MEDIDAS

E

ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Física Experimental

Departamento de Física
Centro de Ciências Tecnológicas/UDESC

APRESENTAÇÃO

A Física é uma ciência experimental. Em outras palavras, todo conhecimento físico é oriundo de medidas, sejam as leis, os princípios, os modelos, etc, desde o mundo infinitamente pequeno das partículas elementares até o mundo infinitamente grande das galáxias. Para adentrarmos o maravilhoso mundo desta ciência, é imprescindível saber medir. Este processo inclui manusear instrumentos de medida, expressar corretamente a informação extraída desses instrumentos, fazer operações matemáticas, informar à comunidade científica o quanto é possível confiar-se nessa medida, e todos os procedimentos comuns a uma ciência exata, como é a Física.

Pode-se afirmar que, se toda medida tem erro, então, a Física não é uma ciência tão exata! Logo, é neste aspecto que precisamos ser mais cuidadosos, o tratamento dos erros das medidas. É evidente que o objetivo principal em uma medição é obter o menor erro possível. Verificaremos que as limitações do instrumento de medida governam esse fator.

O ensino de laboratório é um recurso facilitador para o aprendizado da Física Básica. O fato de ser uma ciência experimental sinaliza que a atividade prática auxilia a entender os conteúdos estudados. Enfatizamos, durante as medições em um experimento e a análise de seus resultados, é que o estudante percebe que a teoria escrita e trabalhada, principalmente através de exercícios acadêmicos, tem diferenças do comportamento físico real. Neste ponto, repetimos, é imprescindível saber trabalhar esses “erros” (diferenças entre os resultados fornecidos pelas equações teóricas e os resultados obtidos nos experimentos).

O texto contido neste manual está orientado para facilitar ao estudante a aquisição dos hábitos adequados à atividade experimental, a partir de seus primeiros contatos com o laboratório. Não há a pretensão de esgotar-se o assunto, muito menos de formar especialistas em atividades no laboratório. Há a preocupação em estabelecer um texto padrão que delimite o conhecimento mínimo que se espera os estudantes tenham ao adentrar o laboratório, a fim de executar os experimentos programados.

Este manual serve de apoio às atividades práticas de Física Experimental, que são desenvolvidas nas disciplinas de Física Básica no Centro de Ciências Tecnológicas da UDESC. Todo conhecimento superior àquele apresentado neste texto deve ser buscado na vasta literatura existente, em especial, no tratamento estatístico de medidas, nos softwares gráficos, e outros recursos utilizados pelos físicos experimentais pesquisadores.

Outro esclarecimento que se faz necessário é o fato deste texto ter sido elaborado, revisado, escrito e reescrito por vários professores do Departamento de Física da UDESC, o que torna impraticável citar nominalmente os professores envolvidos e as referências adotadas, informações que se perderam ao longo do tempo.

Prof. Vitor Hugo Garcia
Março/2007

I. MEDIDAS

I.1. Introdução

Ao abordar um determinado problema, o pesquisador deve seguir o "método científico", que pode ser resumido no seguinte procedimento:

- observação do fenômeno;
- formulação de hipóteses explicativas do fenômeno;
- teste das hipóteses através da realização de experimentos;
- elaboração de uma teoria sobre o fenômeno estudado.

Na fase da experimentação, devem ser realizadas medidas das grandezas físicas relacionadas ao fenômeno em estudo.

Grandezas Físicas: Quantidades que podem ser medidas. Por exemplo, massa, comprimento, velocidade, força, etc. Dividem-se em grandezas fundamentais (independentes entre si) e grandezas derivadas. O conjunto das grandezas fundamentais forma um sistema que pode descrever todas as grandezas físicas derivadas, por exemplo, o Sistema Internacional de Unidades (S.I.).

Medida de Grandeza Física: Medir uma grandeza significa compará-la com outra, da mesma espécie, definida como **unidade**, para verificar a relação numérica existente entre elas. Seja G a quantidade de uma grandeza física qualquer, e U a unidade convencionada para esta grandeza, então, o valor numérico M(G) desta quantidade é a razão: M(G) = G/U, de modo que o resultado desta medição resulta: G = M(G) U. Todas as medidas de grandezas físicas apresentam unidade!

<u>Exemplo 1:</u> U = 1 grama (símbolo g). Suponha que a medição de uma certa massa m = G é feita (através de um instrumento adequado, por exemplo, uma balança tradicional) comparando-a com a unidade, de tal modo que se obtém: M(G) = G/U = 101,25, portanto, G = M(G) U = **m = 101,25 g**.

As unidades geralmente podem ser apresentadas em seus múltiplos e submúltiplos, de acordo com a conveniência da escala da grandeza. As dimensões atômicas são medidas em angstrons (10^{-10} m), geralmente, enquanto que as dimensões terrestres são medidas em quilômetros (10^3 m).

O ato de medir vai desde comparar simplesmente a quantidade com a unidade padrão (medida direta), até o desenvolvimento de processos, cuja complexidade está intimamente ligada à quantidade em questão (medida indireta).

Toda medida traz consigo erros intrínsecos, cujas origens podem ser as mais variadas, de modo que a informação da quantidade deste erro deve, obrigatoriamente, fazer parte do resultado da medição. Sem entrar-se no detalhe da medição, pode-se definir a medida de uma grandeza como o resultado da sua comparação com um padrão (a unidade) mais um valor correspondente ao erro provável, ou seja, a informação da confiança que se pode ter no processo da medição:

$$G = (M(G) \pm \Delta M) U.$$

O sinal $\pm$ indica que o erro provável tanto pode contribuir para aumentar o valor medido quanto para diminuí-lo. Em outras palavras, a "medida mais provável" encontra-se na região contida pelos valores $[(M(G) - \Delta M) ; (M(G) + \Delta M)]$ U.

<u>Exemplo 2:</u> Suponha que na medição efetuada no exemplo anterior, o erro provável originado por inúmeras causas, foi de 0,04 g, então, o resultado deve ser escrito na forma:

$$m = (101,25 \pm 0,04) \text{ g} .$$

Este resultado indica que a medida da grandeza tem um valor provável entre 101,21g e 101,29g, em virtude das condições em que a mesma foi realizada.

I.2. Algarismos Significativos de uma Medida

No processo de medir participam: o objeto (grandeza) a ser medido, o instrumento de medição (e seu funcionamento), a unidade padrão utilizada e o experimentador (responsável pela execução dos procedimentos de operação para fazer as leituras na escala do instrumento).

A **medida** é **direta** quando o valor desconhecido da grandeza é comparado diretamente com o valor padrão da grandeza. Consideremos que L_x seja a largura de uma parede que é comparada com o metro padrão, o resultado da comparação será a medida direta do valor de L_x, por exemplo, $L_x = 4{,}3$ m.

A **medida indireta** é realizada efetuando-se operações matemáticas com as medidas diretas. Consideremos que H_x seja a altura dessa parede, que é comparada com o metro padrão, o resultado da comparação será a medida direta do valor de H_x., por exemplo, $H_x = 2{,}6$ m. Neste caso, a área da parede será obtida através da operação matemática (multiplicação) entre as medidas diretas, portanto, será uma medida indireta, isto é,

$$\text{área da parede} = L_x \text{ x } H_x = 4{,}3 \text{ m x } 2{,}6 \text{ m} = 11{,}18 \text{ m}^2 = 11 \text{ m}^2$$

As medidas diretas L_x e H_x apresentam erros individualmente, isto faz com que a medida indireta "área da parede" também tenha erro. Veremos mais adiante como tratar esse erro propagado nas medidas indiretas.

Quando o experimentador executa o ato de medir diretamente, isto é, compara a grandeza do objeto com o instrumento de medida, todos os algarismos lidos, acompanhados de um último duvidoso, são chamados de algarismos significativos. Enfatizamos, os **algarismos significativos** de uma medida são aqueles que temos plena certeza, mais um duvidoso. Obviamente, qualquer algarismo que for colocado à direita do duvidoso não é significativo e, portanto, não deve ser considerado. O algarismo duvidoso é significativo, e está diretamente ligado à escala do instrumento de medida. De fato, o algarismo duvidoso é um indicativo da escala do instrumento de medida. Vejamos o exemplo mostrado através da figura 1.

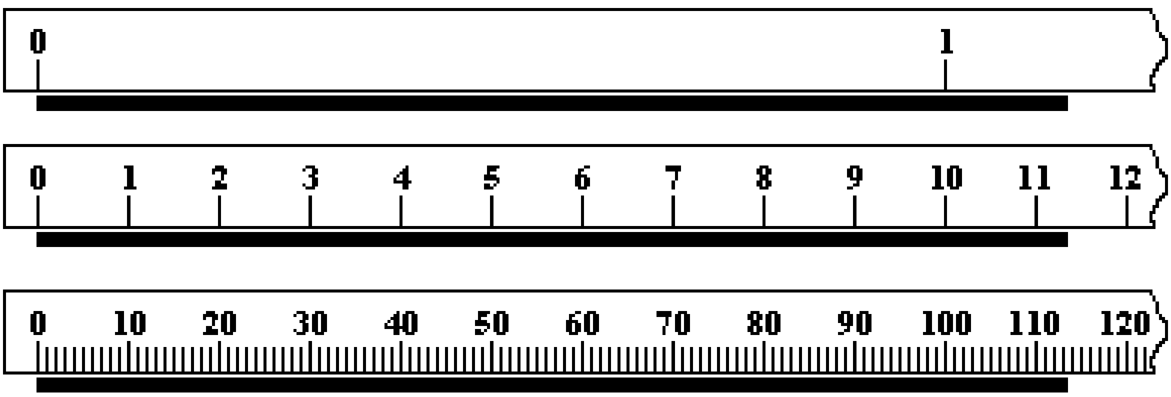


Figura 1

<u>Exemplo 3</u>: Considere que o experimentador dispõe de três réguas, cada uma com diferentes unidades de comprimento: decímetros, centímetros e milímetros; para medir o tamanho (comprimento = **L**) de uma certa tira de papel (representada na figura 1 como uma linha espessa). O experimentador fará corretamente, as seguintes leituras:

Instrumento de Medida	L	Quantidade de Algarismos Significativos Obtidos
régua decimetrada	1,<u>1</u> dm	2
régua centimetrada	11,<u>3</u> cm	3
régua milimetrada	113,<u>4</u> mm	4

Note que o algarismo duvidoso (sublinhado no resultado da leitura) é aquele que o experimentador precisa supor, pois a extremidade do objeto medido está entre dois traços indicativos da escala da régua, além daquele que se tem certeza. Então, o experimentador dividiu em décimos, mentalmente, a distância entre os dois traços e supôs "a olho" o algarismo correspondente a quantos décimos está a extremidade medida do objeto. Outro experimentador poderia fazer as seguintes leituras: 1,<u>2</u> dm, 11,<u>4</u> cm, e 113,<u>3</u> mm, o que também seria aceitável, pois o último algarismo (sublinhado) é o duvidoso, e depende somente do "olho" do experimentador.

Pode-se perguntar: "E se a extremidade do objeto coincidisse exatamente com um dos traços da régua?" Neste caso fica mais fácil, pois o algarismo duvidoso é simplesmente o ZERO. Por exemplo, a leitura poderia ser 1,<u>0</u> dm, ou 10,<u>0</u> cm, ou 100,<u>0</u> mm, neste caso muito especial.

Alguém ainda pode dizer: "As calculadoras não registram os zeros à direita da vírgula quando fazem cálculos. Isto significa que os zeros à direita não são significativos?" As calculadoras efetivamente desconsideram esses zeros, até por economia, mas veremos adiante que os zeros à direita são imprescindíveis e, portanto, precisam e devem ser considerados. Os zeros à esquerda, porém, não são significativos.

I.3. Precisão do Instrumento de Medida

Quando se faz a medida de algo, deve-se escolher o instrumento de medida cuja unidade seja coerente com o "tamanho" da grandeza observada. Por exemplo, para medir a distância entre duas cidades é conveniente usar o quilômetro, mas para medir a distância entre estrelas é conveniente usar unidades astronômicas, tais como o ano-luz ou o parsec.

A precisão de um instrumento de medida fornece uma certa quantidade de algarismos significativos, como vimos no exemplo anterior. Dentre as três réguas, a mais precisa foi a milimetrada, pois forneceu a maior quantidade de algarismos significativos para a medida do comprimento da tira de papel. Para obter uma medida com um número maior de algarismos significativos, é necessário que a mesma seja efetuada com instrumento mais preciso que régua milimetrada, por exemplo, um paquímetro com escala em décimos de milímetro.

O resultado de uma medida fornece informação sobre a escala do instrumento adotado. Ainda considerando o exemplo das três réguas, quando o experimentador escreve o resultado da medida realizada como: 11,<u>3</u> cm; está sinalizando que a escala da régua utilizada é o centímetro, pois o algarismo duvidoso está na primeira casa decimal (algarismo 3).

Alguém poderia raciocinar apressadamente e dizer: "Está óbvio que a escala da régua é em centímetros, pois a medida está dada nesta unidade." Então, para melhor entendimento, vamos escrever a medida em outra unidade, por exemplo, o metro. Isto é,

$$11,\underline{3}\text{ cm} = 0,11\underline{3}\text{ m}.$$

Neste caso, a escala seria em metros? Obviamente que não, pois a mudança de unidades não pode afetar a quantidade de algarismos significativos obtidos na medida, sob pena de estarmos alterando "a mão" (ou adulterando) a medida. Observe que, se a medida for escrita como 0,11<u>3</u> m, o algarismo duvidoso (sublinhado) continua na mesma posição: a casa dos décimos de centímetro e novamente, portanto, indicando que a escala da régua é em centímetros.

Alguém ainda poderia dizer: “Mas a mudança de unidades modificou a quantidade de algarismos significativos, pois eram três ($11,\underline{3}$ cm) e passaram a ser quatro ($0,11\underline{3}$ m)”. Lembramos, o algarismo zero, colocado à esquerda dos demais não é significativo, seu papel é “ancorar” a vírgula devido à mudança de unidades.

No caso particular da régua milimetrada em que o zero é o algarismo duvidoso (relembramos, o algarismo duvidoso é uma estimativa do valor entre dois traços indicativos de milímetros), por exemplo: $100,\underline{0}$ mm; a mudança de unidades não pode modificar a quantidade de algarismos significativos obtidos na medida (quatro), então, deveremos ter em metros:

$$100,\underline{0} \text{ mm} = 0,100\underline{0} \text{ m} ;$$

portanto, continuam os mesmos quatro algarismos significativos!

Sempre que se efetua uma medida, seu valor é representado por um número, acompanhado de uma unidade. Esse número contém uma quantidade fixa de algarismos significativos, que depende da precisão do instrumento utilizado. Citando o exemplo das três réguas, jamais se poderiam encontrar valores tais como $1,\underline{1}5$ dm usando a régua decimetrada, pelo fato da escala da régua (em decímetros) só permitir certeza nesta casa decimal (casa dos decímetros). Assim, o algarismo da primeira casa decimal (casa dos centímetros) só pode ser estimado “a olho”, sendo, portanto, o duvidoso (último algarismo significativo). Claramente, o algarismo da segunda casa decimal (1,1**5** dm) não é significativo, de modo que, com a régua decimetrada só é possível obter-se dois algarismos significativos na medida da tira de papel. Para obter uma medida do comprimento da tira de papel com um número maior de algarismos significativos, é necessário que a mesma seja efetuada com instrumento mais preciso do que a régua decimetrada. No exemplo, as réguas centimetrada e milimetrada são mais precisas.

I.4. Transformação de Unidades

Considere que é medido o comprimento $\mathbf{l_f}$ de um fio de linha, utilizando as réguas da fig.1, e são obtidos os seguintes valores:

Instrumento de Medida	$\mathbf{l_f}$	**Quantidade de Algarismos Significativos Obtidos**
régua decimetrada	$18,\underline{7}$ dm	3
régua centimetrada	$186,\underline{6}$ cm	4
régua milimetrada	$1865,\underline{4}$ mm	5

Como já sabemos, transformar as unidades destas medidas não pode alterar a quantidade de algarismos significativos. Então, como podemos expressar estas medidas em m, dam, hm, km, ou outras unidades maiores do que aquelas fornecidas pelas réguas?

Você deve estar se perguntando: mas o que são dam e hm? A resposta é simples. Para grandezas que são múltiplos e submúltiplos de uma grandeza física fundamental foram convencionados prefixos indicativos do fator pelo qual esta é multiplicada. A tabela abaixo pode ser consultada sempre que a dúvida surgir.

Fator	Prefixo	Símbolo
10^{24}	iota	Y
10^{21}	zeta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

Fator	Prefixo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	ato	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	iocto	y

Voltando à pergunta. Observe que a grandeza medida é a mesma, isto é, o comprimento de um fio de linha, assim, independentemente da unidade, o número de algarismos significativos obtidos através de cada instrumento de medida deve ser mantido.

Instrumento De Medida	$\mathbf{l_f}$	**Quantidade (ou número) de Algarismos Significativos Obtidos**
régua decimetrada	$18,\underline{7}$ dm = **1,87 m = 0,187 dam = 0,0187 hm = 0,00187 km**	3
régua centimetrada	$186,\underline{6}$ cm = **1,866 m = 0,1866 dam = 0,01866 hm = 0,001866 km**	4
régua milimetrada	$1865,\underline{4}$ mm = **1,8654 m = 0,18654 dam = 0,018654 hm = 0,0018654 km**	5

Os zeros à esquerda do primeiro algarismo significativo nas transformações acima não são significativos, servem apenas para fixar a posição decimal da unidade (m, dam, km, etc), que é indicada pela vírgula. De maneira geral, todos os algarismos de uma medida são significativos, exceto os zeros à esquerda, que servem apenas para localizar a posição da vírgula.

Veja na tabela abaixo alguns exemplos de medidas e a quantidade de algarismos significativos em cada uma.

Medida	**Número de Alg. Sign.**
7 x 10 km	Um
0,000005 ohms	Um
0,0013 A	Dois
66 x 10^{11} anos	Dois
0,0450 mm	Três
2,31 x 10^{-1} cal/J	Três

Medida	**Número de Alg. Sign.**
0,0001540 K^{-1}	Quatro
35,40 g	Quatro
9,8067 m/s^2	Cinco
1,9764 x 10^{-23} átomos de Na	Cinco
15000 s	Cinco
4,00000 x 10^{-3} eV/C	Seis

Como já sabemos, transformar as unidades das medidas do comprimento do fio de linha não pode alterar a quantidade de algarismos significativos obtidos. Então, como podemos expressar essas medidas em cm, mm, μm, nm, Å (1 Å = 10^{-10} m), ou outras unidades menores do que aquelas fornecidas pelas réguas?

Observe, novamente, que a grandeza medida é a mesma, isto é, o comprimento de um fio de linha. Assim, independentemente da unidade, o número (ou quantidade) de algarismos significativos deve ser mantido.

Instrumento de medida	l_f	**Quantidade de Algarismos Significativos Obtidos**
Régua decimetrada	18,<u>7</u> dm = **187 cm** = **187 x 10 mm** = **187 x 10^4 μm = 187 x 10^7 nm = 187 x 10^8 Å**	3
régua centimetrada	186,<u>6</u> cm = **1866 mm** = **1866 x 10^3 μm** = **1866 x 10^6 nm = 1866 x 10^7 Å**	4
régua milimetrada	1865,<u>4</u> mm = **18654 x 10^2 μm** = **18654 x 10^5 nm = 18654 x 10^6 Å**	5

Mostrou-se que para transformar a unidade de uma medida para uma unidade menor, ou submúltiplo, é necessário multiplicá-la por uma potência de 10, a fim de manter a quantidade de algarismos significativos obtidos na medida.

Vamos enfatizar este procedimento através de mais um exemplo: transformar para mm a unidade da medida feita com a régua decimetrada (18,7 dm). Neste caso, **dm → mm**, somos tentados a colocar zeros à direita, isto é,

18,7 dm = **1870 mm** (errado!)

Procedendo assim, estamos alterando a quantidade de algarismos significativos da medida fornecida pela régua decimetrada de três (18,7 dm) para quatro (1870 mm = 18,70 dm), como se a medida fosse realizada com uma régua centimetrada, o que é falso! Portanto,

18,7 dm = **187 x 10 mm** (correto!)

I.5. Notação Científica

Considere as seguintes medidas:

30 dm, **300 cm**, e **3000 mm**.

Ainda que representem a mesma dimensão, aparecem escritas com diferentes números (ou quantidades) de algarismos significativos, respectivamente, dois, três e quatro. Como vimos, isto é o resultado de uma medição feita com diferentes réguas, ou instrumentos de medida.

Quando está escrito que algo mede 3000 mm, está assegurada a precisão da medida na ordem do milímetro, lembrando que o último zero à direita (300<u>0</u> mm) é o algarismo duvidoso e, portanto, a medida foi feita com uma régua centimetrada.

Podem ser empregadas distintas unidades para expressar medidas, porém, deve ser mantido o mesmo número de algarismos significativos. As três medidas acima, escritas em uma mesma unidade, por exemplo, o micrometro (μm), ficam assim:

$$\mathbf{30 \times 10^{5}\ \mu m, \quad 300 \times 10^{4}\ \mu m, \quad 3000 \times 10^{3}\ \mu m.}$$

No caso acima, todos os números são expressos em potências de 10.

Para facilitar, tanto a expressão do resultado de uma medida, como a transformação de unidades, pode-se utilizar a notação científica. Esta notação consiste em utilizar apenas um algarismo significativo antes da vírgula, o primeiro à esquerda, multiplicado por uma potência de dez cujo expoente representa a ordem de grandeza da medida, seguida pela unidade correspondente. Logo, o algarismo antes da vírgula deve ser um número inteiro entre 1 e 9. Então,

$$\mathbf{30\ dm = 30 \times 10^{5}\ \mu m = 3{,}0 \times 10^{6}\ \mu m}$$
$$\mathbf{300\ cm = 300 \times 10^{4}\ \mu m = 3{,}00 \times 10^{6}\ \mu m}$$
$$\mathbf{3000\ mm = 3{,}000 \times 10^{3}\ \mu m = 3{,}000 \times 10^{6}\ \mu m.}$$

Veja na tabela a seguir alguns exemplos de medidas expressas em notação científica, e a quantidade de algarismos significativos em cada uma.

Medida	**Quantidade (ou Número) de Algarismos Significativos**
$4\ N/m^2 = 4 \times 10^0\ N/m^2$	Um
$0{,}0000013\ g = 1{,}3 \times 10^{-6}\ g$	Dois
$760\ mm\text{-}Hg = 7{,}60 \times 10^2\ mm\text{-}Hg$	Três
$0{,}003671\ K^{-1} = 3{,}671 \times 10^{-3}\ K^{-1}$	Quatro
$980{,}66\ cm/s^2 = 9{,}8066 \times 10^2\ cm/s^2$	Cinco
$299776\ km/s = 2{,}99776 \times 10^5\ km/s$	Seis
$5000000\ eV/C = 5{,}000000 \times 10^6\ eV/C$	Sete

Escrevendo a medida em notação científica somente aparecem os algarismos significativos. Por exemplo, considere a medida feita com régua decimetrada: **18,7 dm** , transformada para km, isto é,

$$\mathbf{18{,}7\ dm = 0{,}00187\ km}.$$

Em notação científica fica $\mathbf{18{,}7\ dm = 1{,}87 \times 10^{-3}\ km}$,

portanto, constam apenas os três algarismos significativos obtidos na medida, aqueles que se tem certeza mais o duvidoso, de modo que os zeros à esquerda, que não são significativos, desaparecem, mesmo mudando a unidade!

A notação científica facilita a transformação de unidades, o que pode ser verificado através dos seguintes exemplos.

(1) $123{,}89\ km^3 = 123{,}89\ (1\ km)^3 = 123{,}89\ (1 \times 10^6\ mm)^3 = 123{,}89 \times 10^{18}\ mm^3 =$
$(1{,}2389 \times 10^2) \times 10^{18}\ mm^3 = 1{,}2389 \times 10^{20}\ mm^3$

(2) $1{,}576\ cm^2 = 0{,}00000001576\ hm^2$ ou,

$1{,}576\ cm^2 = 1{,}576\ (1\ cm)^2 = 1{,}576\ (1 \times 10^{-4}\ hm)^2 = 1{,}576 \times 10^{-8}\ hm^2$

(3) $984{,}7\ mm^3 = 984{,}7\ (1\ mm)^3 = 984{,}7\ (1 \times 10^{-3}\ m)^3 = 984{,}7 \times 10^{-9}\ m^3 = (9{,}847 \times 10^2) \times 10^{-9}\ m^3 =$
$9{,}847 \times 10^{-7}\ m^3$

(4) $1{,}3\ km/h = 1{,}3\ (1\ km)/(1\ h) = 1{,}3\ (1 \times 10^3\ m)/(3600\ s) = 0{,}36111...\ m/s = 0{,}36\ m/s =$
$3{,}6 \times 10^{-1}\ m/s$

(5) $148{,}0\,\dfrac{N}{m^2} = 148{,}0\left(\dfrac{kg.m}{s^2}\right)\left(\dfrac{1}{m^2}\right) = 148{,}0\left(\dfrac{kg}{m.s^2}\right) = 148{,}0\left(\dfrac{1.10^3 g}{(1.10^2 cm).s^2}\right) = 148{,}0.10\,\dfrac{g}{cm.s^2} =$
$(1{,}480 \times 10^2)\ .\ 10\ g/(cm.s^2) = 1{,}480 \times 10^3\ g.cm^{-1}.s^{-2}$

(6) $1{,}290s = 1{,}290\left(\dfrac{1}{60}\right)\min = 1{,}290\left(\dfrac{1}{60}\right)\left(\dfrac{1}{60}\right)h = 1{,}290\left(\dfrac{1}{60}\right)\left(\dfrac{1}{60}\right)\left(\dfrac{1}{24}\right)\text{dia} =$

$1{,}290\left(\dfrac{1}{60}\right)\left(\dfrac{1}{60}\right)\left(\dfrac{1}{24}\right)\left(\dfrac{1}{365{,}25}\right)\text{ano} = 4{,}0877633... \times 10^{-8}\ \text{ano} = 4{,}088 \times 10^{-8}\ \text{ano}$

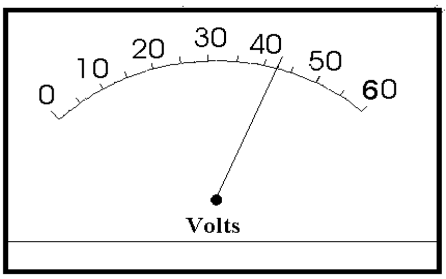
(7) $493{,}70\text{anos} = 493{,}70 \times (365{,}25\text{dias})\left(\dfrac{24h}{1\text{dia}}\right)\left(\dfrac{60\min}{1h}\right)\left(\dfrac{60s}{1\min}\right) = 1{,}557998712 \times 10^{10}s =$

$1{,}5580 \times 10^{10}\ s$

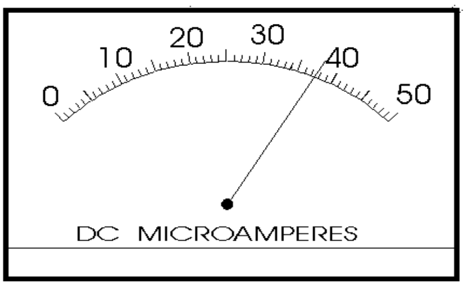
E X E R C Í C I O S I

1) Para as figuras abaixo, faça a leitura da medida, e escreva-a em notação científica.

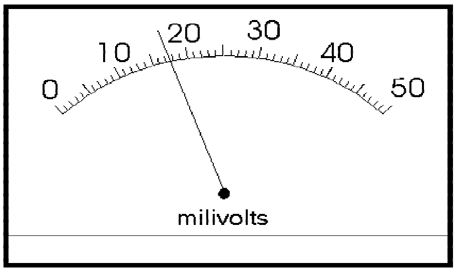
(a)



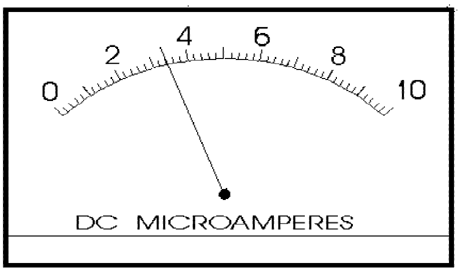
(b)



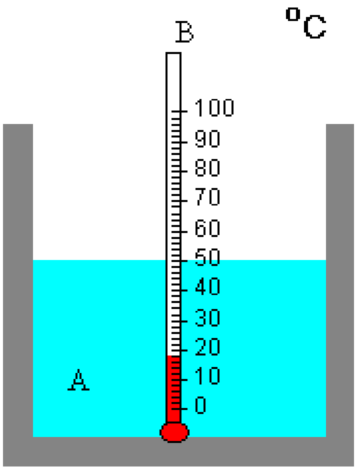
(c)



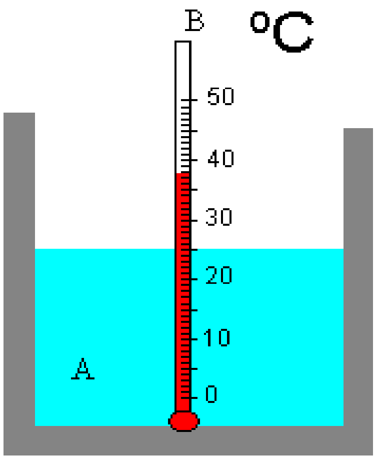
(d)



(e)

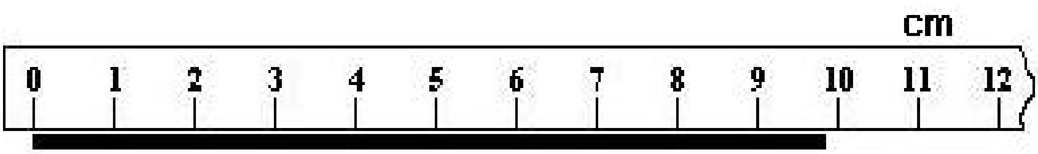


(f)

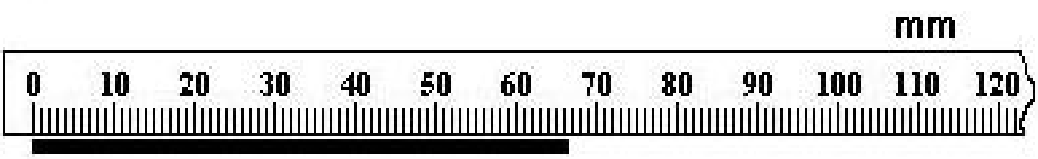


(g)

(h)



(i)



2) O que são os algarismos significativos de uma medida

3) O algarismo duvidoso é significativo?

4) Qual é a diferença entre medida direta e indireta?

5) Os zeros à direita em uma medida são significativos? E à esquerda? Justifique e exemplifique.

6) O que significa dizer que um instrumento de medida é mais preciso do que outro?

7) Dentre os conjuntos de medidas realizadas com cada uma das réguas, indique quais estão erradas.

Régua decimetrada:

0,8 dm ; 1,7 dm ; 172 dm ; 1,0 dm ; 0,81 dm ; 17,55 dm ; 1217,0 dm ; 5 cm ; 128 cm ; 12,0 cm ; 35,5 cm ; 64,46 cm ; 1,0 x 10 cm ; 25,1 x 10 cm ; 32 x 10 cm ; 32,48 x 10^2 cm ; 50 mm ; 12,8 x 10^2 mm ; 550 x 10^2 mm ; 5 x 10 mm; 664 x 10 mm ; 89,2 x 10 mm ; 100 mm ; 0,8 mm ; 0,99 mm ; 19,250 mm ; 15 x 10^{-1} m ; 734,6 x 10^{-1} m ; 12,00 m ; 1,18 x 10^{-1} m ; 6 x 10^{-2} m; 5,5 x 10^{-2} m ; 133 x 10^{-2} m.

Régua centimetrada:

0,55 m ; 91,050 m ; 1,50 x 10^{-1} m ; 628,7 x 10^{-1} m ; 100,000 m ; 1,111 x 10^{-2} m ; 4 x 10^{-2} m ; 5,5 x 10^{-2} m ; 133 x 10^{-2} m ; 0,80 dm ; 1,72 dm ; 172 dm ; 10,1 dm ; 0,99 dm ; 1314,0 dm ; 23,55 dm ; 50 dm ; 1 x 10^{-2} dm ; 1,000 dm ; 4,0 x 10^{-3} dm ; 1,00 x 10 cm ; 55,5 x 10 cm ; 32,23 x 10^2 cm ; 66,66 cm ; 1272,475 cm ; 348,0152 x 10^3 cm ; 0,001 cm ; 1 x 10^{-1} cm ; 8,890 x 10^2 cm ; 7,8 cm ; 27,3 cm ; 473804,1 cm ; 50 mm ; 12,8 x 10 mm ; 55 x 10^2 mm ; 5 x 10 mm ; 0,10 mm ; 1,0 mm ; 137 mm ; 86,18 x 10^2 mm ; 37,7 mm ; 1728,000 x 10^3 mm ; 1,94 mm ; 11,00 mm ; 1,000 x 10^3 mm ; 18,00 x 10^3 mm ; 982,1 x 10^3 mm .

Régua milimetrada:

5,555 m ; 99,0501 m ; 1,502 x 10^{-2} m ; 3,2786 x 10^{-1} m ; 0,0001 m ; 1,000 m ; 67,419 x 10^{-1} m ; 7,67325 x 10^2 m ; 1,0 x 10^{-3} m ; 648,28 x 10^{-2} m ; 0,80 dm ; 1,27 dm ; 172 dm ; 10,4 dm ; 0,999 dm; 1314,00 dm ; 23,50 dm ; 500 dm ; 1 x 10^{-3} dm ; 1,000 dm ; 4,0 x 10^{-3} dm ; 1,00 x 10 cm ; 5,55 x 10 cm ; 32,23 x 10^1 cm ; 6,666 cm ; 1274,455 cm ; 347,01451 x 10^3 cm ; 0,0001 cm ; 1 x 10^{-2} cm ; 8,888 x 10^2 cm ; 7,81 cm ; 27,3 cm ; 473254,01 cm ; 50 mm ; 12,7 x 10 mm ; 55 x 10^2 mm ; 5 x 10 mm ; 0,10 mm; 1,0 mm ; 137 mm ; 86,18 x 10^2 mm ; 37,7770 x 10^3 mm ; 1,99 mm ; 11,05 mm ; 0,01 mm ; 3,00000 x 10^4 mm ;

8) Considere as seguintes medidas: 0,001 m ; 9,876 km ; 97,3 cm ; 41,780 cm ; 0,0034 dm; 12,00 mm ; 0,560 dm ; 1,03 x 10^{-2} m ; 18,0001 km ; 2,9980892081 m ; 0,1 dm ; 16 cm ; 0,01 mm ; 1,678 x 10^{-4} km ; 7,005 x 10^7 nm ; 9,99 x 10^{-1} cm ; 1,00000 x 10^{-5} m ; 0,000002 dm ; 1,093 x 10^5 mm.

(a) Diga qual é a unidade do intervalo entre as escalas do instrumento usado em cada uma das medidas.

(b) Transforme as unidades das medidas para as seguintes unidades: km, dam, hm, m, dm, cm, mm, µm, e nm.

(c) O angstrom (Å) é uma unidade de medida que corresponde à divisão do metro em 10^{10} vezes. Transforme todas as medidas para esta unidade, escrevendo o resultado em notação científica.

(d) Identifique o algarismo duvidoso em cada medida.

(e) Diga qual é a quantidade de algarismos significativos que há em cada uma das medidas.

(f) Dentre todas as medidas, qual foi a mais precisa? Por quê?

9) Considere as seguintes medidas: 0,001 m^2 ; 9,876 km^2 ; 97,3 cm^2 ; 0,0034 dm^2 ; 12,00 mm^2 ; $1,03 \times 10^{-2}$ dam^2 ; 16 hm^2 . Transforme as unidades das medidas para as seguintes unidades: km^2, hm^2, dam^2, m^2, dm^2, cm^2, mm^2, μm^2, e nm^2, e escreva o resultado em notação científica.

10) Considere as seguintes medidas: 0,01 mm^3 ; $1,678 \times 10^{-4}$ km^3 ; $7,005 \times 10^{7}$ nm^3 ; $9,99 \times 10^{-1}$ cm^3 ; $1,00000 \times 10^{-5}$ m^3 ; 0,000002 dm^3 ; $1,093 \times 10^{5}$ dam^3 . Transforme as unidades das medidas para as seguintes unidades: km^3, hm^3, dam^3, m^3, dm^3, cm^3, mm^3, μm^3, e nm^3, e escreva o resultado em notação científica.

I.6. Operações com Algarismos Significativos

Como vimos na seção I.1., uma medida indireta é efetuada utilizando-se operações matemáticas com as medidas diretas. Além disto, em inúmeras situações é necessário efetuar uma ou mais operações matemáticas com os resultados de medidas que são feitas com instrumentos que possuem precisão diferente. Há ocasiões em que se podem obter medições com diferentes números de algarismos significativos com um mesmo aparelho de medida. Nesta seção vamos descrever os procedimentos que devem ser adotados para tratar esses casos.

I.6.a. Adição

Exemplo 4: Considere que, usando réguas graduadas em decímetros, centímetros e milímetros, foram medidos os comprimentos de algumas tábuas: 2355,1 mm, 11,1 dm, 117,3 cm, 13,5 mm, 3,4 dm, 77,5 cm e 813,3 mm. Qual é o comprimento total dessas tábuas?

Para respondermos a esta questão precisamos somar todas as medidas. Antes, porém, precisamos transformar todos os dados para a mesma unidade. Neste caso, a unidade de maior ordem é o dm, então, transformamos para o dm ou outra unidade superior, por exemplo, o m. Isto é: 2,3551 m, 1,11 m, 1,173 m, 0,0135 m, 0,34 m, 0,775 m e 0,8133 m. Logo,

$$\begin{array}{ll} 2{,}355\underline{1}\ \text{m} & + \\ 1{,}1\underline{1}\ \text{m} & + \\ 1{,}17\underline{3}\ \text{m} & + \\ 0{,}013\underline{5}\ \text{m} & + \\ 0{,}3\underline{4}\ \text{m} & + \\ 0{,}77\underline{5}\ \text{m} & + \\ 0{,}813\underline{3}\ \text{m} & = \\ \hline \end{array}$$

$$6{,}5\underline{799}\ \text{m} \quad = \quad 6{,}5\underline{7}\ |\ \underline{99}\ \text{m} \quad = \quad 6{,}5\underline{8}\ \text{m}$$

Note que o algarismo duvidoso aparece sublinhado em cada medida, e quando ele participa da soma em uma casa decimal, o resultado naquela casa decimal também é duvidoso, portanto, o algarismo correspondente também está sublinhado. Mas, o resultado da soma só pode ter um algarismo duvidoso, o “menos duvidoso de todos”, que é o primeiro algarismo duvidoso à esquerda (no caso, o número 7). Despreza-se, então, tudo o que vem após o 7, ou seja, | $\underline{99}$, e arredonda-se o resultado. Como o número a ser desprezado está mais próximo de uma unidade acima, do que de uma unidade abaixo, arredonda-se para cima, isto é,

$6{,}5\underline{7}\ |\ \underline{99}$ está mais próximo de $6{,}5\underline{8}$ do que de $6{,}5\underline{7}$.

Observe que o resultado da adição ($6{,}5\underline{8}$ m) tem seu algarismo duvidoso na casa dos centímetros, a mesma posição do algarismo duvidoso obtido quando se mede com a régua decimetrada que, dentre as três réguas utilizadas, é a de menor precisão. Em outras palavras, a soma não pode ter maior precisão do que a fornecida pela régua de menor precisão (no caso, a decimetrada).

Antes de enunciarmos a regra para a adição, vamos mostrar através de outro procedimento, que entendemos ser muito esclarecedor, como fica o resultado da adição de diferentes medidas. Para tanto, vamos escrever cada medida em duas partes: aquela que se tem certeza, mais a parte duvidosa, isto é,

$(2{,}355\ \text{m} + 0{,}000\underline{1}\ \text{m}) + (1{,}1\ \text{m} + 0{,}0\underline{1}\ \text{m}) + (1{,}17\ \text{m} + 0{,}00\underline{3}\ \text{m}) + (0{,}013\ \text{m} + 0{,}000\underline{5}\ \text{m}) +$
$(0{,}3\ \text{m} + 0{,}0\underline{4}\ \text{m}) + (0{,}77\ \text{m} + 0{,}00\underline{5}\ \text{m}) + (0{,}813\ \text{m} + 0{,}000\underline{3}\ \text{m}) =$

$(2{,}355\ \text{m} + 1{,}1\ \text{m} + 1{,}17\ \text{m} + 0{,}013\ \text{m} + 0{,}3\ \text{m} + 0{,}77\ \text{m} + 0{,}813\ \text{m}) +$
$(0{,}000\underline{1}\ \text{m} + 0{,}0\underline{1}\ \text{m} + 0{,}00\underline{3}\ \text{m} + 0{,}000\underline{5}\ \text{m} + 0{,}0\underline{4}\ \text{m} + 0{,}00\underline{5}\ \text{m} + 0{,}000\underline{3}\ \text{m}) =$

$(6{,}521\ \text{m}) + (0{,}0\underline{589}\ \text{m}) \;=\; (6{,}521\ \text{m}) + (0{,}0\underline{589}\ \text{m}) \;=\; 6{,}5\underline{799}\ \text{m} \;=\; 6{,}5\underline{8}\ \text{m}$

Novamente, a parte duvidosa do resultado da soma foi reduzida ao "algarismo menos duvidoso" (o número 8 na segunda casa decimal, após o arredondamento). Enfim, após os procedimentos acima mostrados, resultou apenas um algarismo duvidoso no resultado da soma, no caso, o número 8 na casa dos centímetros.

Regra para a adição: "*O resultado da adição de várias medidas de uma mesma grandeza física não pode ter maior número (ou quantidade) de algarismos significativos,* ***na sua parte decimal****, do que a parte decimal mais pobre das parcelas*".

Verifique que no Exemplo 4 a parcela com a parte decimal "mais pobre" corresponde à medida: 0,34 m; com apenas dois algarismos significativos. De acordo com a regra acima, o total deverá ter, então, dois algarismos significativos na sua parte decimal, isto é,

$2{,}355\underline{1}\ \text{m} + 1{,}1\underline{1}\ \text{m} + 1{,}17\underline{3}\ \text{m} + 0{,}013\underline{5}\ \text{m} + 0{,}\mathbf{3\underline{4}}\ \text{m} + 0{,}77\underline{5}\ \text{m} + 0{,}813\underline{3}\ \text{m} = 6{,}5799\ \text{m} =$
$6{,}57|99\ \text{m} \;=\; 6{,}\mathbf{5\underline{8}}\ \text{m}$

É importante perceber que, como já sabemos, mudar a unidade das medidas não pode alterar a quantidade de algarismos significativos e, portanto, não é adequado transformar as medidas para unidades de ordem menor. Se, por exemplo, o milímetro fosse a unidade adotada na transformação deveriam ser introduzidas potências de 10 em algumas medidas (pois não é correto colocar zeros à direita), isto é.

$$\begin{array}{lll}
2355{,}\underline{1} & \text{mm} & + \\
11\underline{1} \times 10 & \text{mm} & + \\
117\underline{3} & \text{mm} & + \\
3{,}\underline{5} & \text{mm} & + \\
3\underline{4} \times 10 & \text{mm} & + \\
77\underline{5} & \text{mm} & + \\
813{,}\underline{3} & \text{mm} & = \\
\hline
\end{array}$$

????????????????

Este procedimento impede a observação clara da parte decimal mais pobre. Assim, transformar todas as medidas para uma unidade de ordem superior torna mais confortável a aplicação da regra.

Para verificar de outra forma, transforme todas as medidas do exemplo 4 para km, e observe que o resultado terá a mesma quantidade de algarismos significativos após o uso da regra!

OBSERVAÇÃO – Critérios de Arredondamento:

Ao efetuar qualquer operação matemática com medidas de diferentes quantidades de algarismos significativos, o resultado será uma grandeza que não pode ter um número arbitrário de algarismos. É necessário que o resultado obtido seja arredondado no primeiro algarismos duvidoso à esquerda, conforme as regras contidas nesta seção. Os critérios para tal procedimento são os que seguem.

1º caso: Se os algarismos desprezados em um resultado numérico formarem números SUPERIORES a 5, 50, 500, 5000, 50000, etc., o algarismo duvidoso (significativo) imediatamente anterior aos desprezados deve ser AUMENTADO de uma unidade.

Exemplos: (O traço abaixo do número indica o primeiro algarismo duvidoso onde deve ser feito o arredondamento, desprezando-se o que vem depois.)

1524,5500100 cm^3 = 1524,6 cm^3 = 1,5246 x 10^3 cm^3
12,12599875 g = 12,13 g = 1,213 x 10^1 g
204,96501212 N = 205,0 N = 2,050 x 10^2 N
0,00121521111 A = 0,00122 A = 1,22 x 10^{-3} A
0,137298760 V = 0,14 V = 1,4x10^{-1} V

2º caso: Se os algarismos desprezados em um resultado numérico formarem números INFERIORES a 5, 50, 500, 5000, 50000, etc., o algarismo duvidoso (significativo) imediatamente anterior aos desprezados NÃO SE ALTERA.

Exemplos:

699,05 mm-Hg .... 699 mm-Hg = 6,99x10^2 mm-Hg
80,032 cal/g .... 80,0 cal/g = 8,00x10^1 cal/g
27,24 g .... 27,2 g = 2,72x 10^1 g
4,8205 dyn/cm^2 .... 4,8 dyn/cm^2 = 4,8x10^0 dyn/cm^2
0,5431 N/m .... 0,54 N/m = 5,4 x 10^{-1} N/m

3º caso: Se os algarismos desprezados em um resultado numérico formarem números IGUAIS a 5, 50, 500, 5000, 50000, etc., deve-se proceder como segue:
- Se o algarismo duvidoso (significativo) imediatamente anterior à parte desprezada for IMPAR, deve ser AUMENTADO em uma unidade;
- Se o algarismo duvidoso (significativo) imediatamente anterior à parte desprezada for PAR (lembre-se: *ZERO TAMBÉM É PAR!*), deve ficar INALTERADO.

Exemplos:

1,55500 Wb/m^2 .... 1,56 Wb/m^2
0,00355 cal/g .... 0,0036 cal/g = 3,6x10^{-3} cal/g
129,500 g/s .... 130 g/s = 1,30x10^{-2} g/s
1,9500 dyn/cm^2 .... 2,0 dyn/cm^2
0,805 N/m .... 0,80 N/m = 8,0 x 10^{-1} dyn/cm^2
25,105 mm-Hg .... 25,10 mm-Hg = 2,510 x 10^{-1} mm-Hg
26500 m .... 2,6x10^4 m
28,500 J .... 28 J = 2,8x10^1 J
0,0004500 N.m .... 0,0004 N.m = 4x10^{-4} N.m
9,50000 C/g .... 1 x 10^1 C/g

Exemplos de aplicação da regra da adição:

5,3 m + 4,38 m = 9,68 m = 9,7 m
2 m + 22 cm + 2 mm = 2,222 m = 2 m
14,54 s + 408,1 s + 0,333 s = 422,973 s = 423,0 s = 4,230 x 10^2 s
1,0 g + 0,015 g = 1,015 g = 1,0 g

0,015 cA + 7 cA + 9,1 cA + 5,93 cA = 22,045 cA = 22 cA = 2,2 x 10^1 cA = 2,2 x 10^1 . 10^{-2} A = 2,2 x 10^{-1} A
(ou) 0,0015 dA + 0,7 dA + 0,91 dA + 0,593 dA = 2,2045 dA = 2,2 dA = 2,2 x 10^{-1} A

(ou) 0,00015 A + 0,07 A + 0,091 A + 0,0593 A = 0,22045 A = 0,22 A = 2,2 x 10^{-1} A

Exercício: Transforme todas as medidas do exemplo 4 para (a) dm; (b) km; e (c) mm; e aplique a regra da adição.
(Embora a adição seja a mais simples das operações, os erros são os mais inacreditáveis! Atenção! Efetue normalmente a operação e arredonde apenas o resultado.)

I.6.b. Subtração

Do ponto de vista das operações matemáticas, a subtração é idêntica à adição de números relativos (que podem ser positivos ou negativos), de modo que a regra é a mesma.

Regra para a subtração: "*O resultado da subtração de várias medidas de uma mesma grandeza física não pode ter maior número (ou quantidade) de algarismos significativos,* ***na sua parte decimal****, do que a parte decimal mais pobre das parcelas*".

Exemplo 5: Considere que, de uma tábua de 2859,0 mm de comprimento, são cortados em ordem, pedaços com os seguintes comprimentos: 12,3 dm, 113,7 cm, e 63,5 mm. Qual é o comprimento final dessa tábua?

Para respondermos a esta questão precisamos subtrair todas as medidas dos pedaços. Antes, porém, precisamos transformar todos os dados para a mesma unidade. Neste caso, a unidade de maior ordem é o dm, então, transformamos para o dm ou outra unidade superior, por exemplo, o m. Isto é: 2,8590 m, 1,23 m, 1,137 m, e 0,0635 m. Logo,

$$\begin{array}{ll} 2{,}859\underline{0}\ \text{m} & - \\ 1{,}2\underline{3}\ \ \ \text{m} & - \\ 1{,}13\underline{7}\ \ \text{m} & - \\ 0{,}063\underline{5}\ \text{m} & = \\ \hline 0{,}4\underline{285}\ \text{m} = 0{,}4\underline{2}\ |\ \underline{85}\ \text{m} = 0{,}4\underline{3}\ \text{m} & \end{array}$$

Note que o algarismo duvidoso aparece sublinhado em cada medida, e quando ele participa da subtração em uma casa decimal, o resultado naquela casa decimal também é duvidoso, portanto, o algarismo correspondente também está sublinhado. Mas, o resultado da subtração só pode ter um algarismo duvidoso, o "menos duvidoso de todos", que é o primeiro algarismo duvidoso à esquerda (no caso, o número 2). Despreza-se, então, tudo o que vem após o 2, ou seja, | 85, e arredonda-se o resultado. Como o número a ser desprezado está mais próximo de uma unidade acima, do que de uma unidade abaixo, arredonda-se para cima, isto é,

$$0{,}42 \mid \underline{85} \text{ está mais próximo de } 0{,}4\underline{3} \text{ do que de } 0{,}4\underline{2}\,.$$

Observe que o resultado da subtração ($0{,}4\underline{3}$ m) tem seu algarismo duvidoso na casa dos centímetros, a mesma posição do algarismo duvidoso obtido quando se mede com a régua decimetrada que, dentre as três réguas utilizadas, é a de menor precisão. Em outras palavras, o total não pode ter maior precisão do que a fornecida pela régua de menor precisão (decimetrada).

Contra-Exemplo 6:

Considere que, de uma tábua de 1592,0 mm de comprimento, são cortados em ordem, pedaços com os seguintes comprimentos: 12,3 dm, e 36,1 cm. Qual é o comprimento final dessa tábua?

Para respondermos a esta questão precisamos subtrair todas as medidas dos pedaços. Antes, porém, precisamos transformar todos os dados para a mesma unidade. Neste caso, a unidade de maior ordem é o dm, então, transformamos para o dm ou outra unidade superior, por exemplo, o m. Isto é: 2,8590 m, 1,23 m, 1,137 m, e 0,0635 m. Logo,

$$\begin{array}{ll} 1{,}592\underline{0}\ \text{m} & - \\ 1{,}2\underline{3}\ \text{m} & - \\ 0{,}36\underline{1}\ \text{m} & = \\ \hline \end{array}$$

$$0{,}0\underline{010}\ \text{m} = 0{,}0\underline{0}|\underline{10}\ \text{m} = 0{,}0\underline{0}\ \text{m}.$$

Neste caso, as conclusões sobre a precisão do resultado e o instrumento de medida de menor precisão ficam prejudicadas. Isto sempre ocorrerá quando os valores subtraídos forem muito próximos!

Exemplos de aplicação da regra da subtração:

138,94 m - 12,3 m = 126,64 m = 126,6 m = $1{,}266 \times 10^2$ m
118,57 s - 58,303 s = 60,267 s = 60,27 s = $6{,}027 \times 10^1$ s
5,00 g - 2,016 g = 2,984 g = 2,98 g
0,00015 A + 0,072 A - 0,091 A - 0,0593 A = - 0,07815 A = - 0,078 A = $-7{,}8 \times 10^{-2}$ A
1,0000 m^2 – 0,633 m^2 + 0,5 m^2 - 0,27 m^2 = 0,597 m^2 = 0,6 m^2 = 6×10^{-1} m^2

Importante, tanto na adição como na subtração, o arredondamento é executado após a operação, de acordo com a medida menos precisa, ou com menor quantidade de algarismos significativos!

I.6.c. Multiplicação

Exemplo 7: Considere que, usando réguas graduadas em decímetros, centímetros e milímetros, foram medidos os comprimentos dos lados a e b de um certo retângulo:

Régua	Lado a	Lado b
decimetrada	12,8 dm	1,2 dm
centimetrada	127,8 cm	11,7 cm
milimetrada	1279,1 mm	117,4 mm

Qual é a área desse retângulo? Para respondermos a esta questão precisamos multiplicar as medidas feitas com a mesma régua, para não termos que transformar todos os dados para a mesma unidade. Neste caso,

Régua	Área = a . b =
decimetrada	12,8 dm x 1,2 dm = 15,36 dm^2 = 15 dm^2
centimetrada	127,8 cm x 11,7 cm = 1495,26 cm^2 = 150 x 10^1 cm^2
milimetrada	1279,1 mm x 117,4 mm = 150166,34 mm^2 = 1502 x 10^2 mm^2

Vejamos por que os resultados apresentam aquelas quantidades de algarismos significativos, observando a multiplicação do segundo caso, isto é,

$$
\begin{array}{cccccl}
 & 1 & 2 & 7, & \underline{8} & \text{cm} \quad \times \\
 & & 1 & 1, & \underline{7} & \text{cm} \\
\hline
 & & \underline{8} & \underline{9} & \underline{4}\ \underline{6} & \text{cm}^2 \ + \\
 & 1 & 2 & 7 & \underline{8} & \text{cm}^2 \ + \\
1 & 2 & 7 & \underline{8} & & \text{cm}^2 \ = \\
\hline
\end{array}
$$

$$1\ 4\ \underline{9}\ \underline{5,}\ \underline{2}\ \underline{6}\ \text{cm}^2 \quad = \quad 14\underline{9}\ |\ \underline{5,26}\ \text{cm}^2 \ = \ 150 \times 10^1\ \text{cm}^2 \ = \ 1,50 \times 10^3\ \text{cm}^2$$

Note que o algarismo duvidoso aparece sublinhado em cada medida, e quando ele participa da multiplicação em uma casa decimal, o resultado também é duvidoso, portanto, o algarismo correspondente também está sublinhado. Mas, o resultado da operação matemática com medidas só pode ter um algarismo duvidoso, o "menos duvidoso de todos", que é o primeiro algarismo duvidoso à esquerda (no caso, o número 9). Despreza-se, então, tudo o que vem após o 9, ou seja, | 5,26, e arredonda-se o resultado. Como o número a ser desprezado está mais próximo de uma unidade acima, do que de uma unidade abaixo, arredonda-se para cima (1º caso dos critérios de arredondamento) , isto é,

$$14\underline{9}\ |\ \underline{5,26} \text{ está mais próximo de } 15\underline{0} \times 10 \text{ do que de } 14\underline{9} \times 10,$$

Observe que o produto, resultado da multiplicação (150 x 10^1 cm^2), tem três algarismos significativos, que é a mesma quantidade do fator "mais pobre" (com menor número de algarismos significativos), no caso, 11,7 cm, pois o outro fator tem quatro algarismos significativos (127,8 cm). Em outras palavras, o produto não pode ter maior quantidade de algarismos significativos do que a fornecido pela medida "mais pobre".

Antes de enunciarmos a regra para a multiplicação, vamos mostrar através de outro procedimento, que entendemos ser muito esclarecedor, como fica o resultado da multiplicação de diferentes medidas. Para tanto, vamos escrever cada medida em duas partes: aquela que se tem certeza, mais a parte duvidosa, isto é,

$127,\underline{8}$ cm x $11,\underline{7}$ cm = (127 cm + $0,\underline{8}$ cm) x (11 cm + $0,\underline{7}$ cm) =
(127 cm x 11 cm) + (127 cm x $0,\underline{7}$ cm) + ($0,\underline{8}$ cm x 11 cm) + ($0,\underline{8}$ cm x $0,\underline{7}$ cm) =
(1397 cm^2) + ($\underline{88,9}$ cm^2) + ($\underline{8,8}$ cm^2) + ($\underline{0,56}$ cm^2) = (1397 cm^2) + ($\underline{98,26}$ cm^2) =
$14\underline{95,26}$ cm^2 = 150 x 10^1 cm^2 = 1,50 x 10^3 cm^2

Novamente, o resultado da multiplicação foi reduzido a um único algarismo duvidoso: o "algarismo menos duvidoso". No caso, o número 9 na segunda casa decimal à esquerda da vírgula é este algarismo. Após o arredondamento é necessário colocar uma potência de 10, pois a poisção decimal do algarismo duvidoso está à esquerda da vírgula, e "distante" da mesma!

Regra para a multiplicação: "*O resultado da multiplicação de várias medidas (produto) não pode ter maior número (ou quantidade) de algarismos significativos do que o "mais pobre" dos fatores*".

Exemplos:

1,52834 dm x 3,38 cm = 1,52834 dm x 0,338 dm = 0,51657892 dm^2 = 0,517 dm^2 = 5,17x$10^{-1}$$dm^2$
832 N/m x 0,25 m^2 = 208,00 N.m = 2,0800 x 10^2 J = 2,1 x 10^2 J
0,315 μA x 5327 mΩ = 1678,005 x 10^{-9} V = 1,678005 x 10^{-6} V = 1,68 μV
$(8,3\ K)^4$ = 4745,8321 K^4 = 4,7458321 x 10^3 K^4 = 4,7 x 10^3 K^4
0,0001 m x 0,0198 m x 0,77 m = 0,0000015246 m^3 = 1,5246 x 10^{-6} m^3 = 2 x 10^{-6} m^3 = 2 cm^3

I.6.d. Divisão

Do ponto de vista das operações matemáticas, a divisão é idêntica à multiplicação de dois números em que é considerado o inverso de um deles (ou elevado a –1), de modo que a regra é a mesma. Por exemplo, h : g = h . g^{-1} = h . 1/g

Regra para a divisão: "*O resultado da divisão de duas medidas (quociente) não pode ter maior número (ou quantidade) de algarismos significativos do que o "mais pobre" dos termos (dividendo e divisor)*".

Exemplos:

57,38 cm / 2,1 s = 27,32380952 cm/s = 27 cm/s = 2,7 x 10^1 cm/s
1,68 V / 5327 Ω = 0,000315374507 V/Ω = 3,15374507 x 10^{-4} A = 3,15 x 10^{-4} A
8,44444 g / 10,76 cm^3 = 0,784799256 g/cm^3 = 0,7848 g/cm^3 = 7,848 x 10^{-1} g/cm^3
0,0001 km/h / 33,837 h = 2,955344740 x 10^{-6} km/h^2 = 3 x 10^{-6} km/h^2 =
183,965 μm / 2,2000 cm = 0,0183965 cm / 2,2000 cm = 8,362045454 x 10^{-3} = 8,3620 x 10^{-3}

I.6.e. Outras Operações Matemáticas

Nas demais operações matemáticas: radiciação, logaritmação, potenciação, exponenciação, e outras, assim como no cálculo de funções especiais (trigonométricas, hiperbólicas, etc.) efetua-se a operação normalmente e o resultado deve ser arredondado mantendo-se a mesma quantidade (ou número) de algarismos significativos da medida que está sendo operada.

Exemplos de operações matemáticas em que as unidades das medidas também são operadas:

$\sqrt[3]{(351{,}113\ m^2)^2}$ = $(351{,}113\ m^2)^{2/3}$ = $49{,}76965226\ m^{4/3}$ = $49{,}7697\ m^{4/3}$ = $4{,}97697 \times 10^1\ m^{4/3}$
$(1{,}68\ V)^{-\pi}$ = $0{,}1959611664\ V^{-\pi}$ = $0{,}196\ V^{-\pi}$ = $1{,}96 \times 10^{-1}\ V^{-\pi}$
$(444{,}4\ ^oC)^{2,5}$ = $4163275{,}259\ ^oC^{2,5}$ = $4163 \times 10^3\ ^oC^{2,5}$ = $4{,}163 \times 10^6\ ^oC^{2,5}$
$(0{,}0081\ g/h)^{-1}$ = $1/(0{,}0081\ g/h)$ = $123{,}4567901\ (g/h)^{-1}$ = $12 \times 10^1\ (g/h)^{-1}$ = $1{,}2 \times 10^2\ (g/h)^{-1}$
$(0{,}006 \times 10^4\ mm)^2$ = $3600{,}000000\ mm^2$ = $3{,}600000000 \times 10^3\ mm^2$ = $4 \times 10^3\ mm^2$

Exemplos de operações matemáticas sobre medidas, cujos resultados são adimensionais:

$\cos(\pi\ rad) = -1{,}00000...$
$\text{sen}(0{,}707\ rad) = 0{,}6495557556 = 0{,}650$
$\tan(181{,}97^o) = 0{,}0343965417 = 0{,}034397 = 3{,}4397 \times 10^{-2}$
$\log(8{,}362045 \times 10^{-13}\ W/m^2) = -12{,}07768749964 = -12{,}07769 = -1{,}207769 \times 10^1$
$\ln(3{,}601 \times 10^2\ K/mm^3) = 5{,}886381771 = 5{,}886$
$e^{-18,1} = \exp(-18{,}1) = 1{,}378065555 \times 10^{-8} = 1{,}38 \times 10^{-8}$

Quando uma medida indireta é resultado de uma fórmula que envolve uma única medida direta, as constantes e/ou números que participam da fórmula são operadas normalmente, e no final deve-se fazer o arredondamento para que a quantidade (ou número) de algarismos significativos seja a mesma da medida direta.

Exemplo 8: Considere que, usando uma régua graduada em decímetros, foi medido o diâmetro de uma esfera, obtendo-se o valor $d = 40{,}0$ dm. Qual é o seu volume?

O volume de uma esfera é dado pela expressão: $V = (4\pi r^3)/3$, onde r é o raio da esfera. Como o diâmetro é o dobro do raio, isto é, $d = 2r$, então, $V = [4\pi(d/2)^3]/3 = (\pi d^3/2)/3$.

Usando o π da calculadora,
$V = [\pi\ (40{,}0\ dm)^3 / 2] / 3 = 33510{,}321638\ dm^3 = 33{,}5 \times 10^3\ dm^3 = 3{,}35 \times 10^4\ dm^3 = 3{,}35 \times 10^1\ m^3$

Exemplos em que a medida tem sua unidade transformada por um fator de conversão:

143,45 grau = 143,45 grau x (0,01745329252 rad/grau) = 2,503674811994 rad = 2,5037 rad
1,020 rad = 1,020 rad x (57,2957795131 grau/rad) = 58,441695103362 grau = 58,44 grau
33,65479 cm = 33,65479 cm x (l polegada/2,540 cm) = 13,24991732 polegada = 13,25 polegada
218,809765 u = 218,809765 u x ($1{,}661 \times 10^{-24}$ g/u) = $3{,}6344301967 \times 10^{-22}$ g = $3{,}634 \times 10^{-22}$ g
$7{,}841009 \times 10^{-6}$ cal = $7{,}841009 \times 10^{-6}$ cal x (4,186 J/cal) = $3{,}2822463674 \times 10^{-5}$ J = $3{,}282 \times 10^{-5}$ J

Quando uma medida indireta é resultado de uma fórmula que envolve duas ou mais medidas diretas, as constantes e/ou números que participam da fórmula são operadas normalmente, e no final deve-se fazer o arredondamento para que a quantidade (ou número) de algarismos significativos do resultado seja a mesma da medida direta "mais pobre".

Exemplo 9: Considere que, usando uma régua graduada em centímetros, foram medidas a base e a altura de um triângulo, obtendo-se os valores b = 21,3 cm e h = 1,5 cm. Qual é a sua área?

A área de um triângulo é dada pela expressão: A = (b.h) / 2, então,

$A = (21{,}3 \text{ cm} \times 1{,}5 \text{ cm}) / 2 = 15{,}975 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2 = 1{,}6 \times 10^1 \text{ cm}^2$

Exemplo 10: Considere que, em um circuito elétrico do tipo RLC em série, foram medidas as seguintes grandezas físicas: a freqüência f = 60 Hz ; a indutância L = 18,91 mH ; a capacitância C = 15,42 μF ; e a resistência R = 173,0 Ω. Qual é a impedância desse circuito?

A impedância de um circuito desse tipo pode ser calculada a partir da expressão:

$$Z = \{R^2 + [2\pi fL - 1/(2\pi fC)]^2\}^{1/2}$$

$R^2 = (173{,}0\ \Omega)^2 = 29929{,}00\ \Omega^2 = 2993 \times 10^1\ \Omega^2 = 2{,}993 \times 10^4\ \Omega^2$
$2\pi fL = 2 \times \pi \times 60 \text{ Hz} \times 18{,}91 \text{ mH} = 7{,}12890204952\ \Omega = 7{,}1\ \Omega =$
$2\pi fC = 2 \times \pi \times 60 \text{ Hz} \times 15{,}42\ \mu\text{F} = 0{,}0058132030462\ \Omega^{-1} = 0{,}0058\ \Omega^{-1} = 5{,}8 \times 10^{-3}\ \Omega^{-1}$

$1/(2\pi fC) = 1/(5{,}8 \times 10^{-3}\ \Omega^{-1}) = 172{,}413793103\ \Omega = 1{,}7 \times 10^2\ \Omega$

$[2\pi fL - 1/(2\pi fC)]^2 = [\ 7{,}1\ \Omega - 1{,}7 \times 10^2\ \Omega\ ]^2 = [\ 0{,}071 \times 10^2\ \Omega - 1{,}7 \times 10^2\ \Omega]^2 = [-162{,}9\ \Omega]^2 =$
$[-1{,}6 \times 10^2\ \Omega]^2 = 2{,}56 \times 10^4\ \Omega^2 = 2{,}6 \times 10^4\ \Omega^2$

$Z = \{R^2 + [2\pi fL - 1/(2\pi fC)]^2\}^{1/2} = \{2{,}993 \times 10^4\ \Omega^2 + [2{,}6 \times 10^4\ \Omega^2]\}^{1/2} = \{5{,}593 \times 10^4\ \Omega^2\}^{1/2} =$
$\{5{,}6 \times 10^4\ \Omega^2\}^{1/2} = 236{,}64319132\ \Omega = 2{,}4 \times 10^2\ \Omega$

$Z = 2{,}4 \times 10^2\ \Omega$

Note que, a cada operação matemática com as medidas, seguimos as regras, mesmo quando operamos com medidas indiretas. Os arredondamentos foram conforme as quantidades de algarismos significativos oriundas das medidas diretas. No resultado, obtivemos a mesma quantidade de algarismos significativos que a medida direta mais pobre, a freqüência f = **60** Hz, ou seja, 2 (dois) algarismos significativos.

É evidente que, em cada parte das operações com as medidas, ao arredondarmos, estamos desprezando um pouco da informação fornecida pela medida direta, de modo que ao longo de todas as operações, e principalmente ao final, uma boa quantidade de informação foi desprezada. Isto significa que o resultado apresenta um erro considerável, que mais adiante veremos como mensurar. Uma forma de minimizar esse erro é operar toda a fórmula, normalmente, e ao final, fazer o arredondamento do resultado de acordo com a medida direta mais pobre. Voltando ao exemplo,

$Z = \{R^2 + [2\pi fL - 1/(2\pi fC)]^2\}^{1/2} =$
$= \{(173{,}0\ \Omega)^2 + [2.\pi.60.18{,}91 \times 10^{-3}\ \Omega - 1/(2.\pi.60.15{,}42 \times 10^{-6}\ \Omega^{-1})]^2\}^{1/2} = 238{,}9953995597\ \Omega =$
$Z = 2{,}4 \times 10^2\ \Omega$

Neste exemplo, em particular, o resultado é o mesmo, tanto arredondando passo a passo, quanto arredondando somente no final. A maioria dos casos mostrará que há uma discrepância apenas do algarismo duvidoso em diante, ou seja, arredondando somente no final poderíamos obter resultados tais como $Z = 2{,}5 \times 10^2\ \Omega$ ou $Z = 2{,}6 \times 10^2\ \Omega$. Em ambos os casos, o erro está dentro do algarismo duvidoso, o que é aceitável.

Observe que, evidentemente, é bem menos trabalhoso arredondar somente o resultado, do que arredondar passo a passo!

E X E R C Í C I O S I I

Faça os exercícios abaixo aplicando as regras de operação com algarismos significativos e os critérios de arredondamento. Apresente o resultado em notação científica com a unidade adequada.

1) A relação entre a altura h atingida por um líquido em um tubo capilar vertical, e o raio r do tubo, é dada por: $h = 2\,\delta / (\mu g r)$, onde δ é a tensão superficial do líquido, μ sua massa específica, e g a aceleração da gravidade. Determine a altura atingida pelo álcool em um capilar com 0,40 mm de raio, dado que $\delta = 22{,}3 \times 10^{-5}$ N/cm, $\mu = 0{,}7894$ g/cm³ e $g = 9{,}8066$ m/s².

2) Uma mola (constante elástica $K = 1{,}128\text{x}10^4$ dyn/cm) suspende um corpo (massa m = 124,93 g). A freqüência de oscilação do sistema massa-mola é dada pela equação $f = (1/2\pi).(K/m)^{1/2}$, quando oscila com pequena amplitude. Calcule a freqüência e o período (T=1/f) desse oscilador.

3) O momento de inércia do cilindro é: $I = CmR^2$, onde m é a massa do cilindro, R seu raio e C é uma constante. Se o cilindro rola sobre um plano inclinado, $C = (ght^2/2L^2)-1$, onde g é a aceleração da gravidade, h a altura entre o topo e a base do plano inclinado e t é o tempo gasto pelo cilindro para percorrer a distancia L sobre o plano. Calcule C, usando os seguintes dados:
g = 9,8066 m/s² ; h = 2,95 cm ; t = 2,32 s ; L = 724,0 mm.

4) Utilizando-se um calorímetro para obter o calor de fusão do gelo, pode-se usar a expressão

$$Q_{fusão} = \{[(M_{cal}C_{cal} + M_{água}C_{água})(T_i - T_f)] / M_{gelo}\} - C_{água}T_f, \quad \text{onde}$$

M_{cal} e C_{cal} são a massa e o calor específico do calorímetro, $M_{água}$ e $C_{água}$ são a massa e o calor específico da água, M_{gelo} é a massa de gelo, T_i e T_f são, respectivamente, as temperaturas inicial e final. Calcule o calor de fusão do gelo. Dados: M_{cal} =115,4 g ; C_{cal} = 0,215 cal/(g °C) ; $M_{água}$ = 500,0 g ; $C_{água}$ = 1,000 cal/(g °C) ; M_{gelo} = 125,0 g ; T_i = 31,2 °C ; T_f = 15,1 °C .

5) Em um experimento de dilatação, o coeficiente de dilatação linear de sólidos é dado pela expressão: $\alpha = \pi d\theta / (L_o.\Delta T.360^o)$, onde d é o diâmetro de um certo eixo, θ é o ângulo de giro de um ponteiro solidário a este eixo, L_o é o comprimento inicial de um tubo metálico e ΔT é a diferença de temperatura na qual se observa a dilatação. Calcule α para os seguintes dados : d = 3,00 mm ; $\theta = 37{,}3^o$; L_o = 84,50 cm ; T_f = 100,0 °C ; T_i = 21,5 °C .

6) A velocidade (v) de um projétil pode ser medida através do "pêndulo balístico", que é constituído de um bloco de massa M que atinge uma altura h após o alojamento do projétil em seu interior. Calcule essa velocidade para os dados; M = 5,36 Kg ; m = 9,9 g ; h = 6,335 cm ; g = 9,8066 m/s² ; sabendo que $v = [(2gh)^{1/2}.(M+m)]/m$.

7) O nível de intensidade sonora é dado pela relação: NIS = 10 log (I/I_o), cuja unidade é o decibel (dB). A intensidade I da onda sonora é dada por $I = P/(4\pi r^2)$, onde P é a potência da fonte e r a distância entre o ouvinte e a fonte. Calcule o nível de intensidade sonora para os seguintes dados:
$I_o = 1{,}00000 \times 10^{-2}$ W/m^2 ; P = 25,225 J/s ; 230,0 cm .

8) O número de moléculas que possuem velocidade entre v e v + Δv em um gás contendo N moléculas à temperatura T é dado por:

$$N(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi K_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2K_B T}\right\}\Delta v$$

Calcule este número para os seguintes dados: T = 300,85 K ; v = 612,09 m/s ; Δv = 10,00 m/s ; N = $6{,}022137 \times 10^{23}$ moléculas ; $K_B = 1{,}3807 \times 10^{-23}$ J/K ; m = $5{,}3156 \times 10^{-26}$ Kg .

II. ERROS

II.1. Introdução

O objetivo da imensa maioria dos experimentos que são executados é fazer um estudo quantitativo de certas propriedades do sistema observado. Esse estudo é realizado através de inúmeras medições das grandezas físicas de interesse do experimentador. Neste processo são utilizados aparelhos de medida adequados e, posteriormente, os dados obtidos são tratados e analisados. Os instrumentos de medida podem ter diferentes graus de precisão, mas, por mais preciso que qualquer instrumento seja, os dados experimentais sempre contém erros.

Considerar simplesmente um número como medida (direta ou indireta) de uma grandeza, sem avaliar o erro de que foi afetada esta medida, não tem muito significado. É necessário, portanto, avaliar o erro que certamente existe, associado ao resultado da medição. A tarefa de determinação do erro em uma grandeza medida não é simples, porque o ato de medir é sempre acompanhado da interferência dos mais diversos fatores. Esses fatores influenciam com maior ou menor intensidade o resultado da medida. Sejam quais forem os tipos de experimentos, na sua grande maioria, é impossível analisar ou indicar todos os fatores que tem influência no resultado da medida. Isto faz com que o valor real do erro na grandeza medida permaneça desconhecido. Como conseqüência, a teoria de erros limita-se a estimar o erro máximo de que a medida pode ser acometida. O grau de certeza desta estimativa do erro depende, entre outras coisas, da quantidade de fatores que se levam em conta, e que têm influência no resultado das medidas.

Atualmente, qualquer experimentador que faça medições não pode deixar de aplicar os métodos matemáticos de tratamento dos dados experimentais. Deve-se, no entanto, aceitar que a estatística matemática não é perfeita. Daí o fato de que, até agora, não existem recomendações universalmente aceitas, com respeito à representação de resultados de investigações experimentais.

Com o objetivo voltado para uma padronização, as normas que a seguir são apresentadas, apesar de não serem únicas, deverão ser seguidas nas disciplinas de Física Experimental.

II.2. Classificação dos Erros

Não existem, e nem poderiam existir, instrumentos que permitam medir uma grandeza física sem erro algum. Além desse erro, que é inerente ao aparelho, quando se realiza uma medida cometem-se outros tipos de erros. Não se deve, no entanto, confundir erro com engano, também chamado erro grosseiro. Este aparece devido à falta de habilidade do experimentador, e é perfeitamente evitável. Deve-se interpretar o termo ERROS, então, como representativo daqueles erros que são inevitáveis.

Existem várias classificações de erros na literatura, sendo que a nomenclatura também é variada, por isto, classificam-se os diversos tipos de erros em três categorias:

a) *Erro de Escala*: é o erro devido ao limite de precisão do instrumento de medida.

Alguns autores consideram esse erro como sendo igual à metade da escala. Em uma régua milimetrada esse erro seria de 0,5 mm, e em uma régua centimetrada seria de 0,5 cm. Por exemplo, se alguém lesse a seguinte medida: 583,$\underline{4}$ mm, onde o algarismo duvidoso é o 4, poderia escrever: (583,4 $\pm$ 0,5) mm.

b) *Erro Sistemático*: é aquele que perturba todas as medidas sempre da mesma forma, fazendo com que os valores obtidos se afastem do valor provável em um sentido definido, sempre para mais ou sempre para menos.

Como o erro sistemático segue um certo comportamento padrão, é possível descobrir sua origem e eliminá-lo. Por exemplo, um ponteiro de medidor analógico que esteja torto ou descalibrado para a direita sempre indicará leituras maiores do que as corretas.

c) *Erro Randômico ou Aleatório*: é aquele que ocorre totalmente ao acaso, portanto, sem qualquer sentido ou previsibilidade.

Esse erro é o resultado da soma de pequenas perturbações que são inevitáveis, tais como vibrações, calor, campos externos, oxidações, e outros fatores fora do controle do experimentador e, na maioria das vezes, de seu conhecimento. Esses erros são impossíveis de evitar, o que significa que temos que conviver com eles e aprender a tratá-los da maneira adequada.

Concluindo, o *erro máximo* na medida, também chamado *desvio da medida*, representado por Δx, é a soma de todos os erros:

$$\textit{erro máximo} = \Delta x = \textit{erro}_{\text{escala}} + \textit{erro}_{\text{sistemático}} + \textit{erro}_{\text{randômico}}$$

O erro aleatório é desconhecido, ao contrário do erro de escala, que é bem conhecido. O erro aleatório não pode ser "consertado", ao contrário do erro sistemático. Contudo, é fácil perceber que o erro máximo poderá ser dominado por um dos três tipos, por exemplo, se o erro de escala for bem maior do que os erros sistemático e randômico.

Para tratar de erros aleatórios foram desenvolvidas teorias estatísticas, inicialmente por Gauss.

II.3. Medidas Experimentais

Considere que, durante a realização de uma série de medidas, não ocorreram *erros grosseiros*, que os *erros sistemáticos* também não existiram, que os *erros de escala* foram de ordem inferior aos erros aleatórios, e que todas as fontes de erro contribuíram para aumentar ou diminuir, aleatoriamente, o valor da grandeza física observada. O experimentador é, portanto, obrigado a avaliar corretamente o erro aleatório, e incluí-lo nos dados obtidos no experimento.

A seguir, vamos introduzir uma "receita" da Teoria de Erros, baseada no procedimento estatístico usualmente indicado para o tratamento de medidas experimentais, que deverá ser seguida para informar o resultado de uma série de medidas de uma certa grandeza física.

Se as medidas de uma grandeza física não são todas iguais, como se pode comunicar o seu valor? Usualmente, expressamos o valor por meio de dados que representam significativamente a grandeza física e têm a propriedade de transmitir uma informação compreensível para outras pessoas: a média, o desvio da medida, etc.

a) Média ou valor mais provável

Pode-se provar que para um número infinito de medidas a média aritmética é o valor verdadeiro da medida. Mas, na prática, realiza-se apenas um número n limitado de medidas, resultando assim apenas uma *estimativa do valor verdadeiro* e não um valor definitivo.

A média de n medidas de igual confiabilidade de uma grandeza x, de valor verdadeiro X, é dada por:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)}{n}$$

e $\overline{x}$ se aproxima tanto mais do valor verdadeiro X quanto maior for n. Portanto, é usual chamar-se a média aritmética das n medidas de *valor mais provável da grandeza*.

Para um número infinito de medidas ocorre a anulação do erro randômico, pois a sua natureza aleatória faz com que o desvio seja ora para mais, ora para menos. Na prática é impossível fazer-se um número infinito de medidas, de maneira que a média, então, corresponde ao valor mais provável da grandeza, e o erro aleatório não se anula. Deve-se, portanto, calculá-lo. Para isso existem vários procedimentos possíveis.

b) Desvio de uma medida

É a diferença entre o valor obtido na i-ésima medida (x_i) e o valor mais provável da grandeza, ou média, isto é,

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$$

Note que esse desvio tanto pode ser positivo quanto negativo, de modo que é mais adequado considerá-lo em módulo para estimar efetivamente o desvio, ou seja,

$$|\Delta x_i| = |x_i - \overline{x}|$$

Neste caso, chama-se de **desvio absoluto de uma medida**.

c) Desvio médio

É a média aritmética dos módulos dos desvios absolutos de cada medida, ou seja,

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \overline{x}|$$

O motivo de adotar o valor absoluto do desvio de cada medida é que se busca sempre encontrar o erro máximo possível. Se fosse feita a soma dos desvios das medidas com seus valores negativos ou positivos, esses poderiam até mesmo cancelar-se totalmente, resultando em uma média nula, o que não é a informação correta.

Note que o desvio médio contribui tanto para mais quanto para menos, de modo que se pode comunicar o resultado de n medidas na forma: $\overline{x} \pm \overline{\Delta x}$

d) Desvio padrão da medida

Pode-se perguntar o quanto é boa a estimativa de $\bar{x}$, ou seja, com que precisão $\bar{x}$ é uma estimativa do valor verdadeiro X. A definição abaixo contribui para essa interpretação, pois dá uma idéia da dispersão das medidas em torno do valor médio.

O desvio padrão de um conjunto de medidas de uma grandeza x, é dado por:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Esta definição informa a incerteza com que um dado conjunto de medidas é realizado, e não a média. Informa sobre a precisão do instrumento de medida e o rigor do processo daquele particular conjunto de medidas. De certo modo, fornece uma estimativa sobre a confiabilidade da média $\bar{X}$. Em outras palavras, o desvio padrão da medida dá uma informação sobre a "largura" do valor mais provável da medida, baseada no conjunto de medidas realizadas.

Assim, na apresentação do resultado de um conjunto de medidas da grandeza x, deve-se informar a precisão atribuída ao valor verdadeiro calculado a partir de n medidas de igual confiabilidade na forma:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x$$

A partir do conhecimento de σ_x é possível calcular-se o erro aleatório provável. Para todos os efeitos e doravante, consideraremos que o erro aleatório provável é o próprio desvio padrão, isto é,

$$erro_{randômico} = \sigma_x$$

II.3.a. Informação do resultado de um conjunto de medidas de uma grandeza x

O procedimento usual para a determinação do resultado de um conjunto de medidas de uma grandeza x é o que segue:

1º) Realização das medidas (coleta de dados, ou determinação dos x_i);
2º) Cálculo da média ($\bar{X}$), ou valor mais provável da medida;
3º) Cálculo dos desvios de cada medida em relação à média (Δx_i);
4º) Cálculo dos valores de $(\Delta x_i)^2$ para cada medida;
5º) Cálculo do desvio padrão da medida (σ_x);
6º) Informação do resultado no formato $x = \bar{x} \pm \sigma_x$

Observação: As regras de operação com algarismos significativos e os critérios de arredondamento continuam valendo, e o resultado deve ser apresentado, preferencialmente, em notação científica e com a unidade adequada.

Exemplo 11: Considere que a medição do comprimento L de objetos idênticos, realizada por um grupo de alunos com o auxílio de uma régua centimetrada, forneceu as seguintes leituras,

i	L_i (cm)	i	L_i (cm)	i	L_i (cm)	i	L_i (cm)	i	L_i (cm)
1	241,0	11	240,8	21	241,1	31	240,9	41	240,7
2	241,2	12	240,9	22	241,1	32	241,0	42	240,8
3	241,3	13	241,4	23	241,6	33	240,7	43	241,0
4	240,6	14	241,2	24	240,9	34	240,8	44	241,0
5	241,3	15	241,1	25	241,2	35	241,1	45	240,9
6	241,7	16	240,4	26	240,5	36	241,0	46	241,3
7	241,1	17	241,3	27	240,7	37	241,5	47	240,9
8	240,9	18	241,5	28	240,8	38	240,6	48	241,2
9	240,5	19	240,7	29	241,4	39	241,2	49	241,1
10	240,8	20	241,0	30	241,0	40	241,4	50	240,6

Para facilitar os cálculos e permitir uma visão geral, vamos anotar quantas vezes cada leitura aparece, ou seja, a freqüência f. Na mesma tabela vamos calcular o desvio de cada medida, e seu quadrado, usando o valor médio calculado depois da tabela.

f	L_i (cm)	ΔL_i (cm)	$(\Delta L_i)^2$ (cm^2)
1	240,4	-0,6	0,36
2	240,5	-0,5	0,25
3	240,6	-0,4	0,16
4	240,7	-0,3	0,09
5	240,8	-0,2	0,04
6	240,9	-0,1	0,01
7	241,0	0,0	0,00
6	241,1	0,1	0,01
5	241,2	0,2	0,04
4	241,3	0,3	0,09
3	241,4	0,4	0,16
2	241,5	0,5	0,25
1	241,6	0,6	0,36
1	241,7	0,7	0,49

a) Média ou valor mais provável da medida

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} L_i\right) = \frac{1}{50}\left(\sum_{i=1}^{50} L_i\right) = \frac{(L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_{50})}{50} = \frac{12050{,}7\text{cm}}{50} = 241{,}014\text{cm}$$

Poderíamos invocar a regra da adição para ajustar o resultado do cálculo da média, e isto seria adequado, porém, em vez disso, vamos invocar a precisão do instrumento de medida. Em todas as medidas realizadas com uma régua centimetrada, o algarismo duvidoso está na casa dos décimos de centímetro, que é a imprecisão natural do instrumento, assim, a média não poderá ter algarismos significativos além da casa decimal onde está o algarismo duvidoso fornecido em cada medida, isto é,

$$\overline{L} = 241{,}\underline{0}14\text{cm} = 241{,}0\text{cm}$$

Caso não fosse observada a imprecisão natural do instrumento, alguém poderia ser levado a acreditar que, se fizesse um número muito grande de medidas, vamos supor 10.000, poderia achar o valor da média com 7 algarismos significativos, por exemplo, $241,013\underline{8}$ cm. Isto significa que o algarismo duvidoso da média estaria na casa dos micrometros (10^{-6} m), o que, claramente, é falso, pois a régua centimetrada está bem longe dessa precisão!

b) Desvio médio

$$\overline{\Delta L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|L_i - \overline{L}\right| = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}\left|\Delta L_i\right| = \frac{11{,}9\text{cm}}{50} = 0{,}\underline{2}38\text{cm} = 0{,}2\text{cm}$$

Note que, se considerássemos os desvios de cada medida com seu sinal, teríamos:

$$\overline{\Delta L} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(L_i - \overline{L}) = \frac{0{,}7\text{cm}}{50} = 0{,}014\text{cm} = 0{,}0\text{cm}$$

Isto certamente não informa nada de útil, nem de importante! Lembre-se, o objetivo é sempre estimar o erro máximo, portanto, o desvio médio é calculado sobre os módulos dos desvios de cada medida.

Observe que, novamente, o arredondamento foi feito na casa do algarismo duvidoso da medida, que é o limite da imprecisão (ou precisão) do instrumento de medida (a régua centimetrada):

$$\overline{\Delta L} = 0{,}\underline{2}38\text{cm} = 0{,}2\text{cm}$$

Note que o desvio médio contribui tanto para mais quanto para menos, de modo que pode-se comunicar o resultado na forma: $L = \overline{L} \pm \overline{\Delta L} = (241{,}0 \pm 0{,}2)\text{cm}$

c) Desvio padrão da medida

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(L_i - \overline{L}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta L_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{49}\sum_{i=1}^{50}(\Delta L_i)^2} = \sqrt{\frac{4{,}41\text{cm}^2}{49}}$$

$$\sigma_L = 0{,}\underline{3}00\text{cm} = 0{,}3\text{cm}$$

Finalmente, como o erro aleatório (que adotamos como sendo igual ao desvio padrão) contribui tanto para mais quanto para menos, pode-se comunicar o resultado na forma:

$$L = \overline{L} \pm \sigma_L = (241{,}0 \pm 0{,}3)\text{cm}$$

Observações sobre o exemplo 11:

Comentamos no item a) do exemplo 11 que, aumentar o número de medidas não aumenta a precisão da média (ou quantidade de algarismos significativos). No caso da régua centimetrada, foram obtidos 4 algarismos. Para aumentar esta quantidade de algarismos seria necessário um instrumento mais preciso, uma régua milimetrada, ou talvez um paquímetro. Neste caso teríamos a média com mais algarismos significativos. Como já dissemos, aumentar o número de medidas não aumenta a quantidade de algarismos significativos do valor médio, entretanto, diminui o erro aleatório, pois

$$\sigma_x \propto \frac{1}{\sqrt{(n-1)}}$$

ou seja, quanto maior n, menor tende a ser o erro.

Para melhor entendimento, observe a tabela com a freqüência das medidas onde as mesmas se distribuem quase simetricamente em torno do valor médio: 241,0 cm. (Veja abaixo, na fig. 2, o histograma da distribuição das medidas.)

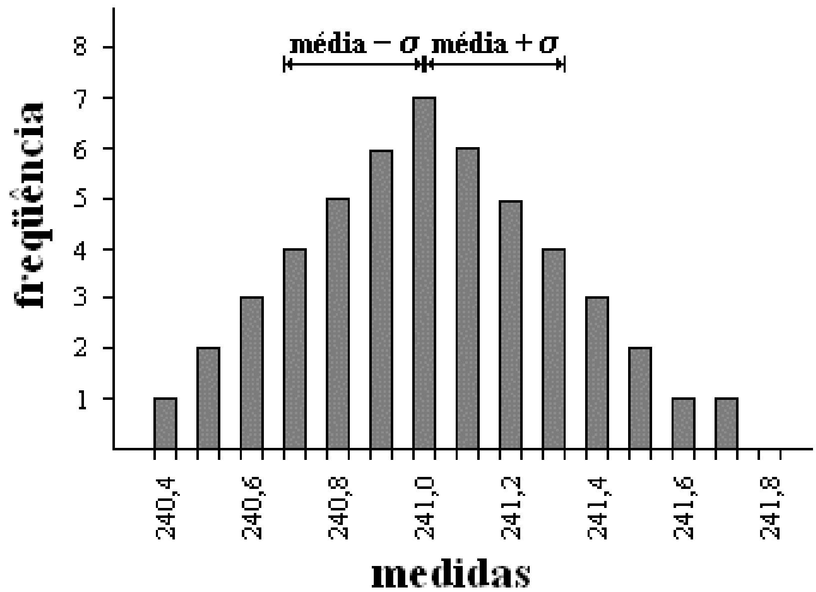


Figura 2.

Observe que na região de medidas com valores entre [(241,0 – 0,3) cm ; (241,0 + 0,3) cm], ou região de largura 2σ em torno da média, localizam-se 37 das 50 medidas realizadas, portanto, 74% do total de medidas.

Em resumo, para aumentar a precisão da medida, é necessário usar instrumento de maior precisão, mas para diminuir o erro na medida, é necessário aumentar o número de medidas.

Assim, é razoável considerar tanto o resultado: $L = \overline{L} \pm \overline{\Delta L} = (241{,}0 \pm 0{,}2)\text{cm}$; quanto o resultado: $L = \overline{L} \pm \sigma_L = (241{,}0 \pm 0{,}3)\text{cm}$; pois ambos apresentam o erro na casa do algarismo duvidoso (limite de precisão) do instrumento de medida.

Contudo, o erro de escala pode ser considerado como sendo igual à metade da escala do instrumento de medida (régua centimetrada), isto é,

$$erro_{escala} = 0{,}5 \text{ cm}$$

Sendo o erro de escala maior do que todos os outros "erros" calculados no exemplo, a priori, bastaria escrever o resultado como $L = \overline{L} \pm erro_{escala} = (241{,}0 \pm 0{,}5)\text{cm}$.

Certamente, a esta altura de seu estudo você deve estar se perguntando: afinal o que é mesmo que devo calcular?

Resposta: Em primeiro lugar, siga o procedimento padrão indicado na seção II.3.a., sem esquecer os critérios de arredondamento e as unidades. E em segundo lugar, aguarde ser solicitado para o cálculo de alguma daquelas definições e proceda, então, no sentido de atender o pedido de seu professor, ou de um particular exercício. De todo modo, lembre-se de que aqui seguimos apenas uma "receita" da teoria de erros. Se você tiver interesse em aumentar seu conhecimento, há uma vasta bibliografia dedicada a esse assunto, basta buscar!

II.4. Erro relativo

Em inúmeras situações são feitas medições para comparar o resultado com um valor anteriormente definido. Por exemplo, na indústria de papel, as máquinas precisam produzir as folhas do tipo A4 com medidas bem definidas. Como o processo de produção não é infinitamente perfeito, sempre existe erro em qualquer processo, o fabricante cuida para respeitar uma tolerância máxima (ou erro máximo) nessas medidas. Isto significa que, se por algum motivo, as máquinas perdem sua capacidade, as folhas produzidas fora dessa tolerância deverão ser descartadas, e a empresa terá prejuízo.

Por outro lado, o erro absoluto de uma medida pode levar a desinformação, quando é feita a *comparação com um valor de referência ou tabelado*.

Exemplo 12: Considere que as especificações dimensionais de uma folha de papel do tipo ofício são as seguintes:

largura(referência) = 215,900 mm ; altura(ref.) = 279,400 mm ; espessura(ref.) = 0,010 mm

Para verificar a qualidade da produção, um funcionário pega uma folha como amostra e, usando um micrômetro, obtém as medidas:

largura (lida) = 215,404 mm ; altura (lida) = 280,002 mm ; espessura(lida) = 0,011 mm

O erro absoluto ($\Delta x_{absoluto} = |x_{lido} - x_{referência}|$) de cada dimensão é, portanto,

$$\Delta x_{largura} = |x_{lido} - x_{referência}| = |(215{,}404 - 215{,}900)\text{mm}| = 0{,}496\text{mm}$$
$$\Delta x_{altura} = |x_{lido} - x_{referência}| = |(280{,}002 - 279{,}400)\text{mm}| = 0{,}602\text{mm}$$
$$\Delta x_{espessura} = |x_{lido} - x_{referência}| = |(0{,}011 - 0{,}010)\text{mm}| = 0{,}001\text{mm}$$

Olhando apenas o erro absoluto das medidas, concluímos que o erro maior está na altura da folha, depois na largura, e por último na espessura que, inclusive, é o erro absoluto bem menor do que nas outras dimensões.

Vejamos esta observação por outro ângulo, considerando o *erro relativo percentual*. Seja $x_{referência} = 100\%$, então, $\Delta x_{absoluto} = |x_{lido} - x_{referência}| = \varepsilon\ \%$, de modo que o *erro percentual* é dado por:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{\Delta x_{absoluto}}{x_{referência}} x100\% = \frac{|x_{lido} - x_{referência}|}{x_{referência}} x100\% \ .$$

Lembramos que, como todo erro, o erro relativo percentual tanto pode ser para cima quanto para baixo do valor de referência. Teremos, então,

$$\varepsilon_{\%}(\text{largura}) = \frac{|(215{,}404 - 215{,}900)\,\text{mm}|}{215{,}900\,\text{mm}} x100\% = 0{,}229735988...\% = 0{,}229736\%$$

$$\varepsilon_{\%}(\text{altura}) = \frac{|(280{,}002 - 279{,}400)\,\text{mm}|}{279{,}400\text{mm}} x100\% = 0{,}215461703...\% = 0{,}215462\%$$

$$\varepsilon_{\%}(\text{espessura}) = \frac{|(0{,}011 - 0{,}010)\,\text{mm}|}{0{,}010\text{mm}} x100\% = 10{,}0000000000...\% = 10\%$$

Para arredondar o resultado apenas seguimos a regra de operação com algarismos significativos, pois o resultado percentual é uma grandeza adimensional que carece de significado físico, logo não demanda maiores considerações.

Observa-se, através do erro relativo percentual ou simplesmente *erro percentual*, que o maior erro está na medida da espessura, aliás, bem maior do que nas medidas das outras dimensões. Além disso, ao contrário do que mostra a comparação entre os erros absolutos, o erro percentual na medida da largura é maior do que na medida da altura.

Finalmente, o exemplo serviu para mostrar que, quando temos que comparar medidas de grandezas diferentes, o *erro percentual* reduz todas a uma mesma linguagem de comparação: a percentagem de erro com relação ao valor tabelado ou de referência.

Em muitas situações, após ser obtido o valor médio de uma grandeza física também é interessante calcular-se o erro percentual, uma vez que exista um valor de referência, tabelado ou esperado, para ser feita a comparação. Isto é,

$$\varepsilon_{\%} = \frac{\Delta x_{absoluto}}{x_{referência}} x100\% = \frac{|\overline{x} - x_{referência}|}{x_{referência}} x100\%$$

II.5. Propagação de erros

Como vimos na seção I.2., a *medida indireta* é realizada efetuando-se operações matemáticas com as *medidas diretas*. Geralmente, a grandeza física de interesse (medida indireta) está relacionada matematicamente com outras grandezas físicas (medidas diretas), de modo que, na prática, a medida da grandeza física de interesse é efetuada através de uma série de medidas diretas de outras grandezas físicas, que podem ser medidas diretamente. Cada uma dessas medidas diretas, por sua vez, contém erros. Resulta daí que a medida indireta tem um erro que é o resultado da propagação dos erros das medidas diretas.

Vamos, novamente seguindo uma "receita" sem aprofundarmos suas origens, aprender a calcular o erro propagado em uma medida indireta.

Considere uma grandeza física Y (medida indireta) que depende de n outras grandezas físicas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ (medidas diretas) . Em termos matemáticos, temos a função:

$$Y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

A diferencial desta função (ou variação da função), em termos de cada uma das variações das variáveis (ou diferenciais de cada variável), é definida como:

$$dY = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial Y}{\partial x_i}$ é a derivada parcial da função com relação à i-ésima variável. (Lembre-se, a derivada parcial é obtida quando se deriva a função apenas em relação àquela particular variável). Substituindo as diferenciais pelas respectivas variações (ou desvios), tanto da função quanto das variáveis, temos

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Delta x_3 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n$$

Como a derivada parcial de uma função pode ter qualquer sinal, assim como as variações Δx_i , ΔY pode vir até a ser nulo, dependendo do resultado da soma final de todos os termos. Uma vez que o objetivo é sempre determinar o erro máximo provável, ou seja, aquele em que todos os erros introduzidos pelas grandezas físicas independentes (medidas diretas) atuam no mesmo sentido, somando-se, adota-se todas as contribuições para ΔY como sendo positivas. Na prática, para que isto aconteça, é necessário considerar o módulo das derivadas parciais, bem como as variações Δx_i como sendo apenas positivas. Obtém-se, então, a chamada e*quação do erro indeterminado*:

$$\Delta Y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_3}\right| \Delta x_3 + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta x_n$$

Observe que tanto usamos a palavra "desvio" quanto usamos a palavra "erro", pois no contexto da teoria de erros as duas palavras referem-se ao intervalo de confiança que podemos ter em torno do valor médio medido.

Exemplo 13: Considere que foram medidas a altura e o raio de uma calota esférica tendo sido obtidos os valores: $h = (155{,}3 \pm 0{,}7)\text{mm}$ e $r = (389{,}0 \pm 1{,}9)\text{mm}$. Vamos calcular o volume dessa calota, sabendo que a expressão matemática que relaciona essas grandezas é:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) = \frac{1}{3}\pi\left(3rh^2 - h^3\right)$$

Inicialmente, vamos colocar os dados no formato adequado para usar na *equação do erro indeterminado*:

$$h = \bar{h} \pm \Delta h = (155{,}3 \pm 0{,}7)\text{mm} \quad \text{e} \quad r = \bar{r} \pm \Delta r = (389{,}0 \pm 1{,}9)\text{mm}$$

$$V = f(r,h) = \frac{1}{3}\pi\left(3rh^2 - h^3\right), \text{ ou seja, } V = Y\,;\, x_1 = r\,;\; x_2 = h$$

onde Δh e Δr são, respectivamente, os erros nas medidas da altura e do raio da calota.

A *equação do erro indeterminado* permite-nos calcular o erro na medida indireta do volume V, isto é,

$$\Delta V = \left|\frac{\partial f}{\partial h}\right|\Delta h + \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|\Delta r = \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\Delta h + \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\Delta r$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi\left(3r.2h - 3h^2\right) \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \pi h^2$$

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\Delta h + \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\Delta r = \left|\frac{1}{3}\pi\left(3r.2h - 3h^2\right)\right|\Delta h + \left|\pi h^2\right|\Delta r$$

Para efetuarmos os cálculos, substituímos os valores da seguinte maneira. Onde se lê h substitui-se o valor médio de h (155,3 mm) e onde se lê r substitui-se o valor médio de r (389,0 mm). Devem ser substituídos também, os valores de Δh = 0,7 mm, e de Δr = 1,9 mm. O valor de π pode ser usado diretamente da calculadora.

$$\Delta V = \left|\frac{1}{3}\pi\left(3(389{,}0\text{mm}).2(155{,}3\text{mm}) - 3(155{,}3\text{mm})^2\right)\right|(0{,}7\,mm) + \left|\pi(155{,}3\text{mm})^2\right|(1{,}9\text{mm})$$

$$\Delta V = 212666{,}084...\text{mm}^3 + 143961{,}507...\text{mm}^3 = 356627{,}591\text{mm}^3$$

Neste ponto, precisamos conhecer o valor do volume para arredondarmos o resultado. Para tanto, basta substituir os valores médios de h e de r na expressão:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(3rh^2 - h^3\right) = \frac{1}{3}\pi\left(3(389{,}0\text{mm}).(155{,}3\text{mm})^2 - (155{,}3\text{mm})^3\right) = 255\underline{5}1904{,}7\text{mm}^3$$

De acordo com as regras de operação com algarismos significativos, o resultado deverá ter 4 algarismos, então,

$$V = 255\underline{5}1904{,}7mm^3 = 2{,}55\underline{5}19047x10^7\,mm^3 = 2{,}555x10^7\,mm^3$$

Portanto, $\Delta V = 3{,}56627591x10^5\,mm^3 = 0{,}03\underline{5}6627591x10^7\,mm^3 = 0{,}036x10^7\,mm^3$

Note que o desvio da medida foi arredondado na mesma casa decimal do algarismo duvidoso do valor médio do volume V

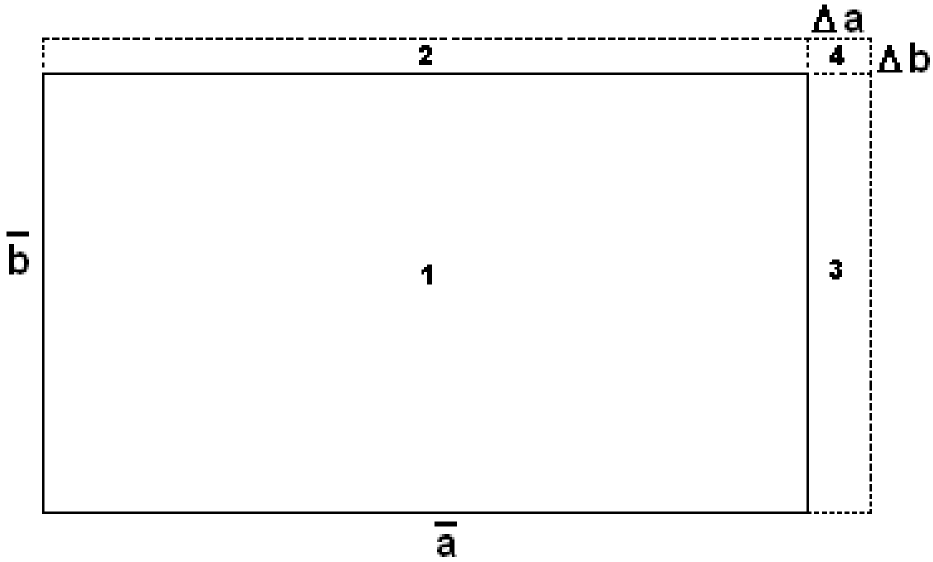
Finalmente, o volume da calota esférica é:

$$V = \overline{V} \pm \Delta V = (2{,}555 \pm 0{,}036)\ x\,10^7\,mm^3$$

Exemplo 14: Considere a área de um retângulo. Foram medidas a largura **a** e o comprimento **b**, tendo sido obtidos os valores médios e os erros na forma: $a = \overline{a} \pm \Delta a$; $b = \overline{b} \pm \Delta b$.

A área do retângulo é dada por: $A = a.b = (\overline{a} \pm \Delta a).(\overline{b} \pm \Delta b)$ ou

$$A = (\overline{a}.\overline{b}) + (\overline{a}.\Delta b) + (\overline{b}.\Delta a) + (\Delta a.\Delta b) = \text{área}(1) + \text{área}(2) + \text{área}(3) + \text{área}(4) \; ;$$



Mas, a área é uma medida indireta e, como já sabemos, pode ser escrita na forma: $A = \overline{A} \pm \Delta A$, de modo que:

$$\overline{A} = (\overline{a}.\overline{b}) = \text{área}(1) \quad ; \quad \Delta A = (\overline{a}.\Delta b) + (\overline{b}.\Delta a) + (\Delta a.\Delta b) = \text{área}(2) + \text{área}(3) + \text{área}(4)$$

Porém, o produto $(\Delta a.\Delta b) = \text{área}(4)$ não contribui significativamente para o cálculo do erro propagado ΔA, pois é um número muito pequeno e, por isto pode ser desprezado. Então,

$$\Delta A = \pm\left(\overline{a}.\Delta b + \overline{b}.\Delta a\right)$$

Note que, em todos os passos adotamos as contribuições para o erro propagado ΔA sempre positivas, pois o objetivo é encontrar o erro máximo. Apenas na expressão final colocamos o sinal $\pm$ na frente do resultado, para indicar que o erro propagado serve para aumentar ou diminuir o resultado da medida indireta.

(a) Agora, obtenha ΔA usando a equação do erro indeterminado e verifique que é a mesma expressão acima.

(b) Se você ainda não estiver convencido, faça o exemplo numericamente usando os dados:

$$a = (12{,}34 \pm 0{,}02)\text{cm} \quad ; \quad b = (8{,}95 \pm 0{,}01)\text{cm}$$

Observação: No caso deste exemplo, conseguimos encontrar o erro propagado, ou desvio da medida indireta, de uma forma simples, porque assim também o é a expressão da área, porém, para expressões matemáticas mais complexas, o caminho indicado pela *equação do erro indeterminado* é o mais confiável!

E X E R C Í C I O S I I I

Faça os exercícios abaixo aplicando as regras de operação com algarismos significativos e os critérios de arredondamento. Apresente o resultado em notação científica com a unidade adequada.

1) Os números anotados na tabela referem-se às medidas do comprimento de tiras de papel.

L(cm)	13,72	13,70	13,69	13,73	13,74	13,72	13,73	13,72	13,73	13,74	13,71

Calcule (a) o valor médio do comprimento, (b) o desvio médio, e (c) o erro percentual, considerando que o valor tabelado é 13,70 cm.

2) Em um experimento foram realizadas medidas do período de oscilação de um pêndulo simples.

T(s)	1,155	1,173	1,191	1,119	1,138	1,159	1,145	1,167	1,182	1,190	1,188

Calcule (a) o valor mais provável do período, e (b) o desvio médio.

3) Medindo o equilíbrio térmico entre dois corpos, obtiveram-se os seguintes valores para a temperatura de equilíbrio:

T(^{o}C)	61,0	61,5	61,9	61,4	61,2	61,8	61,6	61,1	61,7	61,3	61,1	61,7	61,2

Calcule (a) o valor médio da temperatura, (b) o desvio médio, e (c) o erro percentual, considerando que o valor esperado é 61,5 ^{o}C.

4) Canetas esferográficas idênticas foram medidas por um grupo de alunos com o auxílio de uma régua milimetrada. O comprimento L de cada uma delas forneceu as seguintes leituras:

L (mm)	140,2	140,3	140,1	140,3	140,1	139,8	140,0	140,5	140,4	140,0	140,2
	140,1	140,3	139,7	140,1	139,8	140,2	139,9	139,8	139,7	139,7	140,0

Calcule (a) o valor mais provável do comprimento, (b) o desvio padrão da medida, e (c) o erro aleatório provável. (d) Escreva o resultado da medida no formato adequado.

5) Após a mistura de certas quantidades de substâncias químicas, a solução atinge uma temperatura de equilíbrio. Um grupo de estudantes mediu essa temperatura, e obteve os dados abaixo:

T (K)	333,21	332,98	331,11	334,19	333,77	331,22	330,91	334,02	323,90	334,37
	333,33	330,15	331,28	331,55	332,67	331,82	333,32	330,91	333,10	332,74

Calcule (a) o valor mais provável da temperatura, (b) o desvio padrão da medida, e (c) o erro aleatório provável. (d) Escreva o resultado da medida no formato adequado.

6) Um carro de corrida deu inúmeras voltas em uma pista, enquanto um grupo de alunos media o tempo de cada volta. Foram tabelados os dados abaixo:

t (min)	1,235	1,235	1,234	1,232	1,227	1,220	1,232	1,230	1,219	1,218
	1,215	1,210	1,213	1,219	1,222	1,229	1,231	1,235	1,239	1,243

Calcule (a) o valor mais provável do tempo da volta, (b) o desvio padrão da medida, e (c) o erro aleatório provável. (d) Escreva o resultado da medida no formato adequado.

7) Considerando as seguintes medidas: $x = \overline{x} \pm \Delta x$ e $y = \overline{y} \pm \Delta y$, obtenha o erro propagado para as seguintes operações matemáticas, e escreva o resultado no formato adequado.

(a) adição: $x + y$
(b) subtração: $x - y$
(c) multiplicação: $x \, . \, y$
(d) divisão: x / y
(e) potenciação: x^n (onde n é um número qualquer)
(f) logaritmo decimal: $\log x$
(g) logaritmo natural: $\ln x$
(h) exponenciação: e^x
(i) $\cos x$
(j) $\mathrm{sen}\, x$
(k) $\tan x$

8) Determine a expressão do erro indeterminado para:

(a) a área de um triângulo de base b e altura h;
(b) a área de um retângulo de lados a e b;
(c) o volume de um cilindro de diâmetro D e comprimento L;
(d) o volume de uma esfera de diâmetro D;
(e) a área de um disco de diâmetro D,
(f) o volume de um gás, sabendo que $V = NRT/P$, onde N e R são constantes.

9) Usando os dados abaixo, calcule com o respectivo desvio,

(a) a área do triângulo: b = (1,00 ± 0,11 mm e h = (1,24 ± 0,02) mm;
(b) a área do retângulo: a = (7,48 ± 0,24) km e b = (1,34 ± 0,08) km;
(c) o volume do cilindro: D = (2,31 ± 0,09) cm e L = (7,50 ± 0,02) cm;
(d) o volume da esfera: D = (9,10 ± 0,03) cm;
(e) a área do disco: D = (6,18 ± 0,05) cm;
(f) o volume do gás:
N = 2,000 mol, R = 8,314 J/(mol.K), T = (310 ± 3) K e P = (1,05 ± 0,32) x 10^6 N/m^2.

10) Mediram-se experimentalmente, a distância percorrida em linha reta por um bloco em movimento e o tempo gasto para percorrê-la, obtendo-se os seguintes dados:
d = (23,49 mm ± 0,17) mm e t = (0,567 ± 0,021) s. Calcule a velocidade média do bloco em Km/h.

11) Para um automóvel que se move em linha reta, mediram-se a velocidade em um ponto inicial (v_o), a velocidade em um ponto posterior (v), e o tempo gasto entre esses dois pontos, obtendo-se: $v_o = (123{,}0 \pm 1{,}1)$ Km/h ; $v = (71{,}9 \pm 2{,}7)$ Km/h ; $t = (0{,}249 \pm 0{,}022)$ min . Calcule a aceleração média do automóvel em m/s.

12) A relação entre a altura h atingida por um líquido em um tubo capilar vertical, e o raio r do tubo, é dada por: $h = 2\,\delta / (\mu g r)$, onde δ é a tensão superficial do líquido, μ sua massa específica, e g a aceleração da gravidade. Determine a altura atingida pelo álcool em um capilar dados:
$r = (0{,}40 \pm 0{,}02)$ mm ; $\delta = (22{,}3 \pm 0{,}1) \times 10^{-5}$ N/cm ; $\mu = (0{,}7894 \pm 0{,}0016)$ g/cm³ .
Considere que a aceleração da gravidade é constante e vale 9,8066 m/s².

13) A freqüência de oscilação do sistema massa-mola é dada pela equação $f = (1/2\pi).(K/m)^{1/2}$, quando oscila com pequena amplitude. Calcule a freqüência e o período (T=1/f) desse oscilador, para os seguintes dados: $K = (1{,}128 \pm 0{,}005) \times 10^4$ dyn/cm ; $m = (124{,}93 \pm 0{,}12)$ g.

14) O momento de inércia do cilindro é dado por: $I = CmR^2$. Se o cilindro rola sobre um plano inclinado, $C = (ght^2/2L^2)-1$, onde g é a aceleração da gravidade, h a altura entre o topo e a base do plano inclinado e t é o tempo gasto pelo cilindro para percorrer a distancia L sobre o plano. Calcule C, usando os seguintes dados: $h = (2{,}95 \pm 0{,}10)$ cm ; $t = (2{,}321 \pm 0{,}003)$ s ; $L = (724{,}0 \pm 0{,}1)$ mm; g (constante) = 9,8066 m/s².

15) O nível de intensidade sonora é dado pela relação: $NIS = 10 \log (I/I_o)$, cuja unidade é o decibel (dB). A intensidade I da onda sonora é dada por $I = P/(4\pi r^2)$, onde P é a potência da fonte e r a distância entre o ouvinte e a fonte. Calcule o nível de intensidade sonora para os seguintes dados:
I_o (constante) = $1{,}00000 \times 10^{-2}$ W/m^2 ; $P = (25{,}225 \pm 0{,}034)$ J/s ; $r = (230{,}0 \pm 0{,}2)$ cm .

16) A relação entre a carga final Q, a carga inicial Q_o e o tempo de descarga em um capacitor é dada por $\ln(Q/Q_o) = - t/\tau$. Dados: $Q = (3{,}000 \pm 0{,}025) \times 10^{-6}$ C ; $Q = (35{,}000 \pm 0{,}007) \times 10^{-6}$ C ; $\tau = (11{,}111 \pm 0{,}632)$ s ; calcule o tempo de descarga.

17) A pressão atmosférica em função da altura acima da superfície da Terra é dada pela expressão: $p = p_o \exp\{- gy\rho_o/p_o\}$. Dados: $p_o = (1{,}0312 \pm 0{,}0065) \times 10^5$ N/m^2 ; $\rho_o = (1{,}210 \pm 0{,}027)$ Kg/m^3 ; $y = (198{,}146 \pm 0{,}008)$ m ; g (constante) = 9,8066 m/s² ; calcule a pressão atmosférica.

18) Um gás submetido a um processo adiabático obedece à equação pV^γ = constante. Calcule o valor desta constante para os seguintes dados:
$p = (1{,}0312 \pm 0{,}0065) \times 10^5$ N/m^2 ; $V = (22{,}403 \pm 0{,}024) \times 10^{-3}$ m^3 ; $\gamma = 1{,}41 \pm 0{,}03$.