UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

PROVA ESCRITA
PROCESSO SELETIVO 06/2024 - UDESC
Área: Matemática

Número de inscrição: ____________________

Questão 1.
a) (1 ponto)
Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 2
2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 2

Modelo de Resposta:
Uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, é derivável (ou diferenciável) em um ponto $c \in (a, b)$ se existir o limite

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Suponha que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável em $c \in (a, b)$. Então para todo $x \neq c$, temos que

$$f(x) - f(c) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c)$$

e, fazendo $x \to c$, obtemos

$$\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) = f'(c) \cdot 0 = 0$$

ou seja, $\lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Isso mostra que f é contínua em c.

b) (1.5 pontos)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 2

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 2

Modelo de Resposta:

Sabemos que $\frac{dh}{dt} = -3\,cm/min$ e queremos encontrar o valor de $\frac{dA}{dt} = A'(t)$ (e.g., em cm^2/min) quando t é igual a $\frac{20}{3}\,min$, onde A é a área do triângulo ABC no tempo t.

Seja P o ponto na reta que contém os pontos A e C tal que BP é perpendicular ao segmento AC. Seja $x = |AP|$ e $y = |PC|$, então $b = x + y$. E assim, do Teorema de Pitágoras,

$$b(t) = \sqrt{150^2 - h(t)^2} + \sqrt{200^2 - h(t)^2}$$

Derivando com relação a t, obtemos

$$b'(t) = -\frac{h(t)h'(t)}{\sqrt{150^2 - h(t)^2}} - \frac{h(t)h'(t)}{\sqrt{200^2 - h(t)^2}}$$

Agora $A(t) = \frac{1}{2}h(t) \cdot b(t)$, o que implica que $A'(t) = \frac{1}{2}\left(h'(t)b(t) + h(t)b'(t)\right)$. Se $t_0 = \frac{20}{3}$, obtemos

$$A'(t_0) = \frac{1}{2}\left(h'(t_0)b(t_0) + h(t_0)b'(t_0)\right) = \frac{1}{2}\left((-3) \cdot (250) + (120) \cdot (25/4)\right) = 0$$

Logo, $A'(t_0) = 0\,cm^2/min$.

Questão 2.

a) (1 ponto)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 4
2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 4

Modelo de Resposta:

Sejam x_1, x_2 em (a, b) com $x_1 < x_2$. Do Teorema do Valor Médio, existe c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, segue que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Isso mostra que f é crescente em (a, b).

b) (1.5 pontos)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 4

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 4

Modelo de Resposta:

Considere a função $f(x) = \cos(x) - 1 + x^2$. A derivada de f é dada por $f'(x) = 2x - \sin(x)$. Do item a) dessa questão, podemos concluir que f' é uma função crescente, logo, para todo $x > 0$, temos que $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$, ou seja, f é crescente. Assim, para todo $x > 0$, temos que $f(x) > f(0) \Leftrightarrow \cos(x) - 1 + x^2 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > 1 - x^2$.

Questão 3.

a) (1 ponto)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 5

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 5

Modelo de Resposta:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dada uma partição $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ com

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

e uma lista de n pontos $x_1^*, \ldots, x_n^*$, tais que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a expressão

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, é chamada uma *soma de Riemann*. Quando, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, o número S pode ser interpretado geometricamente como uma aproximação para a área delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo x de a até b.

Se cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tiver comprimento $(b-a)/n$, a *integral definida de f de a até b* é definida por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

se o limite acima existir e assumir o mesmo valor para qualquer escolha de pontos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

b) (1.5 pontos)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 1, Capítulo 5

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 1, Capítulo 5

Modelo de Resposta:

Considere a partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[1, 4]$, onde $x_i = 1 + i\frac{3}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Com isso, podemos definir a soma de Riemann a seguir

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (2x_i - 1)\frac{3}{n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(2\left(1 + i\frac{3}{n}\right) - 1\right)\frac{3}{n} \\ &= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + i\frac{6}{n}\right) \\ &= \frac{3}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} i\frac{6}{n}\right) \\ &= \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{18}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{3}{n}n + \frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 3 + 9\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\int_1^4 (2x+1)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left(3 + 9\frac{n+1}{n}\right) = 12$$

Questão 4.

a) (1 ponto)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2, Capítulo 9

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, Capítulo 11

Modelo de Resposta:

Uma *série* é uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ são números reais. Se denotarmos por $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, a sequência (s_n) é chamada a sequência das somais parciais da série (1). Se a sequência (s_n) é convergente, dizemos que a série (1) é convergente e o limite da sequência de somas parciais é chamado a soma da série. Se (s_n) são é convergente, dizemos que a série (1) é divergente.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ é convergente, pois

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

e $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Como o limite das somas parciais existe, a série é convergente.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ não é convergente, pois

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

e $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Como o limite das somas parciais não existe, a série é divergente.

b) (1.5 pontos)

Referências:

1. ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. Volume 2, Capítulo 9

2. STEWART, James. Cálculo. Volume 2, Capítulo 11

Modelo de Resposta:

Seja r um número real tal que $L < r < 1$. Como a sequência $(|a_{n+1}/a_n|)$, converge para L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1}/a_n| < r$, sempre que $n \geq N$, ou seja, $|a_{n+1}| < r|a_n|$ sempre que $n \geq N$. Em particular, para n igual a N, $N+1$, $N+2$, $\ldots$, obtemos

$$|a_{N+1}| < r|a_N|$$
$$|a_{N+2}| < r|a_{N+1}| < r^2|a_N|$$
$$|a_{N+3}| < r|a_{N+2}| < r^3|a_N|$$

Em geral, $|a_{N+k}| < r^k|a_N|$, $k \in \mathbb{N}$. Assim, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{n} |a_n| = \sum_{n=1}^{N-1} |a_n| + \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$$

A primeira soma à direita da igualdade é finita, e portanto, é um número. Só precisamos mostrar que a segunda soma converge. Note que

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| &= |a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+k}| + \cdots \\ &\leq |a_N| + r|a_N| + r^2|a_N| + \cdots + r^k|a_N| + \cdots \\ &= |a_N|(1 + r + r^2 + \cdots + r^k + \cdots)\end{aligned}$$

Como $|r| < 1$, segue que $1 + r + r^2 + \cdots + r^k + \cdots$ é uma série geométrica que converge para $\frac{1}{1-r}$. Logo $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| = |a_N|\frac{1}{1-r}$. Portanto, $\sum_{n=1}^{n} |a_n|$ é convergente.

Assinaturas do documento

Código para verificação: **899J6NEH**

Este documento foi assinado digitalmente pelos seguintes signatários nas datas indicadas:

SIDNEI FURTADO COSTA (CPF: 012.XXX.493-XX) em 25/11/2024 às 10:40:08
Emitido por: "SGP-e", emitido em 11/07/2019 - 13:45:55 e válido até 11/07/2119 - 13:45:55.
(Assinatura do sistema)

Para verificar a autenticidade desta cópia, acesse o link https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo/conferencia-documento/VURFU0NfMTIwMjJfMDAwNTA3MjhfNTA3NzlfMjAyNF84OTlKNk5FSA== ou o site https://portal.sgpe.sea.sc.gov.br/portal-externo e informe o processo **UDESC 00050728/2024** e o código **899J6NEH** ou aponte a câmera para o QR Code presente nesta página para realizar a conferência.