aluno X: A ou C
Aluno Y: D
Aluno Z: B

Da mesma forma que na questão anterior o aluno X e Y ainda não conhecem as características básicas dos diferentes tipos de triângulos: escaleno, equilátero e isósceles. Por sua vez, o aluno Z soube interpretar a questão e analisar as características presentes em um triângulo equilátero.

Questão 8 – Se em um triângulo possui um ângulo interno de 90º, ele é um:

a) Triângulo equilátero.
b) Triângulo acutângulo.
c) Triângulo retângulo.
d) Triângulo obtusângulo.

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p. 96)

Possíveis respostas:
Aluno X: A, B ou D
Aluno Y: C

Neste caso, os alunos podem até reconhecerem visualmente um triângulo que possua um ângulo interno medindo 90º (nível do reconhecimento), porém não conhece suas propriedades, aluno X. Contudo, o aluno Y reconheceu as características de um triângulo retângulo e soube responder corretamente.

Questão 9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

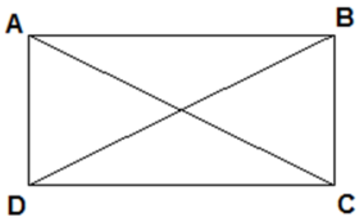
1 – ....
2 – ....
3 – ....

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p. 96)

Possíveis respostas corretas:
1 – Possui lados opostos paralelos;
2 – Possui ângulos opostos iguais;
3 – Todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo;
4 – Todo paralelogramo é um quadrilátero;
5 – O losango é um paralelogramo;
6 – As diagonais de um paralelogramo cruzam-se em seus pontos médios.

Esta era uma questão com um certo grau de dificuldade para alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, porém, a priori esperava-se que conseguissem identificar as características relacionadas a aparência global de um paralelogramo. Para tal, as respostas foram separadas por categorias, em que a primeira consta descrições apresentadas pelos educandos que não se encontravam no Nível Básico – Reconhecimento, já que não reconheceram sequer as características da figura. O nível Básico é representado pelos indivíduos que descreveram pelo menos uma característica existente, já o nível 2, encontra-se o educando que além da característica aparente percebeu também, uma propriedade. Podendo-se concluir, pelo modelo de van Hiele, que apenas um pesquisado demonstrou conhecimentos relacionados pertencentes ao segundo nível.

Questão 10 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



a) Têm quatro ângulos retos.

b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p. 96)

Possíveis respostas:

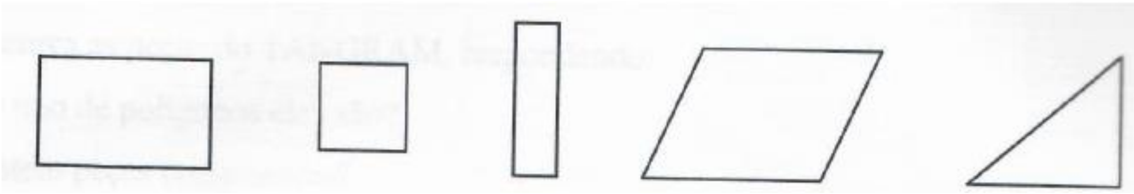
Aluno X: A, B ou C

Aluno Y: D ou E

Aluno Z: A, B e C

O aluno X consegue reconhecer apenas uma das características do retângulo, não analisando todas as sentenças adequadamente, ou ainda "chutou" uma resposta. O aluno Y ao assinalar a resposta D confundiu a característica do retângulo com uma característica do quadrado ou ainda não lembrou que para a alternativa estar certa se faz necessário a palavra "opostos" – tem lados <u>opostos</u> iguais, por isso também, a alternativa E não está correta. Já o aluno Z, buscou analisar todos os detalhes, respondendo corretamente, características do segundo nível.

Questão 11 – Circule a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:



1 2 3 4 5

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p. 96)

Possíveis respostas:

Aluno X: 5

Aluno Y: 1, 3 e 4

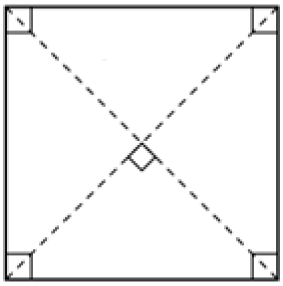
Aluno Z: 1 e 3

Aluno W: 1, 2 e 3

O aluno X não compreende as características básicas de um retângulo, não atingindo o nível do reconhecimento. O aluno Y analisou somente pela semelhança esquecendo que um retângulo possui ângulos retos. Já o aluno Z consegue reconhecer as duas figuras que representam um retângulo, baseando apenas na aparência global (reconhecimento), ou buscou averiguar os lados e ângulos, características do nível da análise. Por sua vez, o aluno W além de reconhecer as figuras 1 e 3 percebeu que o quadrado 2 satisfaz as características de um retângulo ou lembrou da seguinte propriedade: "todo quadrado é também um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado", características essas do nível de abstração.

Questão 12 – Na figura a seguir é possível visualizar um quadrado e suas diagonais formando triângulos. Analisando os triângulos, quanto aos lados e ângulos, respectivamente, podemos concluir que são triângulos:

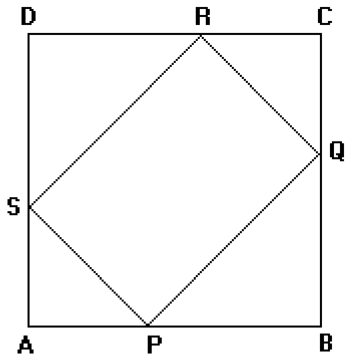
a) Isósceles e retângulo.
b) Escaleno e obtusângulo.
c) Equilátero e retângulo.
d) Escaleno e acutângulo.
e) Isósceles e obtusângulo.



Possíveis respostas:
Aluno X: B ou D
Aluno Y: C ou E
Aluno Z: A

O aluno X ao responder B ou D realmente não conhece os nomes dos triângulos relacionados aos lados nem aos ângulos. Para o aluno Y tem-se duas opções: ele não sabia nenhuma das definições e marcou qualquer resposta ou somente sabia um dos conceitos, caracterizando-o no nível da análise. Por conseguinte, o aluno Z soube responder corretamente, porém não dá a certeza de que ele saiba cada conceito, podendo assim ele acertado por sorte ou saber as definições o que caracteriza o nível da abstração.

Questão 13 – Como você expressaria em palavras a figura abaixo?



Possíveis respostas:

Aluno X: Um quadrado e um retângulo;

Aluno Y: Um retângulo dentro de um quadrado. As pontas do retângulo encostam-se ao quadrado formando quatro triângulos. O quadrado possui quatro lados iguais, quatro ângulos reto.

Aluno Z: Um retângulo de vértices PQRS está inscrito em um quando de vértice ABCD, em que os vértices do retângulo se encostam às laterais (arestas) do quadrado, formando assim, quatro triângulos de vértices APS, BPQ, CQR e DRS.

Esta é uma questão aberta, o que leva a muitas respostas, porém a forma como forem respondidas dirá em que nível o aluno se caracteriza. O aluno X, por exemplo, é muito simplista e relata somente o básico do visual (reconhecimento), o aluno Y já consegue perceber algumas propriedades (análise) e por fim o aluno Z é mais detalhista e possui uma argumentação lógica informal.

Questão 14 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97) Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? ....

Por que?..

Possíveis respostas:

Aluno X: Não, porque não tem ângulos retos;

Aluno Y: Sim, porque tem quatro lados;

Aluno Z: Sim, porque o retângulo é um tipo especial de paralelogramo. O retângulo possui ângulos opostos iguais, lados opostos paralelos e de mesma medida, possui quatro ângulos e suas diagonais cruzam-se em seus pontos médios.

No momento em que o aluno diz SIM é possível perceber que ele possui algum conhecimento referente a retângulo e paralelogramo, analisando as figuras em termos de seus componentes (análise). O aluno X, não compreendeu que todo retângulo é também um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo. O aluno Y não está errado, pois essa é uma das características de ambos, porém não justifica a resposta (análise), já o aluno Z apresenta em sua justificativa, propriedades que definem um retângulo como um paralelogramo.

Questão 15 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:
a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Possíveis respostas:
Aluno X: A, B ou D
Aluno Y: E
Aluno Z: C

No momento em que o aluno assinala A, B, D ou E que é o caso do aluno X e Y, percebe-se que algumas características presentes no quadrado e retângulo ainda não estão bem claras. Por conseguinte, o aluno Z analisa as propriedades do retângulo e as propriedades do quadrado e verifica que qualquer propriedade do retângulo satisfaz para um quadrado.

7 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados obtidos dos questionários, baseados no modelo de van Hiele, respondidos pelos sujeitos que participaram desta pesquisa e também as atividades propostas durante as aulas ministradas.

Após a correção e análise das questões de ambos os níveis, identificaram-se algumas falhas na aprendizagem da Geometria em diversos momentos. Para melhor compreender e averiguar o nível de conhecimento da Geometria obtida por cada educando foram utilizados os estudos de Raymond Duval sobre a semiótica.

7.1 QUESTÕES DO MODELO DE VAN HIELE SOBRE O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

A seguir consta o questionário que foi aplicado nas quatro turmas do sexto ano do Ensino fundamental sobre o ensino e aprendizagem de Geometria tendo como base o modelo de van Hiele, que teve por objetivo verificar em qual nível de raciocínio cada criança se encontra segundo o modelo de van Hiele. Este é um questionário em que algumas questões foram retiradas adaptadas por Nasser (1992) e outras de autoria própria, porém as questões foram desenvolvidas baseando-se nos livros “Geometria na era da imagem e do movimento” coordenado por Maria Laura M. Leite Lopes e Lilian Nasser em 1996 e “Geometria segundo a Teoria de van Hiele” coordenado por Lilian Nasser e Neide F. Parracho Sant’anna (2010) – ambos fazem parte do Projeto Fundão, que neste caso serão aplicados com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental.

O questionário, já testado em sala de aula, serve como auxílio para o professor verificar em qual momento da aprendizagem da Geometria encontram-se as dificuldades de seus alunos. As questões propostas visam analisar os níveis um, dois e três. O questionário é dividido em três partes (testes) para identificar os três primeiros níveis de van Hiele e para tal, cada teste contém cinco questões, sendo que cada folha deve ser desenvolvida de uma vez, pois assim, os testes mais avançados não influenciarão na resolução das questões mais simples (NASSER; SANT’ANNA, 2010).

Baseando-se na forma como Nasser (1992) desenvolveu cada teste, foram desenvolvidas e adaptadas questões para serem aplicadas no sexto ano do ensino fundamental. As primeiras questões 1, 2, 3, 4 e 5 buscam verificar o primeiro nível - Reconhecimento - dos alunos sobre a Geometria; as questões 6, 7, 8, 9 e 10 referem-se ao segundo nível - Análise; as questões 11, 12, 13, 14 e 15 identificam se os alunos se encontram no terceiro nível – Abstração. Considera-se que a criança alcançou determinando nível quando ela acertar pelo menos 60% das questões do teste, ou seja, se ela acertar 3 ou mais das 5 questões propostas. (NASSER; SANT'ANNA, 2010).

Segundo Nasser e Sant'anna (2010, p. 8), pode-se por meio do modelo de van Hiele encontrar explicações para as dificuldades apresentadas pelos educandos durante as aulas de Geometria, dessa forma, os alunos que apresentam certa dificuldade "não tem condições de acompanhar um curso dado num nível de van Hiele mais elevado do que o dominado por eles", em que a maioria dos livros didáticos do Ensino Médio exige raciocínio com características dos níveis de abstração e dedução, ou seja, terceiro e quarto nível de van Hiele. Porém, sabe-se que muitos alunos chegam ao 6º e 7º ano com conhecimentos mínimos de Geometria, enquadrando-se no nível de reconhecimento, ou nem chegando nesse nível.

Em busca de suavizar a divergência de níveis, devem ser adotadas duas estratégias de ensino: "desenvolver atividades que propiciem a elevação e a unificação dos níveis dos alunos da turma, e adotar para a instrução um nível mais baixo, o mais próximo possível do nível atingido pela turma". (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 8).

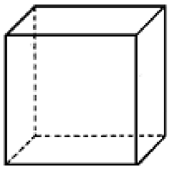
Para melhor exemplificar, após cada questão do questionário constará uma explicação das possíveis respostas dadas pelos alunos, bem como a análise das respostadas reais dadas pelos alunos durante o teste. As questões propostas neste questionário podem ser respondidas em diversos níveis, pois o que realmente importa e caracteriza o nível de van Hiele que o aluno se encontra é a resposta, mostrando a forma de pensar do aluno. Caso o educando apenas fixe-se na aparência global encontra-se no nível do reconhecimento, agora, se além de olhar para a aparência e descreve os elementos da figura – nível de análise. No momento em que o educando consegue argumentar informalmente apresenta-se no nível de dedução.

Paralelamente as classificações apresentadas por van Hiele, as questões foram analisadas e discutidas segundo os estudos apresentados por Duval, buscando identificar as falhas encontradas no desenvolvimento de cada pensamento geométrico, pois as formas geométricas abordadas, acabam por vezes sendo distorcidas, sendo assim, um empecilho para a aprendizagem.

7.1.1 Questões do primeiro nível

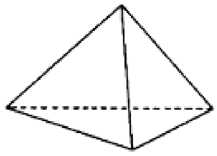
Questão 1 – Como é o nome da FACE de cada sólido geométrico a seguir:

1)



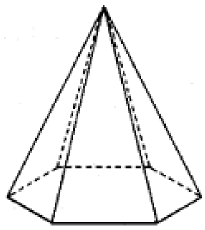
QUADRADO

2)



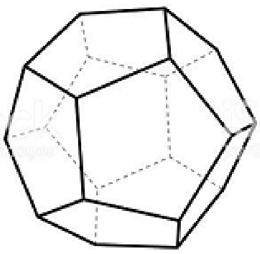
TRIÂNGULO

3)



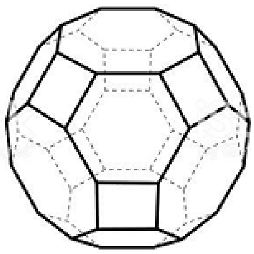
TRIÂNGULO E HEXAGONO

4)



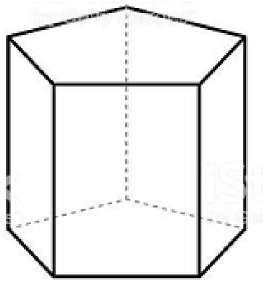
PENTAGONO

5)



QUADRADO E HEXÁGONO

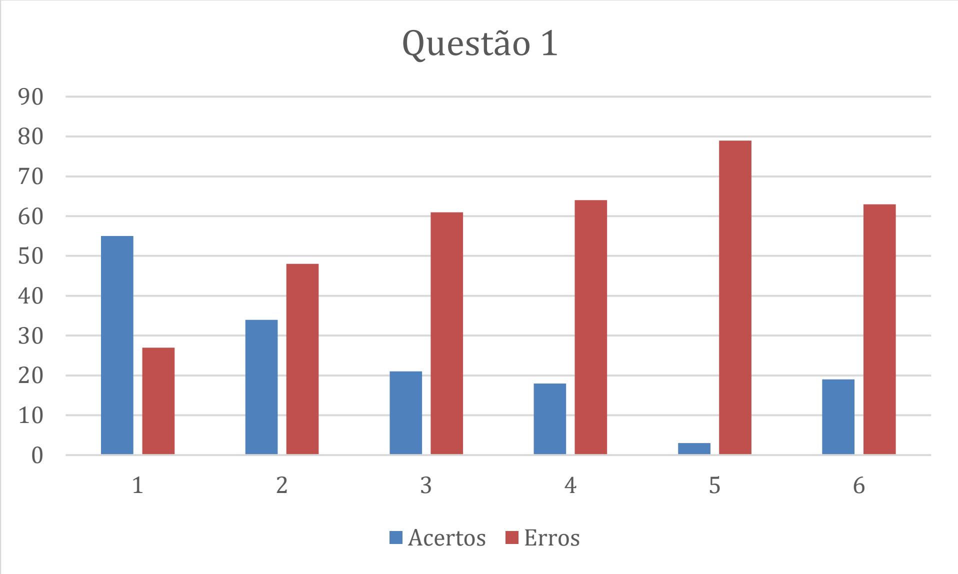
6)



RETÂNGULO E PENTÁGONO

Em relação as respostas obtidas, a assertividade foi muito baixa, visto que esta questão se refere a um assunto muito trabalhado em anos anteriores.

Gráfico 3 – Respostas da Questão 1



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

No gráfico 3 pode-se observar que muitos dos alunos não conseguiram acertar as faces das três últimas figuras, demonstrando assim que ocorreu uma falha no ensino desta em anos anteriores, pois nomenclatura de figuras geométricas é um assunto muito trabalhado desde os anos iniciais, como consta na BNCC (2018, p. 272), para o Ensino Fundamental Anos Iniciais espera-se que os alunos "[...] indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Espera-se, também, que nomeiem e comparem polígonos, por meio de propriedades relativas aos lados, vértices e ângulos."

Buscando uma melhor compreensão dos erros cometidos pelos educandos, estes foram separados em grupos, como consta no quadro 1 e, complementado pelo quadro 2. Dessa forma, pode-se observar que em ambas as turmas a maioria dos alunos respondeu incorretamente, ou seja, conseguiram identificar uma ou duas figuras geométricas solicitada pelo enunciado.

Quadro 1 – Entendimento do Enunciado

Correto	De três a cinco respostas corretas
Incorreto	Até duas respostas corretas
Totalmente correto	Seis respostas corretas
Totalmente incorreto	Seis respostas incorretas

Fonte: Elaborado pela Autora (2020).

Quadro 2 – Acertos e erros referentes a Questão 1

Turmas	Correto	Incorreto	Totalmente Correto	Totalmente Incorreto
Turma 01	9	9	0	6
Turma 02	2	19	0	1
Turma 03	4	10	1	4
Turma 04	5	9	0	3

Fonte: Elaborado pela Autora (2020).

Destaca-se ainda que nas quatro turmas, ocorreu maior assertividade no primeiro sólido geométrico apresentado (cubo), respondendo corretamente a nomenclatura da face em questão, o quadrado. Porém, nas outras formas geométricas apresentadas a grande parte dos educandos não soube dizer qual era o nome da face, principalmente as de números 4 e 5. Da mesma forma, observa-se que 14 alunos demonstraram não conhecer os elementos presentes em um sólido geométrico.

Analisando as turmas, busca-se discutir o porquê de muitos dos alunos apresentarem dificuldades em responder a questão. Ao analisar as respostas obtidas, pode-se perceber que os educandos não tinham consigo o conceito de "face" bem definido, acarretando assim, em respostas que não condiziam com o que a questão estava solicitando, como pode-se observar em algumas respostas a seguir.

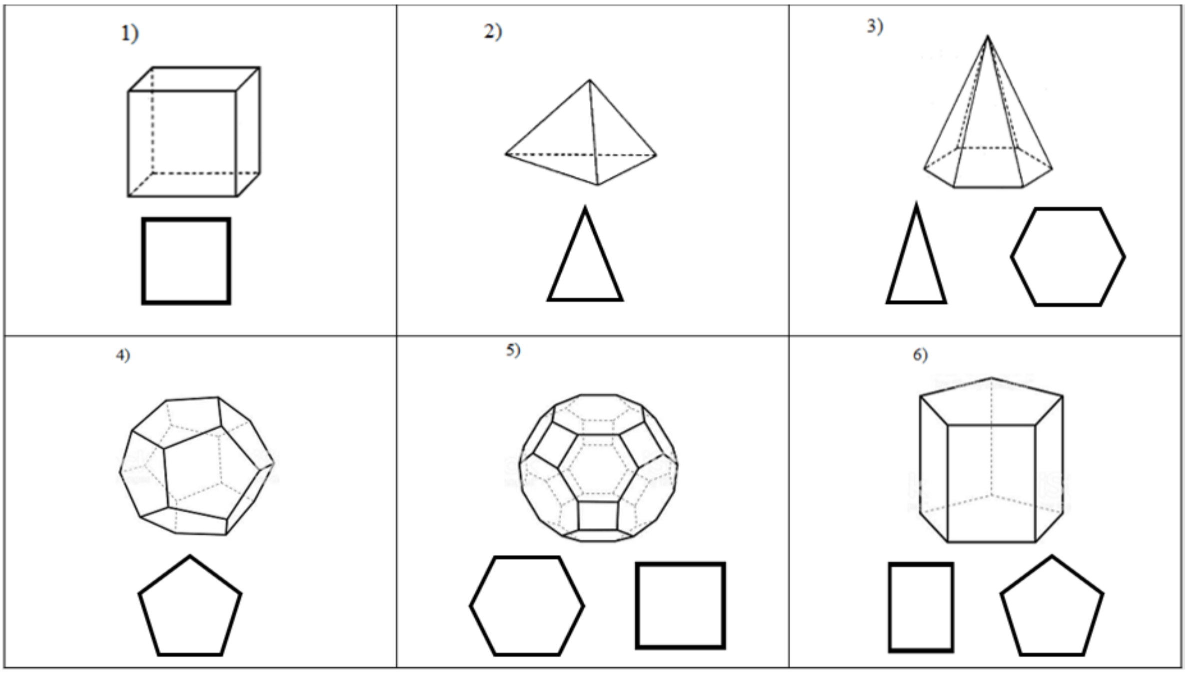
Explorando os sólidos geométricos por meio da perspectiva de Duval, pode-se perceber claramente as apreensões em Geometria envolvidas na questão, uma vez que essa questão contemplava um registro figural, que de acordo com o autor a atuação da apreensão perceptiva é imediata e automática destacando assim, a forma da imagem e, portanto, influenciando o pensamento dos educandos. Entretanto, o contexto geométrico desse exercício ao exigir o reconhecimento de uma figura geométrica de dimensão inferior a imagem dada se faz necessário o acesso ao estatuto do objeto em questão e nesse caso a interação da apreensão discursiva é essencial para que ocorra de modo eficiente a desconstrução de cada sólido, favorecendo assim, o reconhecimento do poliedro idealizado no exercício (DUVAL, 2012, 120).

Salienta-se ainda, que a ação da desconstrução dimensional estando correlacionada com outras atividades cognitivas em particular com as apreensões perceptiva e discursiva favorecem o reconhecimento e a organização perceptiva da figura, ou seja, o aluno é capaz de realizar a transformação da dimensão 3 (3D) para a dimensão 2 (2D), sendo que esta ação contribui para a construção de um processo resolutivo que esteja de acordo com a proposta da atividade.

De modo geral, a resolução permeia pela desconstrução dos objetos tridimensionais em figuras planas poligonais que constituem as faces dos sólidos, o que implica na coordenação do campo perceptivo com os elementos figurais, ou seja, a interação entre as apreensões perceptivas e discursivas, que de acordo com Duval (2005), esse desenvolvimento da resolução passa pelo processo cognitivo de visualização matemática: a desconstrução dimensional de formas. A construção de figuras, ou seu uso heurístico, só faz sentido na medida em que eles fazem parte desta operação de visualização matemática.

Para tal, ao ler o enunciado e deparar-se com a palavra FACE, o indivíduo precisa fazer uma conversão mental da língua natural para a figural, conhecendo claramente que face representa cada figura plana que compõe o sólido. Logo, é crucial a desconstrução de cada dimensão 3 (3D) em uma dimensão 2 (2D), como é possível visualizar na Figura 5 a seguir:

Figura 5 – Modificação da dimensão 3 para a dimensão 2.



Fonte: Elaborado pela Autora (2020).

Com o intuito de compreender as respostas obtidas na questão 1 os participantes foram divididos conforme as respostas descritas pelos mesmos, seguindo os critérios descritos no quadro 3.

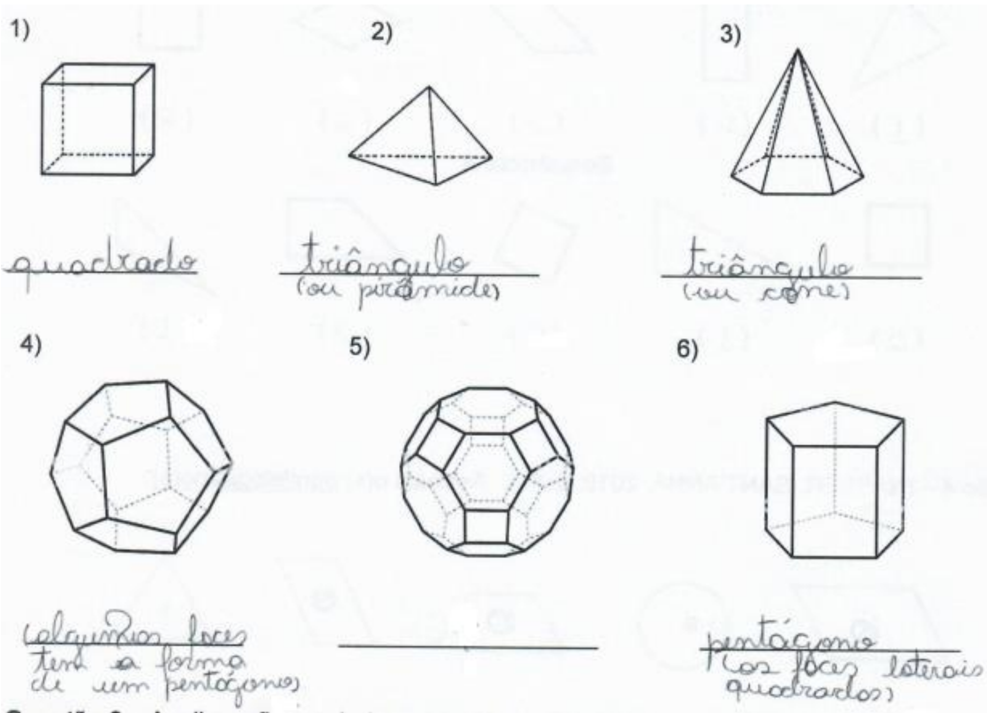
Quadro 3 – Característica obtidas nas respostas

2D		3 ou mais respostas caracterizando a figura em duas dimensões
3D		3 ou mais respostas caracterizando a figura em três dimensões
1D		3 ou mais respostas caracterizando a figura em uma dimensão
Sem respostas		4 ou mais figuras sem resposta
Conflitos		Quando nenhuma das características é repetida em 3 ou mais respostas

Fonte: Elaborado pela Autora (2020).

Analisando a questão, era esperado que os estudantes a partir da leitura do enunciado e a visualização dos sólidos geométricos, conseguissem responder corretamente pelo menos três ou mais faces das figuras apresentadas, sendo caraterizados na opção 2D, mencionado no quadro 3. Contudo, 41 alunos obtiveram como respostas as figuras 2D, mas apenas um indivíduo utilizou a desconstrução e as apreensões para solucionar a questão, obtendo sucesso. Porém, percebe-se que mesmo tendo feito a desconstrução da figura 3D → 2D, houve insegurança sobre o significado da palavra FACE em Geometria, como se pode observar na Figura 6

Figura 6 – Resposta do Aluno 39

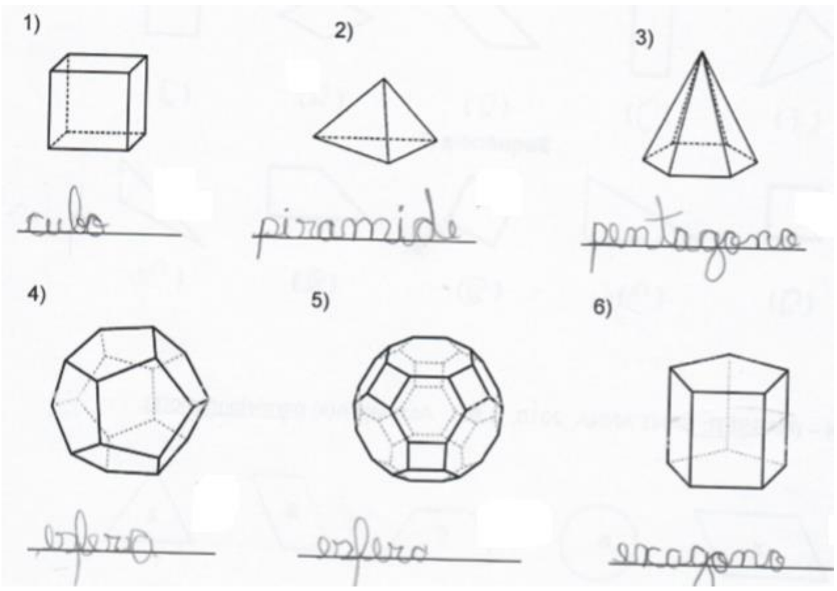


Fonte: Folha de Registro do aluno 39, parte 1, Exercício 1, 2019.

Outra categoria encontrada, formam respostas em sua forma tridimensional (3D), concluindo que não houve entendimento na percepção discursiva, contabilizando 18 alunos na categorização 3D. Analogamente, a questão não foi compreendida pelos educandos que não responderam a questões.

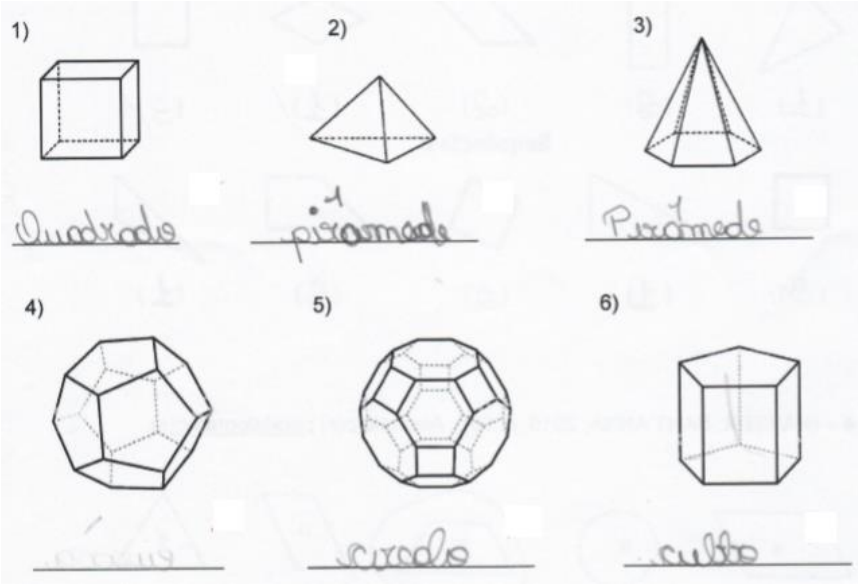
As figuras 7, 8 e 9 mostram respostas categorizadas na dimensão 3, visto que os alunos possuem conhecimentos sobre Geometria, porém não ficou claro o que se pretendia como resultado. Dessa forma, como previsto nas possíveis respostas segundo o modelo de van Hiele, foram analisadas as imagens por sua forma global, porém a apreensão discursiva se mostrou ineficiente em operacionalizar os elementos geométricos de modo que através da visualização pudesse assim, contemplar a proposta do exercício, portanto não se encontrando no nível básico.

Figura 7 - Resposta do Aluno 47



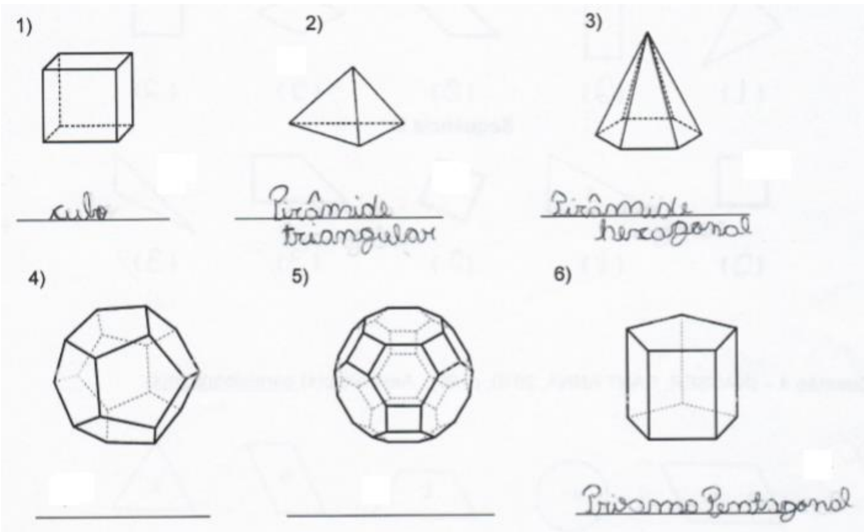
Fonte: Folha de Registro do aluno 47, parte 1, Exercício 1, 2019.

Figura 8 - Resposta do Aluno 49



Fonte: Folha de Registro do aluno 49, parte 1, Exercício 1, 2019.

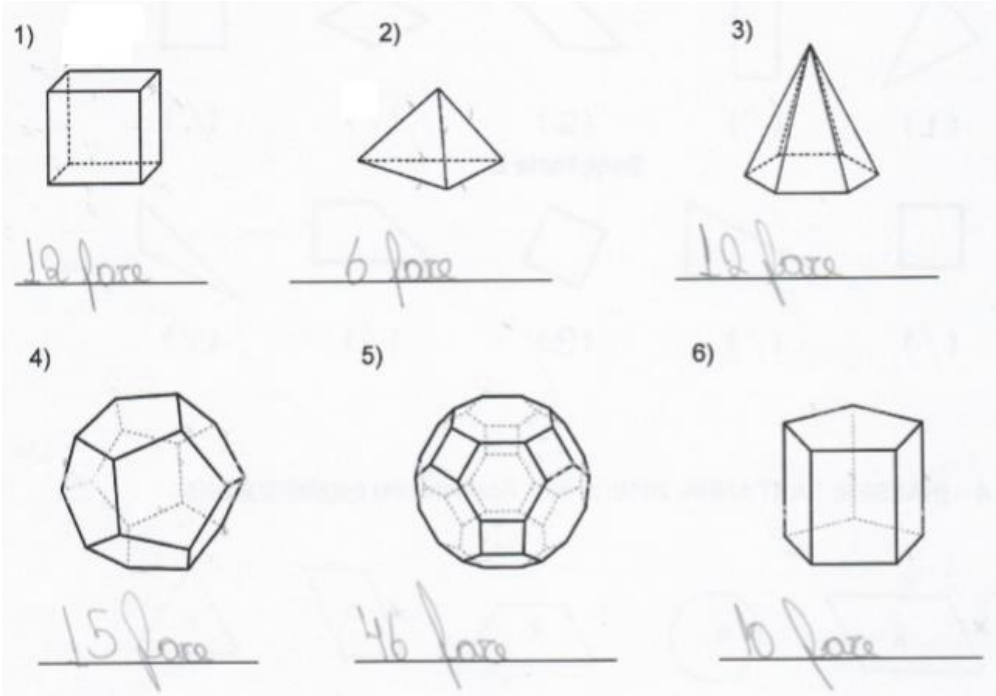
Figura 9 - Resposta do Aluno 55



Fonte: Folha de Registro do aluno 55, parte 1, Exercício 1, 2019.

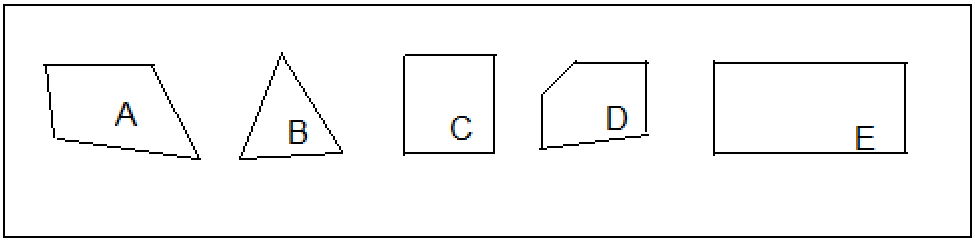
Aprender Geometria demanda uma coordenação do enunciado, que irá orientar o educando na utilização dos dados do problema e como poderá utilizá-los associados à figura. (MORETTI; BRANDT, 2020). Para tal, se exige um certo nível de pensamento cognitivo já estabelecido. A figura 10, mostra uma confusão cognitiva, pois este aluno tem o conhecimento que é possível contar a quantidade de faces e associou a palavra “face” ao total de faces. Porém, fez uma desconstrução das figuras passando da dimensão 3 para a dimensão 1 (3D 1D), ou seja, contabilizou as arestas de cada sólido, confundindo assim os elementos FACE e ARESTA.

Figura 10 - Resposta do Aluno 54



Fonte: Folha de Registro do aluno 54, parte 1, Exercício 1, 2019.

Questão 2 – Analise a figura abaixo e identifique o(s) quadrilátero(s):

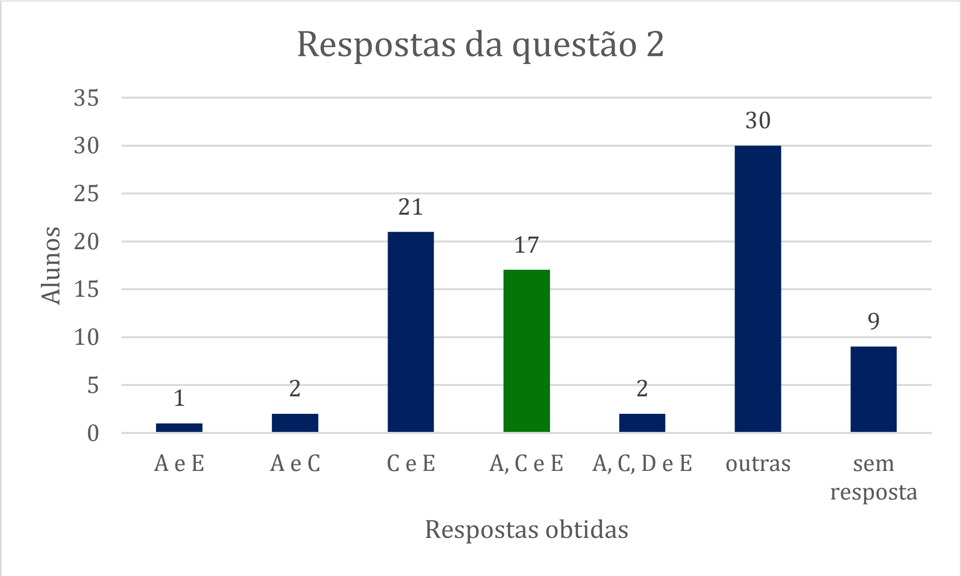


R: ____

Está questão nos leva a perceber como grande parte dos educandos ainda não consegue distinguir um quadrilátero das demais figuras geométricas.

O gráfico 4 a seguir retrata as respostas de todos os alunos referente a questão 02, levando a perceber que apenas 17 alunos acertaram esta questão por completo, não obstante, percebe-se também que apesar de não terem acertado a questão 21 alunos assinalaram as opções C e E corretamente, um aluno marcou as figuras A e C, e outro A e E, ou seja, estes educandos referem-se ao “aluno Y” citado nas possíveis respostas, em que reconhecem que o retângulo e o quadrado são quadriláteros, analisando apenas o lado visual das figuras, não lembrando que toda figura que possui quatro lados é um quadrilátero, independentemente da posição ou comprimento de seus lados, desde que sejam linhas fechadas.

Gráfico 4 – Respostas da Questão 2

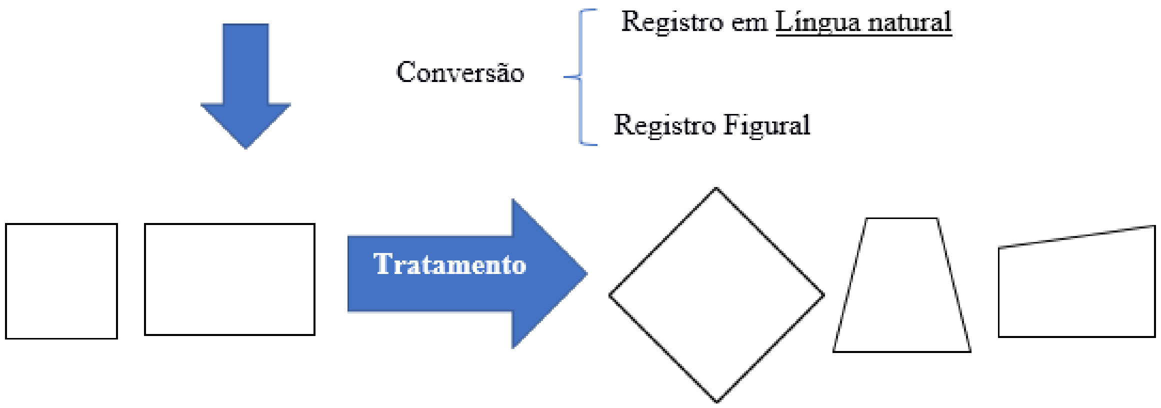


Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Para solucionar essa questão, os estudantes precisam recordar que as formas geométricas planas são formadas por unidades figurais elementares, neste caso, elementos da dimensão 1 (1D) e da dimensão 0 (0D). Duval (apud MORRTETI; BRANDT, 2020, p.194) explica que “**uma figura geométrica é sempre uma configuração de ao menos duas unidades figurais elementares.**” Ou seja, utilizando a desconstrução, encontrar-se-á os elementos figurais. Contudo, pode-se haver um reconhecimento e interpretação dos elementos da figura de forma imediata – apreensão perceptiva e discursiva – na qual um olhar botanista consegue reconhecer o contorno de formas e diferenciá-las.

Apreensão perceptiva e discursiva:

QUADRILÁTERO → FIGURAS QUE SÃO FORMADAS POR QUATRO SEGMENTOS DE RETA

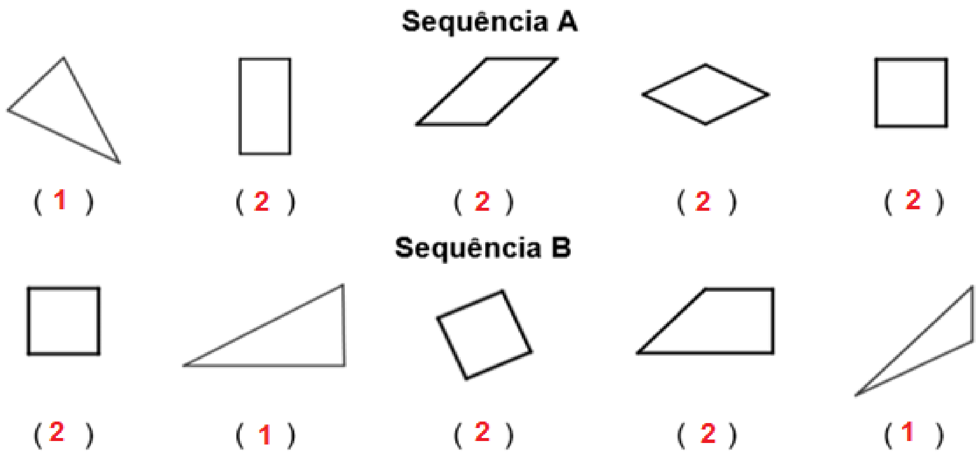


Elementos figurais podem ser representados como:

Logo, esta figura geométrica é um quadrilátero.

Dessa forma, o grupo de alunos que optou pelas figuras representadas pelas letras B e/ou D, não obtiveram sucesso na apreensão perceptiva e discursiva, uma vez que não associaram a palavra quadrilátero à quatro lados.

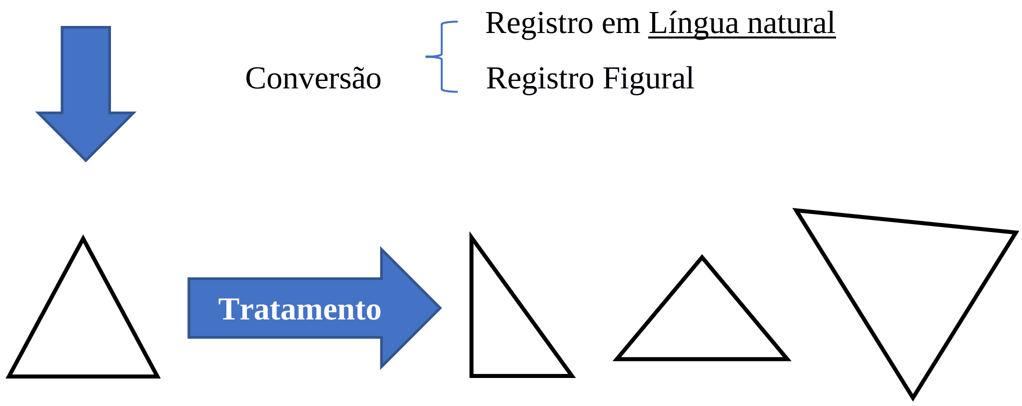
Questão 3- Analise as figuras planas e classifique-as como: (1) triângulo; (2) quadrilátero; (3) pentágono.



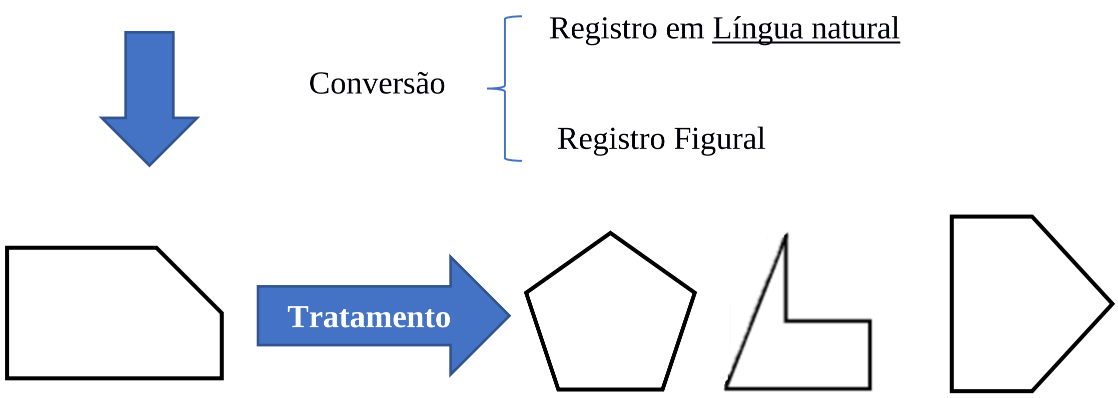
Analogamente a questão anterior, é preciso conhecer o significado das palavras, triângulo, quadrilátero e pentágono, para então fazer a desconstrução da figura e verificar a semelhança encontrada para que a figura pertença ou não aquela classificação, à vista disso, tem-se que:

Apreensão perceptiva e discursiva:

TRIÂNGULO : FIGURAS QUE SÃO FORMADAS POR TRÊS SEGMENTOS DE RETA



PENTÁGONO : FIGURAS QUE SÃO FORMADAS POR CINCO SEGMENTOS DE RETA



Ao prosseguir a resolução da atividade não levando em consideração a supervisão das apreensões pode conduzir ao erro imediato, uma vez que muitas das figuras estão em formato irregular, o que poderia justificar marcar figuras não vistas frequentemente como sendo um pentágono.

Na turma 01, apenas dois alunos acertaram a questão por completo e quatro alunos erraram uma das classificações. Porém, três alunos acertaram apenas a sequência A e três alunos acertaram apenas a sequência B, consequentemente 19 alunos erram a sequência A ou B por completo. Pode-se observar também que 22 alunos classificaram uma ou mais figuras geométricas sendo um pentágono (figura geométrica de cinco lados), sendo isso algo preocupante, pois a classificação de figuras consta no currículo escolar de anos anteriores.

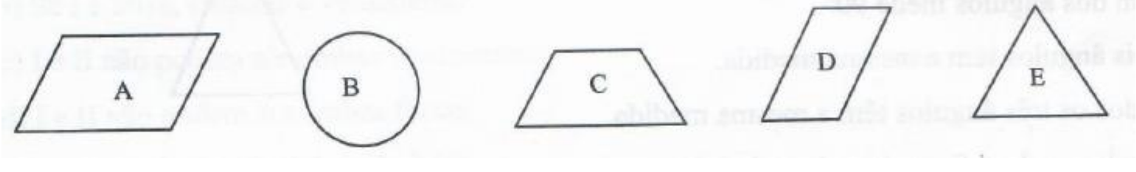
Na turma 02, dos 22 alunos participantes apenas um aluno acertou por completo a questão 03 e apenas dois alunos acertaram a sequência A e todos erraram a sequência B (com exceção do indivíduo que acertou toda a questão).

Na turma 03, 17 alunos erraram a sequência A e a B, e um aluno acertou apenas a sequência A e outro apenas a sequência B. Do total quatro alunos marcaram pentágono para losango e outras, cinco alunos marcaram pentágono para o trapézio e outras e quatro alunos marcaram pentágono para o losango e o trapézio. Neste caso 13 dos 18 alunos claramente não compreenderam que a classificação se dá em relação aos lados de cada figura.

Na turma 04, 15 alunos erraram a sequência A e um acertou, 16 alunos erraram a sequência B, bem como um aluno acertou a questão por completo.

De um total de 82 alunos somente cinco alunos conseguiram perceber que das figuras apresentadas não havia pentágonos, bem como, conseguiu classificar cada uma das figuras geométricas corretamente, demonstrando que compreende as características relacionadas aos lados das formas geométricas e isso é muito importante para o caracterizar no nível um da aprendizagem segundo a teoria de van Hiele.

Questão 4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):



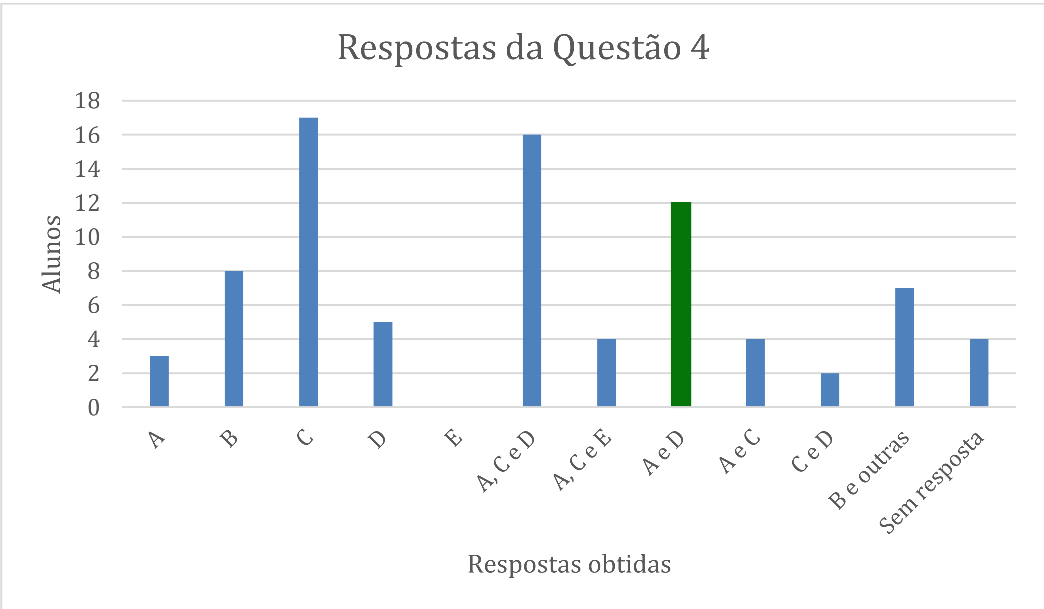
Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 95)

Nesta questão as respostas foram as mais variadas e a quantidade de acertos foi muito baixa, das 82 respostas apenas 11 estavam corretas. Concluindo que a grande parte dos educandos participantes não sabia as características de um paralelogramo.

Nessa questão a falta de conhecimentos prévios implicaria significativamente para um raciocínio equivocado, levando-os a acreditar que a figura C (trapézio) é um paralelogramo. Pela análise a priori, esperava-se que os estudantes a partir da palavra paralelogramo buscassem uma solução orientando-se em suas características (figura plana, quadrilátero, par de lados paralelos) buscando encontrar os registros figurais válidos.

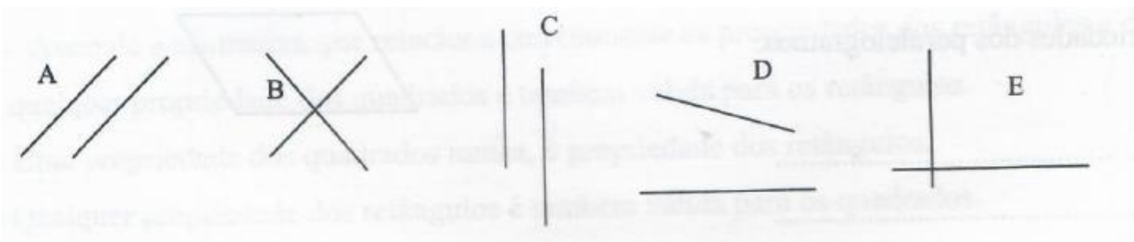
Como se pode perceber no gráfico 5 a seguir, muitos educandos apresentaram dificuldades em responder a questão, levando a concluir que os conceitos sobre paralelogramos não estavam bem formados. Principalmente para os alunos que optaram em marcar as figuras B e E, pois a figura de B é um círculo e E é um triângulo, figuras bem conhecidas e estudadas desde os anos iniciais.

Gráfico 5 – Respostas obtidas na questão 4



Fonte: Elaborada pela autora (2020).

Questão 5 – Assinale os pares de retas paralelas:



Fonte: NASSER; SANT'ANNA (2010. P. 95)

Possíveis respostas:

Aluno X: B e/ou D e/ou E

Aluno Y: C

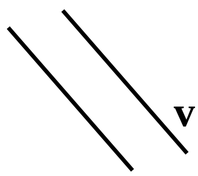
Aluno Z: A e C

O aluno X não compreendeu o conceito de retas paralelas, não atingindo o nível básico do reconhecimento. Já o aluno Y, compreendeu o conceito de uma forma visual "tradicional", não acertando a questão por inteiro. O aluno Z, além de reconhecer a figura C, ainda percebeu que na figura A também se encontram retas paralelas.

A questão 5 demanda conhecimentos referente a classificação de retas, na qual as retas podem ser classificadas (no sexto ano do Ensino Fundamental) como concorrentes, paralelas e coincidentes.

Para tal, os registros de representação semiótica possibilitam identificar variáveis intrínsecas à atividade cognitiva do indivíduo que irão auxiliar na compreensão Matemática (DUVAL, 2011). Dessa forma, são apresentados na sequência, Quadro 2, tipos de representações semióticas para os objetos geométricos "retas paralelas".

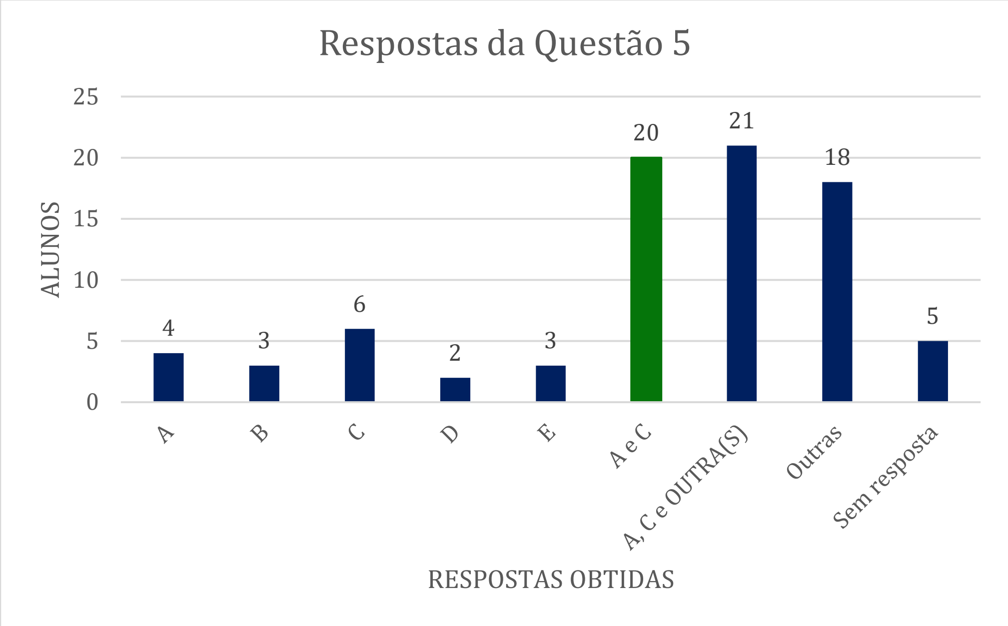
Quadro 4 – Diferentes Representações Semióticas Para "Retas Paralelas".

Língua Natural	Registro Simbólico	Registro Figural
t e **v** são retas paralelas	**t // v**	**t**  **v**

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Sugerindo assim a presença de uma igualdade interpretativa entre o resultado e a imagem mental do objeto, que a partir da interação das apreensões discursiva e perceptiva pode-se mobilizar os registros de representação semiótica de forma adequada.

Gráfico 6 – Respostas Obtidas na Questão 5.



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Analisando os dados apresentados no gráfico 6, percebe-se que a representação de retas paralelas não está definida claramente para a maior parte dos alunos. Dessa forma, podemos separar esses alunos em grupos de compreensão, como relatado no quadro 5.

Quadro 5 – Níveis de compreensão referente a Questão 5.

Compreensão	Opção assinalada	Alunos
Totalmente	A e C	20
Parcialmente	A e/ou C e D	9
	A ou C	10
Sem compreensão	B e/ou E ou D	43

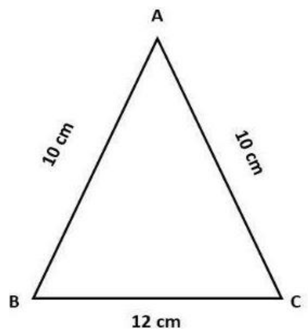
Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Portanto, dos 82 participantes, 20 apresentaram uma resolução dentro da perspectiva prevista nas possíveis respostas, obtendo sucesso no desenvolvimento das apreensões. No entanto 62 alunos não alcançaram o entendimento da questão, visto que parte destes conseguiram interpretar parcialmente, não analisando todas as possíveis respostas. Na compreensão parcial estão apresentados dois grupos, no qual encontram os participantes que assinalaram A e/ou C e D (A, C e D; A e D; C e D) e A ou C. Dentre estes dois grupos, o primeiro agrega a figura representada pela letra D, não sendo retas paralelas, porém ao dar significância a palavra “paralela” encontrar-se-á como definição retas que não se cruzam, não possuindo pontos em comum.

Diante disso, observa-se que as figuras apresentadas nas alternativas, as retas não facilitam o entendimento, pois não demonstram uma noção de continuidade, logo, as retas da figura D não estão se cruzando e sem pontos em comum. Embora isso possa caracterizar uma possível interpretação por parte do educando, os olhares não-icônico levariam as opções corretas.

7.1.2 Questões do segundo nível

Questão 6 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

b) Um dos ângulos mede 90°.

c) Dois ângulos têm a mesma medida.

d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

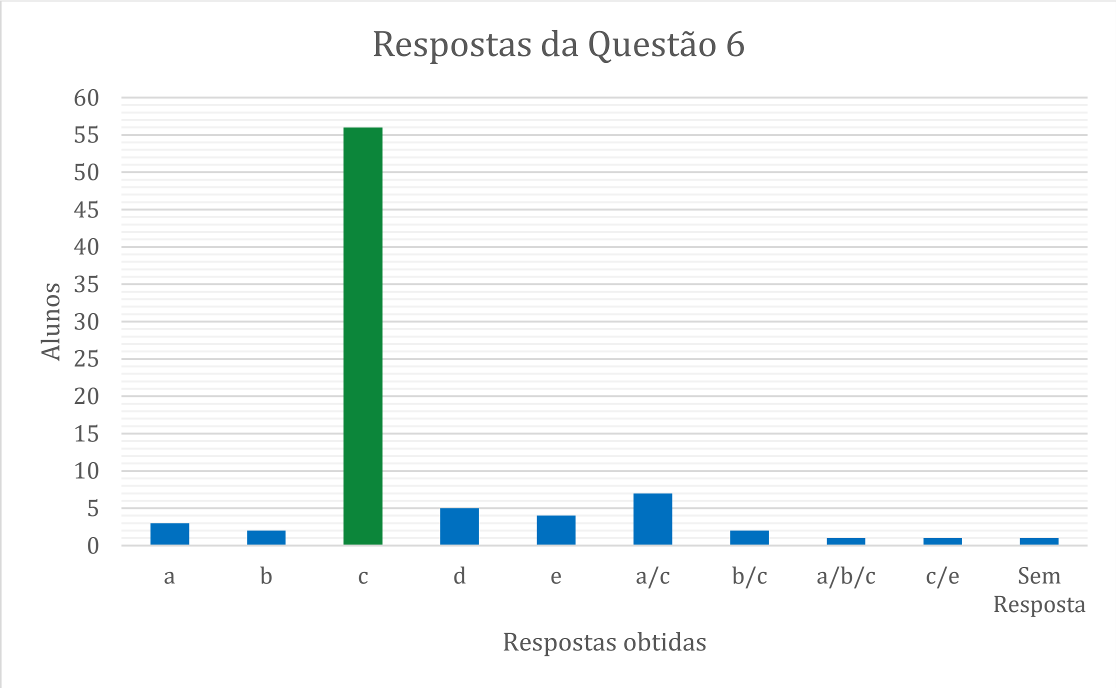
e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

Fonte Adaptado de Nasser; Sant’anna (2010. P. 95)

Para a presente questão, já era esperado uma interpretação mais clara do enunciado, visto que a figura auxilia no desenvolvimento da compreensão sobre os triângulos isósceles. Dessa forma, por mais que o educando não recorde, de imediato, as propriedades geométricas de um triângulo isósceles, a imagem lhe dará mais segurança em formular sua hipótese. Bem como, ao visualizar geometricamente não necessariamente lhe exigirá conhecimentos matemáticos, porém, como relata Moretti (2013, p. 293), essa visualização poderá, de certa forma, comandar a apreensão operatória, uma vez que, a “visualização é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória.”

Pode-se observar no Gráfico 7 as respostas apresentadas pelos educandos, demonstrando que aproximadamente 68% das respostas estavam corretas, sendo que 11 alunos assinalaram a resposta correta juntamente com outra alternativa, manifestando não ter compreendido totalmente as características referentes aos triângulos.

Gráfico 7 – Respostas obtidas na questão 6



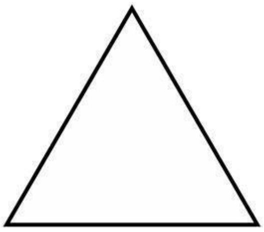
Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Explorando a questão por meio da perspectiva de Duval, percebe-se claramente as apreensões em Geometria envolvidas na questão, uma vez que esta contempla um registro figural, e como já mencionando em exercícios anteriores, a apreensão perceptiva é imediata e automática, visto que a forma como a imagem é apresentada faz uma conversão do registro da língua natural para o registro figural, ampliando a visão sobre o triângulo em abordado. Todavia, retratar geometricamente o enunciado auxilia para uma melhor compreensão por parte do educando.

O número significativo de pesquisados terem associado a figura ao enunciado e por meio das apreensões perceptiva e discursiva conseguirem compreendê-las mostrou como se faz necessário um registro figural em um problema geométrico.

Não obstante, houve alunos que não obtiveram sucesso em seu raciocínio, uma vez que, durante o processo resolutivo acabaram fazendo o uso incorreto das propriedades, justificando as conclusões falsas.

Questão 7 – Todo triângulo equilátero tem suas medidas dos lados iguais. Abaixo temos um exemplo de um triângulo equilátero.



Assinale a opção correta sobre os triângulos equiláteros:

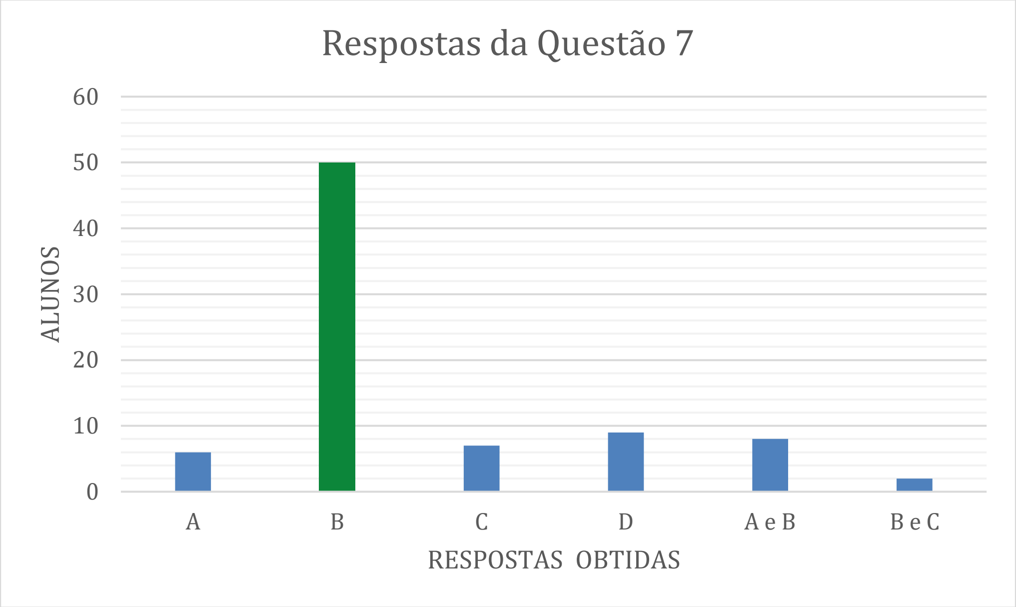
a) Todos seus ângulos medem 30º.
b) Todos os ângulos têm a mesma medida.
c) Um ângulo mede 90º.
d) Nenhuma das afirmativas está correta.

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Essa questão, bem como a anterior, apresentam um elemento figural que se destaca pela intenção de nortear o educando a identificar a característica fundamental para que esse triângulo seja equilátero. Para tal, pela análise a priori se espera que após a leitura do enunciado ocorra uma correlação com a imagem e, assim, ao compreender que todo triângulo equilátero tem suas medidas dos lados iguais concluir que as medias dos ângulos também seriam iguais, exigindo-se essa compreensão matemática para que transcorra uma resolução esperada.

A crucial importância de um registro figural atua na expectativa de que, alicerçado pela apreensão perceptiva sobre a figura em questão tenha-se também o reconhecimento das características por meio da apreensão discursiva. Dessa forma, pode-se observar, no Gráfico 8, que pouco mais da metade do pesquisados identificaram um triângulo equilátero corretamente. Em contraste, 32 alunos ficaram divididos nas demais alternativas, demonstrando que as apreensões geométricas não foram bem exploradas, principalmente pelos alunos que destacaram o triângulo equilátero possuindo um ângulo medindo 90º (opção C), pois este ângulo dispõe de uma marcação exclusiva e não presente na imagem deste exercício.

Gráfico 8 – Respostas obtidas na questão 7



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Na figura apresentada na a questão 7, para demonstrar geometricamente um triângulo equilátero, a visualização inicial, permite certo equívoco ao analisá-la separadamente da apreensão discursiva, o que pode acarretar uma má interpretação geométrica, presumindo possuir ângulos medindo 30º (opção A). No entanto, pode-se perceber como as apreensões discursiva e operatória tornam-se dependentes da apreensão perceptiva, visto que ao visualizar a figura o educando faz, inconscientemente ou não, uma conexão entre essas apreensões. E, na busca por informações não presentes no registro figural faz-se tratamentos geométricos orientados pela apreensão operatória.

Questão 8 – Se em um triângulo possui um ângulo interno de 90º, ele é um:

e) Triângulo equilátero.
f) Triângulo acutângulo.
g) Triângulo retângulo.
h) Triângulo obtusângulo.

Fonte: Nasser;Sant'anna (2010, p. 96).

Analisando essa questão separadamente, para o modelo de van Hiele, somente 15 alunos estariam aptos ao segundo nível – a análise – visto que, neste nível não prevalece a imagem global, mas sim as propriedades da figura, e neste caso, estão descritas no enunciado.

Contudo, as apreensões geométricas se fazem muito presentes no desenvolvimento da atividade, dando continuidade na análise proposta por van Hiele de uma forma mais detalhada. E, como é possível visualizar as respostas assinaladas pelos pesquisados, percebe-se que os conhecimentos relativos as classificações de triângulos não foram bem compreendidas.

Quadro 6 – Respostas obtidas na Questão 8

Alternativas	**Alunos**
A	36
B	14
C	15
D	13
A/B	1
Sem resposta	3

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Os educandos que assinalaram a opção A, resultam da questão anterior, uma vez que, a questão 8 refere-se a um tipo de triângulo, bem como, possui uma figura para auxiliar na compreensão do enunciado. E, mais uma vez, ressalta-se a importância que o registro figural, relatado por Duval, tem para a construção do pensamento geométrico. A priori, era esperado que os educandos eliminassem de imediato *"Triângulo equilátero"*, pois este foi exemplificado e demonstrado, não possuindo um ângulo reto.

Para Duval, quando não se faz presente as ligações adequadas entre as apreensões perceptiva e discursiva, ocorre uma distorção da hipótese. Ao fazer a conversão dos registos em língua natural para o registro figural, o educando precisa ter um olhar do *Botanista* e *Construtor*. Onde, o olhar Botanista é aquele que reconhece as formas geométricas, diferenciando-as, ou seja, trata-se de,

> [...] observar diferenças entre duas formas que representam certas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e de notar certas semelhanças entre formas diferentes (quadrilátero e um paralelogramo). Aqui, as propriedades diferenciadas são características visuais de contornos." (DUVAL, 2005, p.5).

Já o olhar Construtor é aquele que utiliza instrumentos matemáticos, levando o aluno a discernir uma característica perceptiva de uma propriedade geométrica. E, dessa forma, os olhares percorrem diferentes caminhos, à medida que as apreensões em geometria são exigidas. (MORETTI, 2013).

O modelo de van Hiele, propõem cinco níveis de compressão geométrica, todavia, o nível 0 corresponde a que os autores denominam de Visualização, e, para alguns pesquisadores faz-se necessário acrescentar um nível anterior a visualização. Isso, devido a baixa compreensão dos exemplos e de não serem capazes de converter um registro em língua natural em um registro de imagem mental (figural). Dessa forma, percebe-se que a falta desse tratamento, não contribui heuristicamente para o reconhecimento da figura.

Questão 9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1 – ....

2 – ....

3 – ....

Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 96)

Pode-se observar no Quadro 7, que o registro figural, neste caso, não auxiliou demasiadamente no desenvolvimento da questão para muitos dos educandos, pois a figura analisada sem interação com a apreensão discursiva não garante a percepção das propriedades e seu reconhecimento por meio de palavras.

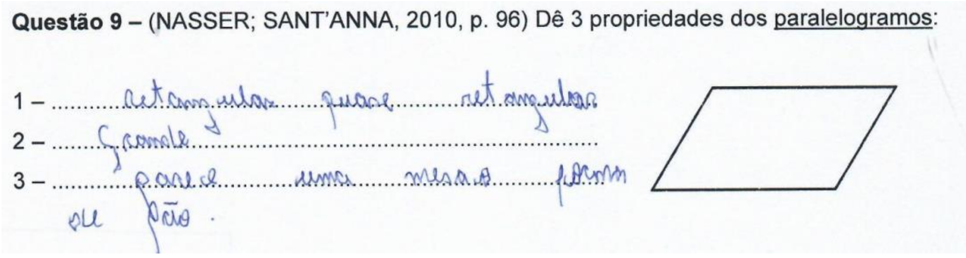
Quadro 7 – Respostas obtidas na Questão 9

Critérios	***Alunos***
Não reconhece a figura	49
Nível Básico	20
Nível 2 - Análise	1
Sem resposta	12

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

A apreensão perceptiva observada por meio das respostas obtidas reproduz uma interpretação conduzida pelas hipóteses, sendo este um dos problemas que as figuras geométricas podem gerar. (DUVAL, 2012B). Para tal, observa-se na Figura 11 a dificuldade em descrever matematicamente a hipótese encontrada. Já na Figura 12, existe uma compreensão básica sobre paralelogramos, analisando somente a forma global do polígono, caracterizando este aluno no grupo do Reconhecimento.

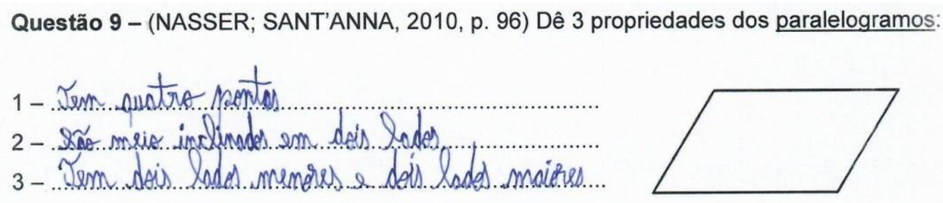
Figura 11 – Resposta do Aluno 78


Questão 9 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 96) Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1 – retangular quase retangulos
2 – Grande
3 – parece uma mesa o forma ou pão.

Fonte: Folha de Registro do aluno 78, parte 2, Exercício 9, 2019.

Figura 12 – Resposta do Aluno 23

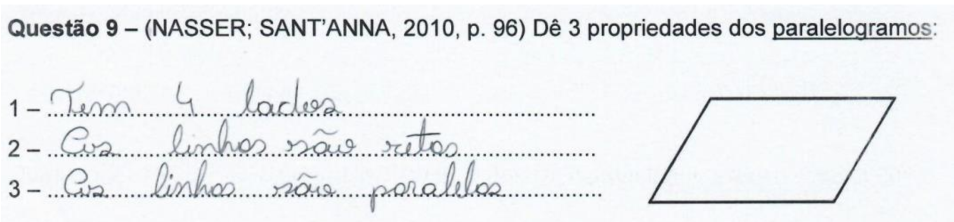

Questão 9 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 96) Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1 – Tem quatro pontas
2 – São meio inclinados em dois lados
3 – Tem dois lados menores e dois lados maiores

Fonte: Folha de Registro do aluno 23, parte 2, Exercício 9, 2019.

Dentre todas as respostas, apenas uma chegou próxima de ser considerada completamente classificada como nível da Análise, de acordo com van Hiele, como se pode verificar na Figura 13 a seguir.

Figura 13 – Resposta do Aluno 39


Questão 9 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 96) Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

1 – Tem 4 lados
2 – As linhas são retas
3 – As linhas são paralelas

Fonte: Folha de Registro do aluno 39, parte 2, Exercício 9, 2019.

Questão 10 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:

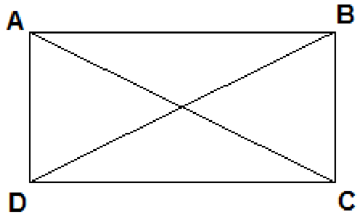
a) Têm quatro ângulos retos.

b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.



Fonte: Nasser;Sant'anna (2010, p. 96).

Para a última questão apresentada no nível 2 – Análise, identificou-se maior dificuldade para encontrar a resposta correta, posto que a atividade possuía mais de uma afirmativa verdadeira. Dessa forma, analisando pelo modelo de van Hiele somete sete alunos conseguiram explorar todas as características referentes aos retângulos e como é possível visualizar no Quadro 8, 19 alunos perceberam somente característica (A, B ou C), bem como outros 19 alunos acertaram parcialmente a questão (duas opções), mostrando assim, que houve o entendimento da atividade, porém, nem todas as propriedades estavam perceptíveis para todos os pesquisados.

Quadro 8 – Respostas Obtidas na Questão 10

Alternativa	Alunos
A	9
B	3
C	7
D	7
E	12
A, B e C	7
Acerto parcial	19
Outras	18

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Analogamente as demais questões, os Registros de Representação Semióticos se fazem necessários para o desenvolvimento do exercício. Como relata Kleppel (2012, p. 16),

> Se o indivíduo toma consciência do funcionamento do registro figural e da organização dedutiva do discurso, e realiza a coordenação dos registros, estará efetuando a articulação global que constituem o essencial da atividade geométrica, para a qual a heurística e a demonstração formam uma só abordagem.

No que se refere o registro figural e discursivo, exposto nessa questão, é proposta a uma análise perceptiva destes, na qual a solução do problema pode ser identificada com as contribuições presentes na figura.

Não obstante, houve uma baixa assertividade, e uma possível justificativa para esta situação pode estar relacionada ao conteúdo ainda não ter sido explanado completamente, pois é no sexto ano escolar que os conceitos geométricos são mais aprofundados, como por exemplo a afirmativa "b) Têm lados opostos paralelos". Contudo, durante os anos iniciais essa linguagem matemática é abordada de uma forma mais sutil e mais bem conceituada a partir do Sexto Ano do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, é compreensível os pesquisados que assinalaram a opção "d) Têm os lados iguais", observando os pares de retas paralelas. Porém, para que esta afirmativa estivesse correta carece da palavra oposto, ou seja, têm os lados opostos iguais ou de mesma medida. Dessa forma, aborda-se igualmente a alegação de que todas as opções estão corretas, visto que, dentre as alternativas (A, B, C e D) somente a letra D está incorreta.

Para Duval (1998), é por meio da apreensão perceptiva que podem surgir ideias para solucionar determinado problema e, unindo a apreensão discursiva averiguar possíveis repostas. O registro figural retratado, demonstra a figura com seus contornos e vértices, bem como suas diagonais, pretextando ser o contorno de uma forma poligonal fechada, exercendo seu papel heurístico.

Nas resoluções em que os estudantes acertaram parcialmente a proposta do problema, evidencia que de acordo com Duval, a atuação da apreensão discursiva se mostrou parcial e dessa forma, o acesso ao objeto matemático não se fez de forma eficiente a ponto de que a apreensão perceptiva pudesse reconhecer todas as propriedades do objeto relacionadas na questão.

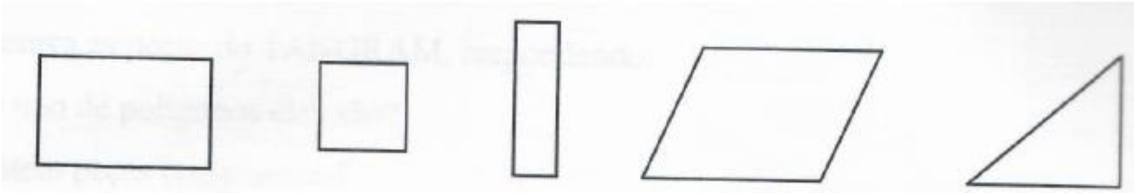
O uso da apreensão perceptiva dissociada das demais apreensões favoreceu o estudante a marcar o item "d" desse exercício, uma vez que, esse tipo de olhar ausenta a teorização do registro figural e, portanto, as decisões tomadas seguem unicamente sua percepção social.

7.1.3 Questões do terceiro nível

Nas questões relacionadas ao terceiro nível propostas pelo modelo de van Hiele exigem um raciocínio geométrico mais avançado, posto que os níveis seguem uma hierarquia, e para uma melhor compreensão, faz-se necessário que o educando ao atingir o nível da abstração, por exemplo, consiga anteriormente acertar as questões alusivas aos dois primeiros níveis.

Contudo, existem situações em que o educando "conhece as propriedades de algumas figuras geométricas (nível de análise), mas não é capaz de identificar todas as figuras (nível do reconhecimento)" (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 9), indicando uma possível falha nas construções geométricas durante anos anteriores.

Questão 11 – Circule a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:

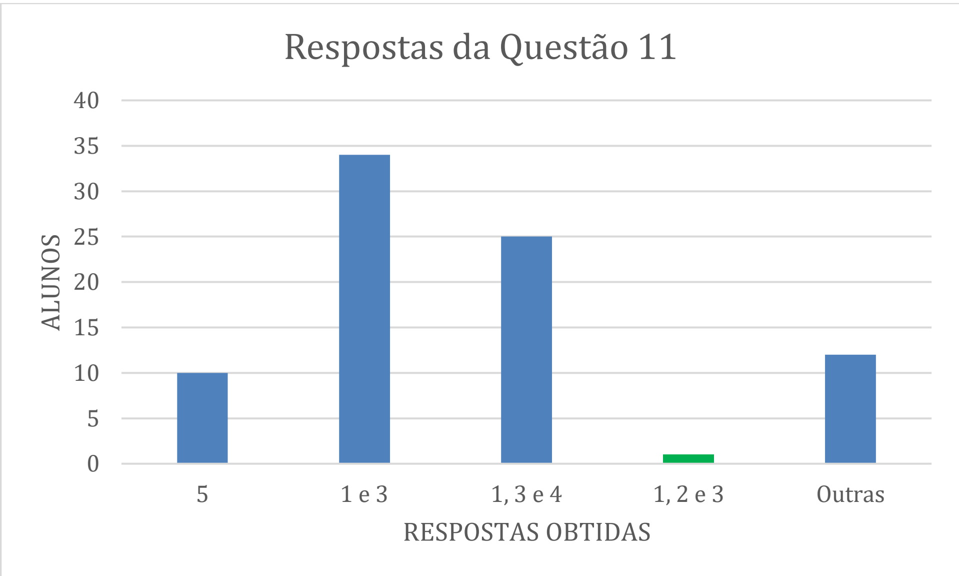


1 2 3 4 5

Fonte: Nasser; Sant'anna (2010, p. 96).

Como é possível verificar no Gráfico 9 a seguir, que somente um estudante identificou corretamente todos os retângulos apresentados na questão, assimilando o quadrado como um retângulo, visto que, possui dois pares de lados paralelos e de mesma medida, quatro ângulos retos e duas diagonais congruentes, logo, todo quadrado é também um retângulo.

Gráfico 9 – Respostas obtidas na Questão 11



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Quando os estudantes assinalaram o item 1 e 3 e deixaram de marcar o item 2, é possível supor que pelo motivo de que tradicionalmente o meio escolar relaciona esta figura como sendo a representação de um quadrado, principalmente no início do processo do ensino da geometria, onde o olhar botanista é suficiente para compor o aprendizado; o educando poderia relacionar a figura 2 como sendo exclusivamente a representação de um quadrado, sendo assim, desconexo com o estatuto do objeto em questão (MORETTI, 2013, p. 291).

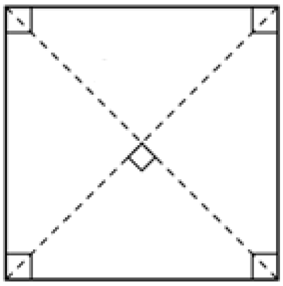
Analogamente pode-se perceber que quando os estudantes assinalaram os itens 1, 3 e 4 o acesso a compreensão do objeto geométrico se mostrou confuso, e dessa forma, segundo De Souza, Moretti e Almouloud (2019), não ocorreu a produção de significados ao ver o registro figural e, como consequência, não sendo possível identificar as propriedades inerentes ao objeto representado, justificaria a escolha do item 4 para compor essa resolução mesmo que essa forma geométrica não sendo dotada de ângulos retos.

Quanto as resoluções dos estudantes que foram categorizados como "outras", em que assinalaram somente o item 1 ou 2, mostrando uma certa tendência em seguir as representações canônicas inseridas no meio escolar, evidenciando assim, que as representações dessas formas assumiram o papel do objeto geométrico. Gerando como consequência processos de reconhecimentos parciais.

De acordo com De Souza, Moretti e Almouloud (2019), é comum que no meio escolar e em particular nos livros didáticos a explanação dos conceitos geométricos sejam elaborados com figura geométricas que tendem a formar uma visualização simplista, não favorecendo o reconhecimento do objeto geométrico a partir destas representações, apontando assim, a necessidade de ampliar a rede de relações das formas em questão.

No momento em que a apreensão preceptiva se mostra desvinculada com as demais apreensões e não existe o acesso ao objeto matemático e dessa forma, a tomada de decisão está condicionada a representação semiótica que mais se aproxima do objeto em questão. Nesse contexto é possível compreender o fato de o estudante ter assinalado os itens 1 e 4 ou o item 5, com a intenção de estar atendendo os pré-requisitos do problema. Mas dependendo a representação semiótica que está ancorada a compreensão do objeto, a resposta pode até parecer parcialmente coerente.

Questão 12 – Na figura a seguir é possível visualizar um quadrado e suas diagonais formando triângulos. Analisando os triângulos, quanto aos lados e ângulos, respectivamente, podemos concluir que são triângulos:



a) Isósceles e retângulo.

b) Escaleno e obtusângulo.

c) Equilátero e retângulo.

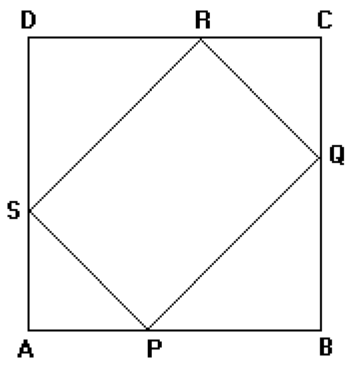
d) Escaleno e acutângulo.

e) Isósceles e obtusângulo.

Os estudantes que optaram pelo item "a", de acordo com Duval, a apreensão perceptiva se mostrou coordenando a apreensão discursiva, no momento em que coordena as informações contidas no enunciado com os elementos geométricos pertencentes a figura, desse modo, os tratamentos sobre a figura oportunizaram o reconhecimento dos quatro triângulos retângulos definidos a partir das diagonais do quadrado.

As demais opções assinaladas, demonstraram-se desconexas com a proposta do problema, evidenciando a atuação isolada da apreensão perceptiva e, dessa forma, a parcialidade com que o estudante acessa os objetos geométricos requeridos na resolução, de acordo com Duval, as conclusões não atendem ao contexto do exercício.

Questão 13 – Como você expressaria em palavras a figura abaixo?



Esta é uma questão aberta, o que leva a muitas respostas, porém a forma como forem respondidas dirá em que nível o aluno se caracteriza. O aluno X, por exemplo, é muito simplista e relata somente o básico do visual (reconhecimento), o aluno Y já consegue perceber algumas propriedades (análise) e por fim o aluno Z é mais detalhista e possui uma argumentação lógica informal.

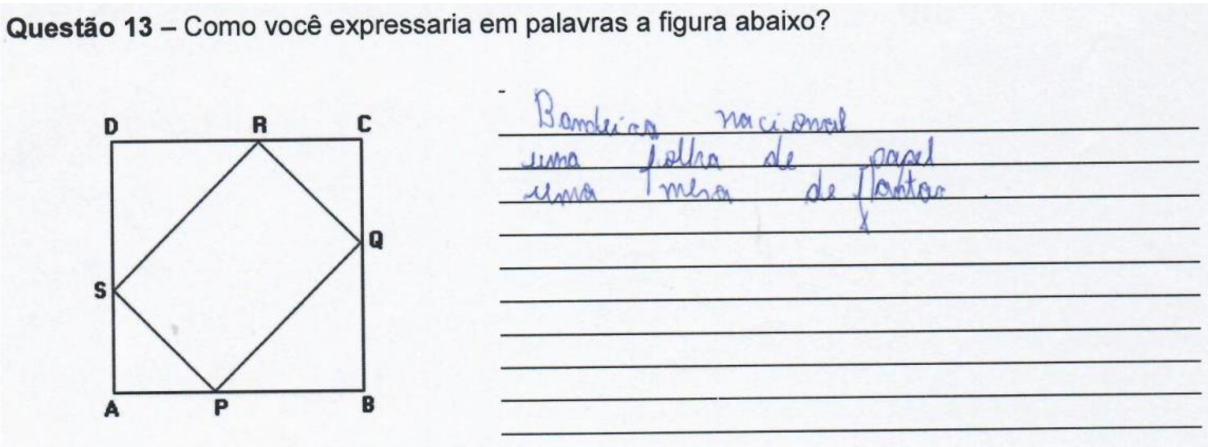
Quadro 9 – Respostas obtidas na questão 13

Não atende		17
Nível 1	Quadrado e Retâgulo	48
	Quadrado, Retâgulo e Triângulos	10
Nivel 2		0
Nível 3		0
Sem resposta		7

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

A percepção imediata desses 17 alunos, ao se mostrar distante do vocabulário geométrico evidencia a ausência axiomática elementar dos objetos matemático, não conseguido formar imagens mentais dessas figuras, caracterizando assim, de acordo com van Hiele, que esse grupo não atinge o nível 1 – Reconhecimento. Como pode-se observar na Figura 14, a partir da resolução do estudante 78.

Figura 14 – Resposta do aluno 78

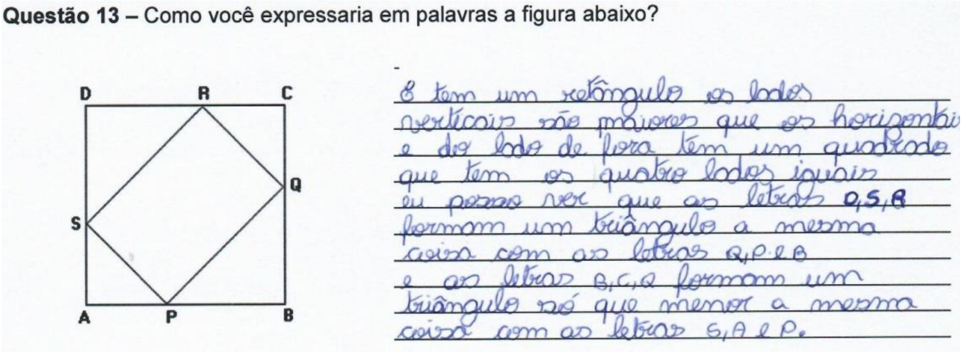


Fonte: Folha de Registro do aluno 78, parte 3, Exercício 13, 2019.

Já o grupo de 58 estudantes, mostraram reconhecimento geométrico dos objetos matemáticos propostos no problema num nível, que de acordo com a modelo de van Hiele, enquadram dentro do Nível Básico, uma vez que, conseguiram identificar e reconhecer formas elementares das figuras geométricas por sua aparência social.

Todavia, o reconhecimento visual estando relacionado maturidade cognitiva, esse mesmo grupo se mostrou heterogêneo quanto a qualidade do reconhecimento, uma vez que 48 estudantes delimitaram em reconhecer somente a forma geométrica do quadrado e retângulo - maior estímulo sensorial, enquanto os demais alunos visualizaram além das formas já mencionadas também o triângulo.

Figura 15 – Resposta do aluno 16



Fonte: Folha de Registro do aluno 16, parte 3, Exercício 13, 2019.

Sendo essa questão, ao ter por objetivo que o aluno produza um registro de reconhecimento a partir de um registro figural caracteriza-se inicialmente a atitude cognitiva menos intuitiva de maior dificuldade para o estudante em seu processo de aprendizagem, pois eles precisavam partir de uma figura para um registro em língua natural, caracterizando assim, a atitude cognitiva que Duval a denomina como sendo a conversão.

Por outro lado, os estudantes que não se enquadraram no nível 1 de van Hiele, a apreensão perceptiva atuou desconexa das demais apreensões e, o acesso ao objeto geométrico é proporcionalmente tão parcial que suas expressões descrevem objetos do cotidiano.

Não obstante, os demais pesquisados fizeram uso a apreensão perceptiva interagindo com as demais apreensões, ou seja, a atuação da apreensão discursiva favoreceu o entendimento da proposta do exercício, coordenando dessa forma, em conjunto com a apreensão perceptiva e sequencial os tratamentos sobre a figura, de modo a existir o reconhecimento das formas geométricas implícitas na imagem.

Questão 14 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97) Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? .... Por que?..

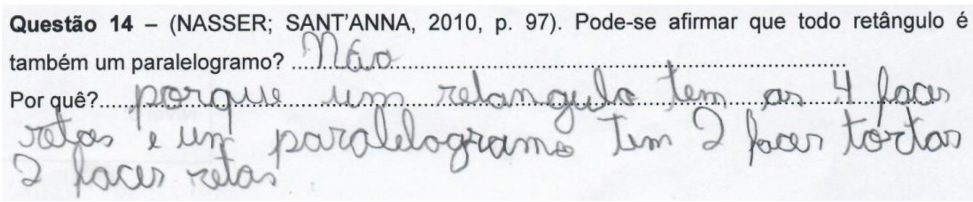
De acordo com o Quadro 10, 38 estudantes apresentaram um processo resolutivo incorreto, de acordo com van Hiele, não atingiram os níveis propostos pelo modelo, um vez que a proposta do exercício estava dividida em dois momentos, primeiramente, buscava-se a partir do reconhecimento das formas do retângulo e do paralelogramo uma caracterização axiomática em que todo retângulo é também paralelogramo, o que não ocorreu para esse grupo de alunos, quando estes afirmaram que um retângulo não era um paralelogramo.

Quadro 10 – Respostas obtidas na questão 14

Respostas			
Corretas		**Incorretas**	**Sem resp.**
Nível 1	Nível 2		
27	2	38	15

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Figura 16 – Resposta do aluno 47

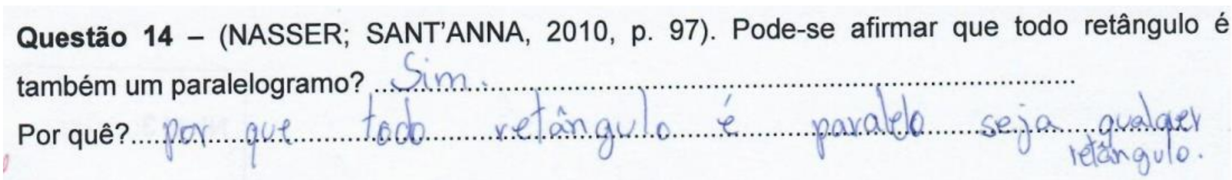

Questão 14 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97). Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Não

Por quê? porque um retangulo tem as 4 faces retas e um paralelogramo tem 2 faces tortas 2 faces retas

Fonte: Folha de Registro do aluno 47, parte 3, Exercício 14, 2019.

Em contra partida, 29 alunos reconheceram essa afirmativa como sendo verdadeira, entretanto, somente dois educandos descreveram de forma informal alguma propriedade válida, configurando assim, sua inserção no nível 2 da Análise, o que implica então que 27 alunos desse grupo se manteriam no nível 1 do reconhecimento, como mostram as Figuras 17, 18 e 19, em que a resolução do estudante 41 contempla estritamente o nível 1 e, os processos resolutivos dos estudantes 39 e 52 atendem o nível 2.

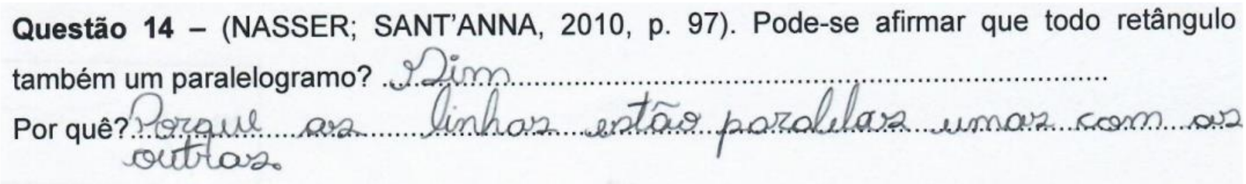
Figura 17 – Resposta do Aluno 41


Questão 14 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97). Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Sim

Por quê? por que todo retângulo é paralelo seja qualquer retângulo.

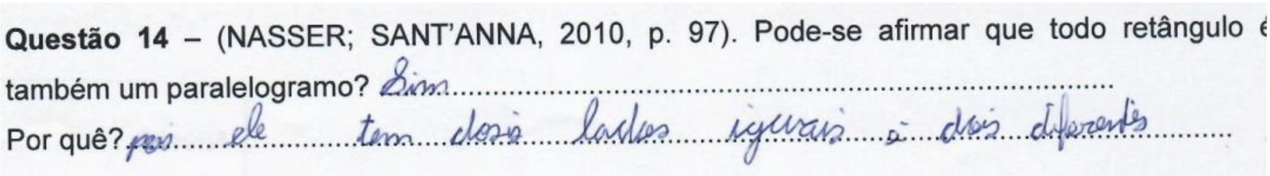
Fonte: Folha de Registro do aluno 41, parte 3, Exercício 14, 2019.

Figura 18 – Resposta do Aluno 39


Questão 14 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97). Pode-se afirmar que todo retângulo também um paralelogramo? Sim
Por quê? Porque as linhas estão paralelas umas com as outras.

Fonte: Folha de Registro do aluno 39, parte 3, Exercício 14, 2019.

Figura 19 – Resposta do Aluno 52


Questão 14 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97). Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Sim
Por quê? pois ele tem dois lados iguais e dois diferentes

Fonte: Folha de Registro do aluno 52, parte 3, Exercício 14, 2019.

Partindo da realidade que a compreensão geométrica está vinculada a coordenação simultânea de dois registros semióticos distintos, ou seja, o registro discursivo e o registro figural, essa questão exige do aluno contemplar a figura mentalmente, agregando dessa forma, um maior custo cognitivo para a execução dessa tarefa. Desse modo, assim como observado na questão anterior, a ação cognitiva da conversão associada a ausência do registro figural exposto no exercício contribuiu para o número significativo de estudantes que não conseguiram acessar de forma eficiente o objeto matemático e, dessa forma, suas considerações não se mostraram dentro do contexto do problema.

Dessa forma, o registro discursivo apresentado pelos 38 alunos que pela classificação de van Hiele não conseguiram reconhecer a forma global da figura mentalmente, mostra que a apreensão perceptiva imediata atuou de forma isolada, gerando assim, registros discursivos que não atenderam a proposta do exercício.

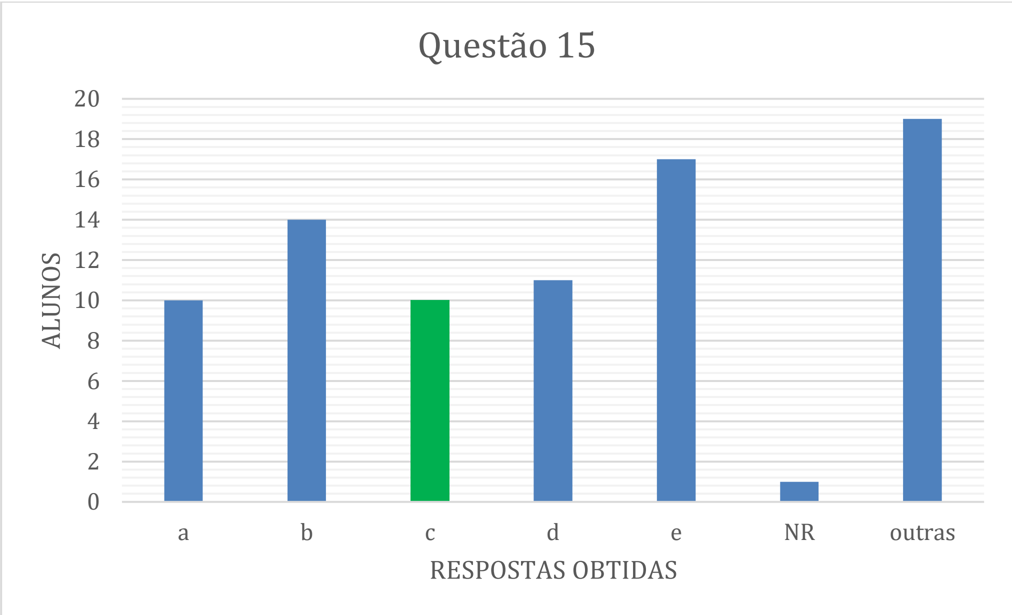
Em contrapartida, a resolução apresentada pelos 29 alunos, sendo que 2 reconhecidos no nível da Análise e os demais no nível Básico é possível identificar a atuação da apreensão perceptiva coordenando as apreensões discursiva, de modo que todos reconheceram o retângulo como sendo um paralelogramo, porém, somente a resolução dos educandos 39 e 52 a apreensão operatória se mostrou ativa ao ponto de expor propriedades pertinentes a essas figuras.

Questão 15 – (NASSER; SANT'ANNA, 2010, p. 97) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Como pode-se observar no Gráfico 10, somente 10 alunos conseguiram compreender as características relacionadas aos polígonos apresentados, e dessa forma, eles foram capazes de perceber que “qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados”, afirmação esta que representa o item “c” do exercício. Se delimitarmos o olhar somente para essa questão, de acordo com o modelo de van Hiele, estes educandos classificam-se no nível da Abstração, percebendo a interrelação entre as propriedades dos polígonos destacados.

Gráfico 10 – Respostas obtidas na Questão 15



Fonte: Elaborada pela da autora (2020).

Quanto aos demais, a insuficiência em reconhecer e coordenar as propriedades pertinentes a essas formas geométricas, não os tornou aptos a reconhecer a veracidade do item “c”, e mantendo dessa forma sua exclusão do nível 3.

Para a teoria de registro e representação semiótica, essa questão apresenta um custo cognitivo significativo pelo fato de não existir um registro figural presente no exercício e fazer exigências de propriedades não intuitivas, a fim de validar uma intercessão de propriedades entre duas figuras distintas.

A não escolha do item “c” sendo este verdadeiro para o contexto desse problema, apresentado pelos 71 estudantes, evidencia a atuação da apreensão discursiva interagindo com a apreensão perceptiva, uma vez que para Duval, o registro figural pode ser de natureza mental. Porém, o elevado nível de exigências axiomáticas contribuiu para uma compreensão parcial das propriedades e, dessa forma, suas decisões não atenderam a perspectiva do problema.

Já as resoluções corretas, também permearam pelo mesmo processo interpretativo, porém a coordenação entre o registro discursivo, acessando o estatuto dos objetos e, dessa forma, tornando-se mais próximo a base axiomática que rege essas duas figuras, se mostrou mais eficiente que, contando com a interação da apreensão perceptiva através da imagem mental dos objetos, se fez possível inicialmente compreender que toda propriedade do retângulo é também propriedade do quadrado.

7.2 IDENTIFICANDO OS NÍVEIS DE VAN HIELE

Pode-se observar que as questões propostas são de conhecimento de alunos do sexto ano, porém, existe um grande número de alunos que chegam ao Ensino Médio sem conseguirem responder tais questões. O modelo de van Hiele serve para que o professor consiga entender qual é ponto de partida ou quais definições faz-se necessário rever com seus alunos, ou até mesmo indicar um *site* ou um livro para o aluno possa estudar sozinho, buscar o conhecimento que não conseguiu captar no momento da explicação.

Para tal, pode-se observar no Quadro 11 as categorias em que os educandos foram separados, visando identificar o nível de compreensão geométrica segundo o modelo de van Hiele e, nas Figuras 20, 21, 22 e 23 essa classificação dos estudantes em suas respectivas turmas.

Quadro 11 – Legenda de Identificação de Acertos e Erros Referentes ao Questionário Aplicado

X	Indica que acertou a questão.
0	Indica que errou a questão.
	Indica que não respondeu.
-	Indica que o aluno não atingiu nenhum nível.
1	Indica que o aluno atingiu o nível 1.
2	Indica que o aluno atingiu o nível 2.
3	Indica que o aluno atingiu o nível 3.

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Figura 20 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 01 de acordo com o teste do Nível de van Hiele.

Questões / Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
1	0	0	X	0	0	X	0	X		0	0	0	0	0	0	-
2	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	X	0		0	-
3	0	X	0	0	0	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	2
4	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
5	0	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	X	0	0	0	2
6	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0		X	-
7	0	0	X	0	X	X	X	0	0	0	0	X	0	0	0	-
8	0	0	0	0	0	0	X	0		0	0	0	0	0	0	-
9	0	0	0	0	0	X	X	0		0	0	0	0		0	-
10	0	X	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0		0	0	-
11	0	0	0	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
12	0	0	0	0	0	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0	-
13	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
14	0	X	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
15	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	-
16	0	0	0	0	0	X	X	X		0	0	X	0	0	0	2
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
19	0	0	0	X	0	X	X	0		X	0	0	0	0	0	2
20	0	0	0	0	0	X	0	X		0	0	0		0	0	-
21	0	X	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	-
22	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	X	0	0	0	-
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	-
24	0	0	0	0	0	0	X	0	0	X	0	0	0		0	-

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Figura 21 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 02 de acordo com o teste do nível de van Hiele.

Alunos \ Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
25	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	X	0	0	X	-
26	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	X	0	0	0	-
27	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
28	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0		0	-
29	0	X	0	0	0	0	0	0		0	0	0			0	-
30	0	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	2
31	0	0	0	0	X	0	X	X	0	X	0	0	0	0	0	2
32	0	X	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
33	0		0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
34	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	X	-
35	0	X	0	0	X	X	0	X		0	0	0	0	0	0	-
36	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	X	-
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	-
38	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0			0	-
39	0	X	X	0	X	0	X	0	0	X	0	X	0	X	0	1
40	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0		0	-
41	0	X	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
42	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
43	0	X	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0		X	-
44	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
45	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	-
46	0	X	0	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Figura 22 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 03 de acordo com o teste do nível de van Hiele.

Alunos \ Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
47	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
48	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
49	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
50	0	0		0	0	X	X	0		0	0	X	0		0	-
51	0	0	0	0	X	0	X	0	0	0	0	X	0	0	0	-
52	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
53	0	0		X	0	X	0	X		0	0	0	0	0	0	-
54	0	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	2
55	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
56	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
57	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
58	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
59	0	0	0	0	X	X	X	0	0	0	0	0	0		0	-
60	0	X	X	X	0	X	X	X	X	X	0	X	0	0	0	2
61	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	X	0	0	0	-
62	X	0	0	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	1
63	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	X	0	0	X	-
64	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0			X	-
65	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Figura 23 - Nível de pensamento geométrico dos participantes da Turma 04 de acordo com o teste do nível de van Hiele.

Questões / Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Nível
66	0	0	0	0	X	X	0	X	0	0	0	0	0		0	-
67	0	0	X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	1
68	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
69	0	X	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
70	0	0	0	X	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
71	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0		0	-
72	0	0	0	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
73	0	0	0	X	X	X	0	X	0	0	0	X	0	0	X	-
74		0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	-
75	0	0	0	0	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
76	X	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	X	-
77	0	0	0	0	0	0	X	0		0	0	0			0	-
78	0	0	0	X	0	X	X	0	0	0	X	X	0	0	0	-
79	0	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	-
80	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
81	0	0	0	0	0	0	X	0	0	0	0	0	0	0	0	-
82		X	0	0	X	0	0	0		0	0	0		0	0	-

Fonte: Elaborada pela autora (2020).

7.3 NÍVEIS DE APRENDIZAGEM EM GEOMETRIA

Sendo notório o número de estudantes participantes da pesquisa que apresentaram uma significativa ineficiência quanto a percepção icônica das figuras geométrica pertinentes as questões realizadas e, portanto, se mostraram incapazes de demonstrar habilidades cognitivas suficientes ao nível 1. De acordo com van Hiele (1992) para esse nível a ação da visualização deveria assumir um papel essencial no processo de compreensão e resolução dessas questões, ou seja, dentro desse processo de aprendizagem o seu ato perceptivo deveria ser suficiente para o reconhecimento, a comparação e a nomenclatura dos objetos geométricos envolvidos.

De fato, o ato de compreender os objetos geométricos demanda de uma capacidade de visualização mais exigente do que qualquer outro tema matemático, como afirma Duval (2012) ao descrever que o processo de ensino e aprendizagem da geometria permeia pela coordenação simultânea entre os registros discursivo e figural, enfatizando dessa forma o papel do olhar sobre a imagem.

Para a Teoria de Registro de Representação Semiótica, no que tange a Geometria, essa ação de olhar para a figura buscando o entendimento inicial, é denominada como sendo a apreensão perceptiva, que sinergicamente correlaciona-se com as demais apreensões de modo a conduzir o processo de compreensão e resolução do problema proposto.

De um modo geral, o papel da visualização é de suma importância em ambas as teorias, visto que assume um papel central na classificação da aprendizagem em geometria de van Hiele e, sendo a apreensão perceptiva imediata e automática possui papel decisivo nas tomadas de decisões que se sucederão no processo de compreensão e resolução dos problemas de natureza geométrica (MORETTI, 2013, p. 296).

Dessa forma, quando o estudante não demonstrou habilidades que o classificariam no primeiro nível de van Hiele do entendimento geométrico, temos nesse caso, uma carência de significados que para Duval (2012) representa uma forte ruptura conceitual quanto ao objeto geométrico estudado, ou seja, não ocorreu cognitivamente a distinção inicial entre o objeto e a sua representação, e desse modo, a parcialidade com que um registro expõe sobre uma figura geométrica contribui de forma decisiva na inoperância de suas habilidades visuais e dessa forma não foi possível demonstrar regularidade no reconhecimento elementar dos objetos geométricos pedidos.

O acesso desses alunos ao nível do reconhecimento permeia pela ação intensiva de oferecer propostas pedagógicas destacando as particularidades presentes nos registros discursivos e figurais a fim de garantir de acordo com Duval (2012), as condições mínimas para que o aprendizado. Todavia, se tratando de alunos do 6 ano, é imprescindível que o professor seja mediador ativo do processo de ensino e faça uso ferramentas didáticas de modo a otimizar o acesso a capacidade de atenção do educando.

Portanto, quando o aluno é capaz de realizar o reconhecimento no campo perceptível de um objeto geométrico, é possível afirmar de acordo com Duval (2012) que o processo de compreensão está em desenvolvimento e que o seu aprendizado mesmo estando numa dimensão intuitiva, existiu a interação entre os registros semióticos conduzindo dessa forma o seu acesso aos objetos geométricos estudados. Caracterizando assim, de acordo com van Hiele o nível 1 de compreensão geométrica.

Dada a importância que o estudante avance em processo de aprendizagem, uma vez que o Ensino de Geometria de acordo com Duval (2013) contribui para o desenvolvimento de habilidades significativas para a formação integral do aluno, como por exemplo a sua capacidade de raciocínio, análise e visualização. Logo, o nível 2 na categorização abordada nessa pesquisa, a habilidade da análise das figuras em termos de seus componentes e suas respectivas propriedades requer uma capacidade de visualização que não seja simplesmente por sua aparência global.

Sendo assim, a atuação da apreensão discursiva toma um lugar de destaque no processo de compreensão dos exercícios desse segundo nível, o que impõe ao professor uma prática pedagógica diferenciada que estimule o estudante a acessar a figura geométrica em questão explorando o máximo do registro discursivo presente no problema. É intuitivo, que por se tratar de um processo de aprendizagem o educador precisa além de manter as práticas exigidas no nível anterior, dispor também de ações conjuntas com os alunos quanto a coordenação das informações em língua natural com o registro figural existente nas questões contribuindo cognitivamente para o aprimoramento da habilidade da análise.

7.4 CONTEXTO DA PRÁTICA

As atividades propostas foram aplicadas em quatro turmas do sexto ano do Ensino Fundamental Anos Finais, no segundo semestre de 2019, em duas escolas municipais da cidade de São Bento do Sul, ambas contendo duas turmas cada.

Antes de iniciar a aplicação do projeto, foram entregues os Termos de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE (Apêndice A) para que os pais assinassem permitindo a participação de seu filho(a) nas atividades.

A aplicação do projeto foi realizada em dois momentos. O primeiro consistiu na realização de um questionário, em que se encontravam questões que se faziam necessárias para a verificação do nível de aprendizagem em Geometria que cada educando possuía, para que assim, a partir dessa correção prévia pudesse saber de que forma seria melhor introduzir o conteúdo. Para este momento optou-se entregar para os alunos as questões separadas por níveis, começando pelo nível 1, em seguida o nível 2 e por último o nível 3. Isso se fez necessário, pois segundo o modelo de van Hiele, podemos ter a mesma questão em ambos os níveis, mas esperando respostas diferentes, conforme se aumenta o nível mais robusta deverá ser a resposta.

O segundo momento consistiu na explanação do conteúdo de Geometria, porém, buscando fazer com que os alunos a vissem de uma maneira mais atraente. Dessa forma, o planejamento das aulas teve por objetivo ensinar a Geometria Espacial primeiro, pois todos estão inseridos em um meio tridimensional, trazendo objetos geométricos que estão presentes na vida das pessoas. E, assim que conseguiram compreender a Geometria que estava em volta pode-se introduzir a Geometria Plana e explicar seus conceitos primitivos.

Vale ressaltar que, no primeiro momento, foi analisado os conhecimentos prévios de cada educando, para que o pesquisador avaliasse os resultados e soubesse como dar introdução no conteúdo, bem como as dificuldades apresentadas pelos estudantes em anos anteriores e, no segundo momento, buscou-se a compreensão da Geometria proposta para o sexto ano do Ensino Fundamental.

Para a coleta de dados foram efetuados:

- Observação: durante a aplicação do questionário e das atividades propostas durante as aulas, observou-se e registrou-se o desenvolvimento na resolução das atividades e na forma como os educandos encaravam cada desafio.
- Registros das atividades: no desenvolver das aulas foram propostas atividades para uma análise posterior.
- Registros fotográficos: durante as atividades foram realizados registros fotográficos utilizando o celular próprio.

7.5 DESCRIÇÃO DA PRÁTICA

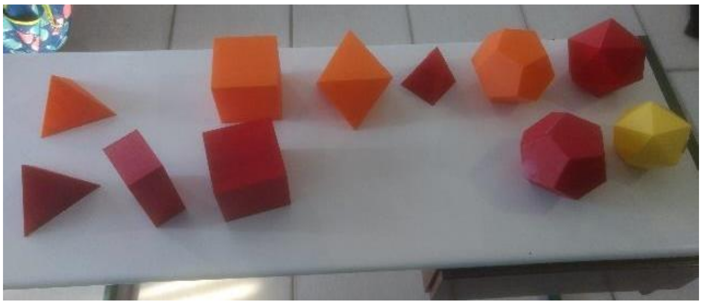
A realização da prática foi em meses diferentes para as duas escolas, pois não seria possível ministrar as aulas em diferentes lugares no mesmo horário. Dessa forma, foram realizadas as atividades na Escola Municipal Presidente Castelo Branco no mês de setembro e na Escola Municipal Alexandre Pfeiffer no mês de outubro, ambas realizadas seguindo o mesmo planejamento.

Primeiramente, em todas as turmas, foram explicados todos os procedimentos da pesquisa e em seguida entregue o questionário. O tempo estipulado nas quatro turmas foi de duas aulas de 45 min.

Sabendo que cada turma tem suas peculiaridades e que os alunos aprendem de maneiras diferentes em tempos diferentes, houve uma diferença de tempo de aprendizagem nas atividades propostas em cada turma, não interferindo no desenvolvimento da pesquisa.

Como parte do desenvolvimento da pesquisa, bem como do Produto Educacional apresentou-se para as crianças os cinco sólidos de Platão juntamente com o paralelepípedo e a pirâmide de base quadrada para que o aluno, durante as atividades pudesse manusear esse material, tornando assim, uma compreensão mais fácil do conteúdo. Os sólidos são estes mostrados na figura 24.

Figura 24 – Sólidos Geométricos



Fonte: Acervo da autora (2020).

Durante as aulas buscou-se sempre a interação dos alunos, tornando-os parte da aprendizagem e facilitando a explanação do conteúdo. Para tudo se tornar ainda mais significativo, buscou-se em quase todas as atividades formar grupos, pois segundo Vygotsky a interação é muito importante para o desenvolvimento do educando.

Por meio das atividades propostas para os alunos criou-se um Caderno Pedagógico com atividades de geometria, auxiliando os professores de matemática no desenvolvimento desse assunto.

As primeiras atividades foram questões abertas, fazendo com que se familiarizem com o assusto, questões como por exemplo:

- O que é Geometria?
- O que engloba a Geometria?
- Onde a encontramos em nosso dia a dia?

Essas são algumas questões que fazem os alunos lembrarem do seu dia a dia e fazerem alguns comentários, quebrando o tabu que tudo na matemática é abstrato e difícil. Durante todas as aulas buscava-se sempre saber o que o aluno tem de conhecimentos prévio para depois, juntos, fazer a construção da teoria propriamente dita.

Para a explanação de poliedros, os sólidos geométricos foram muito importantes, pois durante as atividades propostas os educandos puderam manusear o material, tendo uma compreensão melhor do que se estava estudando. Como mostram as figuras 25 e 26.

Figura 25 – Utilização dos sólidos geométricos nas Turmas 1 e 2

Fonte: Acervo da autora (2020).

Figura 26 – Utilização dos sólidos geométricos nas Turmas 3 e 4

Fonte: Acervo da autora (2020).

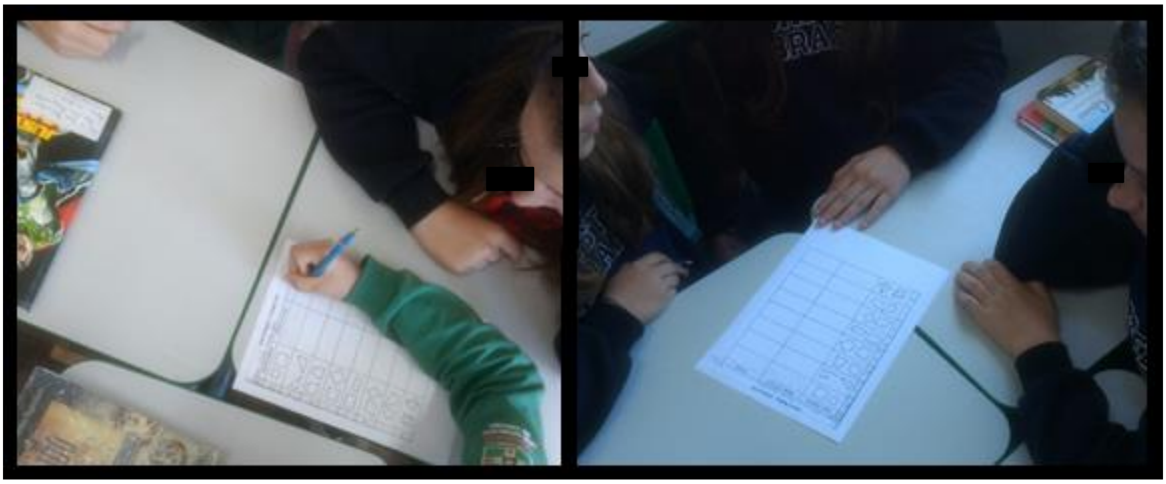
A introdução sobre retas foi feita por meio de uma discussão em grupo, em que cada grupo pode tirar suas próprias conclusões e depois o assunto foi trabalhado em conjunto. A figura 27 mostra o envolvimento por parte de todos durante a execução da atividade.

Figura 27 – Introdução as retas paralelas e concorrentes

Fonte: Acervo da autora (2020).

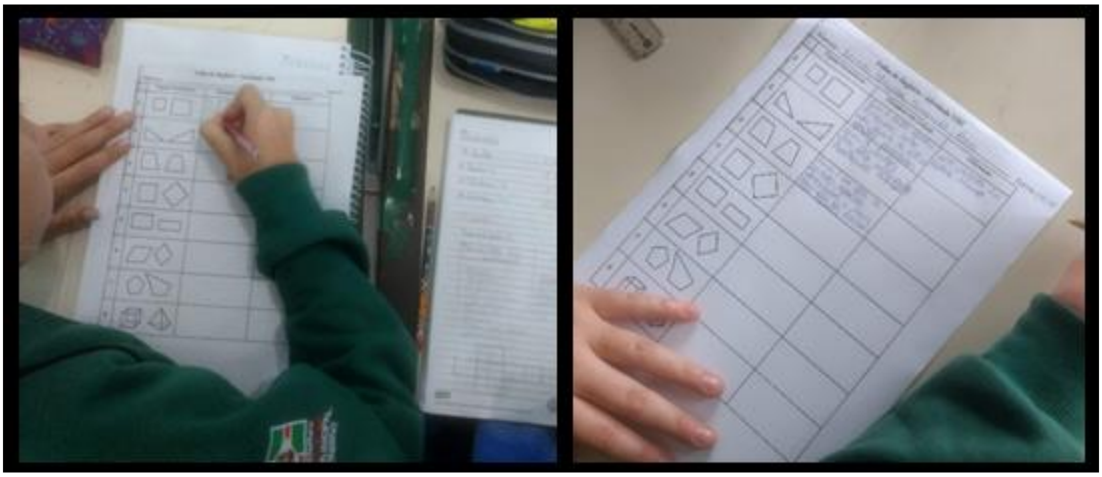
Dentre todos as atividades feitas pelos alunos, a última atividade proposta foi muito importante para a pesquisa, pois a análise desta pode-se ter uma noção do que os educandos realmente captaram do que lhes foi ensinado. As figuras 28 e 29 a seguir mostra alguns grupos durante o desenvolvimento da atividade.

Figura 28 - Atividade de van Hiele 1 nas Turmas 1 e 2



Fonte: Acervo da autora (2020).

Figura 29 – Atividade de van Hiele 1 nas Turmas 3 e 4



Fonte: Acervo da autora (2020).

8 PRODUTO EDUCACIONAL: APRESENTAÇÃO E DESCRIÇÃO

Para o desenvolvimento do Produto Educacional foram escolhidas atividades referentes ao ensino de Geometria, visando ajudar o educador a conhecer as dificuldades encontradas pelos seus alunos. Estas atividades já foram aplicadas em quatro turmas de sexto ano foram analisadas e modificadas para que o professor possa utilizá-las em suas aulas e obter a compreensão de todos os alunos em relação a Geometria.

O Produto Educacional, intitulado “Atividades com sólidos geométricos para o ensino de geometria plana no ensino fundamental”, é um caderno pedagógico composto por um questionário, sendo cinco questões para o nível 1, cinco questões para o nível 2 e cinco questões para o nível 3, bem como, oito atividades para serem aplicadas durante o ensino da Geometria no sexto ano. Este produto possibilitará ao educador um meio diferente de introduzir a Geometria em uma turma de sexto ano do ensino fundamental, visto que, este sugere um passo a passo para ser implementado durante as aulas. O diferencial desse caderno é a abordagem em relação ao modelo de van Hiele e a análise utilizando os registros de representação semiótica de Raymond Duval.

As atividades abordadas no produto educacional relacionada a compreensão prévia dos educandos para o conteúdo de Geometria, utilizando o modelo de van Hiele, foram retiradas do livro “Geometria segundo a teoria de van Hiele”, coordenado pelas a professoras Lilian Nasser e Neide F. Parracho Sant’anna de 2010. Não obstante, algumas das atividades para ajudar o aluno a entender conceitos geométricos foram criadas pela autora baseando-se em questões vistas ao longo dos anos lecionando.

A forma de conduzir o ensino de geometria consiste em aplicar um questionário relativo ao modelo em questão e sete atividades que auxiliam na compreensão geométrica, desenvolvido durante a construção desta pesquisa e disponibilizados no produto educacional. Dessa forma, os professores que ministram aulas para o Ensino Fundamental II, terão acesso a esse material e poderão utilizá-lo da forma que julgarem melhor, podendo fazer modificações e aplicar em outras anos/séries.

9 CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

No decorrer da pesquisa, é possível perceber a importância que o professor tem, auxiliando e acrescentando na formação de cada indivíduo, principalmente quando se utiliza os mecanismos adequados para que seu aluno possa progredir e expandir seus conhecimentos.

O modelo de van Hiele é uma forma interessante de o professor conhecer o que seu aluno já sabe, bem como ajudá-lo, da maneira correta, a prosseguir seus estudos em geometria com uma maior facilidade.

Para que os educandos progridam, o modelo sugere que essa progressão seja por meio de uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, em que o progresso de um nível para o seguinte se dá através do que o aluno viveu durante as atividades (adequadas). Lembrando sempre que para a teoria van Hiele o mais importante é a aprendizagem e não a idade ou maturação (LOPES; NASSER, 1996).

No entanto, pode-se perceber que muitos dos educandos participantes desta pesquisa apresentaram dificuldades em compreender as questões, e isso se dá pela falta da percepção icônica sobre as figuras geométrica pertinentes as questões realizadas, não demonstrando habilidades cognitivas suficientes ao nível 1. De fato, para que a compreensão dos objetos geométricos ocorra exige-se dos estudantes uma capacidade de visualização mais elevada, pois durante o processo de ensino e aprendizagem da geometria faz-se necessário a coordenação simultânea entre pelo menos dois registros de representação semiótica, discursivo e figural, evidenciando o olhar icônico sobre a imagem.

Contudo, é notório a diferença no ensino e aprendizagem em geometria quando o educador compreende as dificuldades encontradas por seus alunos, podendo, dessa forma, buscar meios diversificados para solucionar essa defasagem. Em vista disso, para que essa visão da Geometria bem como seu abandono mude, não basta o professor tentar trabalhar esse conteúdo no final do ano, “se sobrar tempo”. É preciso que ocorra uma mudança de atitude por parte do docente, pois é ele que deve estar pesquisando constantemente e abrindo os olhos de seus alunos para o brilhante mundo da Matemática, ou neste caso da Geometria.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos.** Rev. Bras. Educ., Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, Dec. 2004. Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-24782004000300007&lng=en&nrm=iso>. access on 28 Oct. 2018. http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782004000300007.

ANDRADE, Edelaine Cristina de. **Análise de uma proposta aplicada em sala de aula sobre geometria com foco na demonstração.** 2011. 157f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Londrina, 2011.

BELINE, Willian; COSTA, Nielce Menehuelo Lobo da. **Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores:** Algumas reflexões. Campo Mourão: Fecilcam, 2010. 272 p. Disponível em: <http:/www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/livros/educação_matematica.pdf> Acesso em: 23 set. 2016.

BRANDT, Célia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu; NOVAK, Franciele Isabelita Lopes. O desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em geometria segundo Raymond Duval: uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. **Olhar de Professor**, v. 21, n. 1, p. 98-115, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <568http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf>. Acesso em: 27 nov.2018.

CONTE, Katilene Grilo. **Um olhar sobre o ensino e aprendizagem da Geometria.** Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: 69 p., 2011/2.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. **Aprendendo e ensinando geometria.** São Paulo: Atual, p. 1-19, 1994.

DE SOUZA, Roberta Nara Sodré de; MORETTI, Mericles Thadeu; ALMOULOUD, Saddo Ag**. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas.** Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.l.], v. 21, n. 1, abr. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39101>. Acesso em: 21 mar. 2020.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et noésis**. 1993. (Préprint do livro publicado com o título "Sémiosis et pensée humaine". Bern: Peter Lang, 1995).

_______. Geometry from a cognitive point of view. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21^< st> century, 1998.

_______. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Universidad del Valle, 2004.

______. **Les conditions conitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leurs fonctionnements**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n. 10, p. 5-53, 2005.

______. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.** Organização de Tânia MM Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. FREITAS, AD A utilização do geogebra no ensino de matemática: recurso para os registros de representação e interação. 2009. 114 f. 2009. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo.

______. **Diferenças semânticas e coerência matemática**. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012a. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat).

______. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM; PPGECT, 2012b. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat)

______. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.** Trad. Méricles T. Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012 c. ISSN 1981-1322. Disponível em: Acesso em: 23 jun. 2020.

FELIX, Anágela Cristina Morete. **Estudo dos registros de representação semiótica mediados por um objeto de aprendizagem**. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, 2014.

FERREIRA, Emilia Barra; SOARES, Adriana Benevides; LIMA, Josefino Cabral. **As demonstrações no Ensino de geometria:** discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias. Bolema, Rio Claro – SP, Ano 22, n. 34, p. 185 -208, 2009.

FONSECA, Maria da Conceição F. R., et al. **O ensino da geometria na escola fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 3 ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

JAIME, A.; GUTIERREZ, A. **Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometria:** El modelo de van Hiele. [S.l.]: S. Llinares and M. V. Sánchez, 1990. Citado 4 vezes nas páginas 33, 38, 39 e 40.

KALEFF, Ana Maria et al.. **Desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de Van Hiele.** Bolema, Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. Reflexões Sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas Segundo Raymond Duval. In: MORETTI, Méricles Thadeu (Org.). **As Contribuições da Teoria das**

Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014 – 256p.

LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSER, Lilian. **Geometria:** na era da imagem e do movimento. Editora UFRJ – Rio de Janeiro, 160 p., 1996.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em revista - SBEM, nº4, 1º semestre de 1995.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, M. E. D. A. **Métodos de coleta de dados: observação, entrevista e análise documental.** Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, p. 25-44, 1986.

MASSONI, Neusa Teresinha; MOREIRA, Marco Antonio. **Pesquisa Qualitativa em educação em ciências: projetos, entrevistas, questionários, teoria fundamentada, redação científica.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

MORETTI, Méricles Thadeu. **Estudo das apreensões e dos olhares em geometria**.VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – ULBRA, Canoas – Rio Grande do Sul, Brasil. 2013A.

MORETTI, Méricles Thadeu. **Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria.** Acta Scientiae, V.15, nº. 2, p. 289-303, maio/ago. 2013b.

MORETTI, Méricles Thadeu e BRANDT, Célia Finck. **Construções de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras.** III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015.

MORETTI, Méricles; BRAND, Celia Finck (org). **Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval**. Florianópolis: Ed. REVEMAT/UFSC, 2020. 485 p.

NAGATA, Rosenilda de Souza. **Os níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico:** o aprendizado do conteúdo de polígonos numa perspectiva do modelo de Van Hiele. 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

NASSER, Lílian. **Níveis de van Hiele**: uma explicação definitiva para as dificuldades em Geometria. Boletim do GEPEM, n. 29, p. 33-38, 1992.

NASSER, L.; SANT’ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

OLIVEIRA, Liliane Lelis; VELASCO, Angela Dias. Graphica 2007. **O ensino da geometria nas escolas de nível médio da rede pública da cidade de guaratinguetá.** 2007. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/doc_gedraf/artigos_graphica/OENSINO.pdf> Acessado em: 23/08/2016.

OLIVEIRA, Regina Célia de. **Investigando o ensino da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental:** uma análise das escolhas dos professores. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, CE. Recife, 2014.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion; NACARATO, Adair Mendes. **O ensino de geometria no ciclo de alfabetização:** um olhar a partir da provinha Brasil The geometry teaching in literacy cycle: a view from "provinha Brasil". Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 16, n. 4, p. 1147-1168, 2014.

PÉRTILE, Karine. **O modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico:** uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio. 85f. Dissertação (Mestrado) – PUCRS – Faculdade de Física, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. Porto Alegre, 2011.

PAVANELLO, R. M**. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. Revista Zetetiké, ano 1, vol. 1, Campinas: Editora UNICAMP, 1993, p. 7 - 17.

PIMENTEL, Jailson. **O ensino de geometria por meio de construções geométricas.** 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O ensino da geometria na educação básica: realidade e possibilidades.** 2015. Disponível em: < http://www.diaadiaeducação.pr.gov.br/potals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Acessado em: 21 ago. 2016.

SANTOS, Cleane Aparecida dos; NACARATO, Adair Mendes. **Aprendizagem em geometria na educação básica:** A fotografia e a escrita na sala de aula. 1.ed., Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2014.

SILVA, Claricy Alves et al. **O ensino da geometria no sexto ano do Ensino Fundamental por meio de oficinas.** 2016.

TEIXEIRA, Paulo Marcelo Marini; NETO, Jorge Megid**. Uma proposta de tipologia para pesquisas de natureza interventiva**. Ciência & Educação (Bauru), v. 23, n. 4, p. 1055-1076, 2017.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Que geometria ensinar? uma breve história da redefinição do conhecimento elementar matemático para crianças**. Pro-Posições, Campinas, v. 24, n. 1, p. 159-178, Apr. 2013. Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-73072013000100011&lng=en&nrm=iso>. access on 28 Oct. 2018. http://dx.doi.org/10.1590/S0103-73072013000100011.

VILLIERS, Michael De. **Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele.** Educação Matemática e Pesquisa. São Paulo, v.12, n.3, p.400-431, 2010.

WALDOMIRO, Tatiane de Camargo. **Abordagem histórico – epistemológico do ensino de geometria fazendo o uso da geometria dinâmica.** 2011. 90 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós – Graduação em Educação, Faculdade da Universidade de São Paulo – SP, 2011. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/tese/disponivel/48/48134/TDE-04072011-145346/pt-br.php> Acesso em: 22 jan. 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

cepsh Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado intitulada **Ensino de Geometria Plana no Ensino Fundamental por meio dos sólidos geométricos com aporte da Teoria de Van Hiele**, em que será testado um material didático que foi desenvolvido para ensinar o conteúdo de Geometria, tendo como objetivo avaliar em que nível da teoria de Van Hiele o aluno se encontra. Serão previamente marcados a data e horário para o de desenvolvimento da atividade utilizando as aulas de Matemática. Estas medidas serão realizadas no seu ambiente escolar. Também serão realizadas atividades com um material didático para o ensino de Geometria. Não é obrigatório participar de todas as oficinas ou responder a todas as perguntas.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente e seu/sua acompanhante não terão despesas e nem serão remunerados pela participação na pesquisa. Todas as despesas decorrentes de sua participação serão ressarcidas. Em caso de danos, decorrentes da pesquisa será garantida a indenização.

Os riscos destes procedimentos serão mínimos, havendo a possibilidade de constrangimento e cansaço durante a realização da atividade. Para minimizar estes riscos, as atividades serão desenvolvidas coletivamente, porém a teoria de Van Hiele será feita individualmente e os resultados serão mantidos em sigilo.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirá conhecer e analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos, e ainda, testar o matérial didático construído para facilitar a aprendizagem deste conteúdo.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão a estudante de mestrado Andressa Caneppele Schlickmann e o professor orientador Rogério de Aguiar.

O(a) senhor(a) poderá retirar o(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados do(a) seu(ua) filho(a)/dependente para a produção de artigos técnicos e científicos. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Andressa Caneppele Schlickmann

Telefone: (49) 9 84024701

Endereço: Rua Paulo Malschitzki, s/n, Campus Universitário Avelino Marcante

Professor Rogério de Aguiar

Telefone: (47) 4009-7941

Endereço: Rua Paulo Malschitzki, s/n, Campus Universitário Avelino Marcante

ASSINATURA DO PESQUISADOR:

Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – CEPSH/UDESC

Av. Madre Benvenuta, 2007 – Itacorubi – Florianópolis – SC - 88035-901

Fone: (48) 3664-8084 / (48) 3664-7881 - E-mail: cepsh.reitoria@udesc.br / cepsh.udesc@gmail.com

CONEP- Comissão Nacional de Ética em Pesquisa

SRTV 701, Via W 5 Norte – Lote D - Edifício PO 700, 3º andar – Asa Norte - Brasília-DF - 70719-040

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. Eu compreendo que neste estudo, as medições dos experimentos/procedimentos de tratamento serão feitas em meu(minha) filho(a)/dependente, e que fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso ____

Assinatura ___________________________ Local: __________________ Data: ____/____/____ .

Fone: (61) 3315-5878/ 5879 – E-mail: conep@saude.gov.br

APÊNDICE B: CONSENTIMENTO PARA FOTOGRAFIAS, VÍDEOS E GRAVAÇÕES

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

cepsh Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

CONSENTIMENTO PARA FOTOGRAFIAS, VÍDEOS E GRAVAÇÕES

Permito que sejam realizadas fotografias, filmagem ou gravação de meu filho/dependente para fins da pesquisa científica intitulada "**Ensino de Geometria Plana no Ensino Fundamental por meio dos sólidos geométricos com aporte da Teoria de Van Hiele**", e concordo que o material e informações obtidas relacionadas ao meu filho/dependente possam ser publicados eventos científicos ou publicações científicas. Porém, o meu filho/dependente não devem ser identificado por nome ou rosto em qualquer uma das vias de publicação ou uso, e que as fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade e guarda do grupo de pesquisadores do estudo.

___________________, _____ de ____________ de _______

Local e Data

____

Nome do Responsável pelo Sujeito Pesquisado

____

Assinatura do Responsável pelo Sujeito Pesquisado