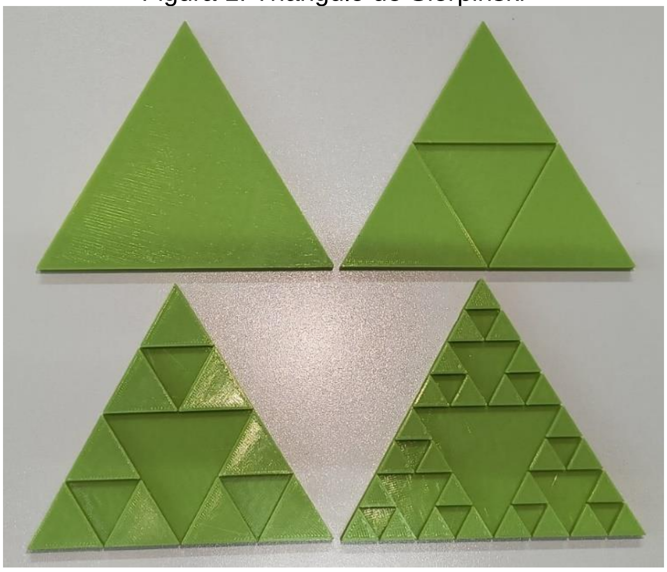
Atividades com Fractais explorando as Progressões Geométricas

Descrição

Fractal (do latim fractu: fração, quebrado) é uma figura da geometria não clássica muito encontrada na natureza, isto é, um objeto em que suas partes separadas repetem os traços (a aparência) do todo completo (padrão repetitivo).

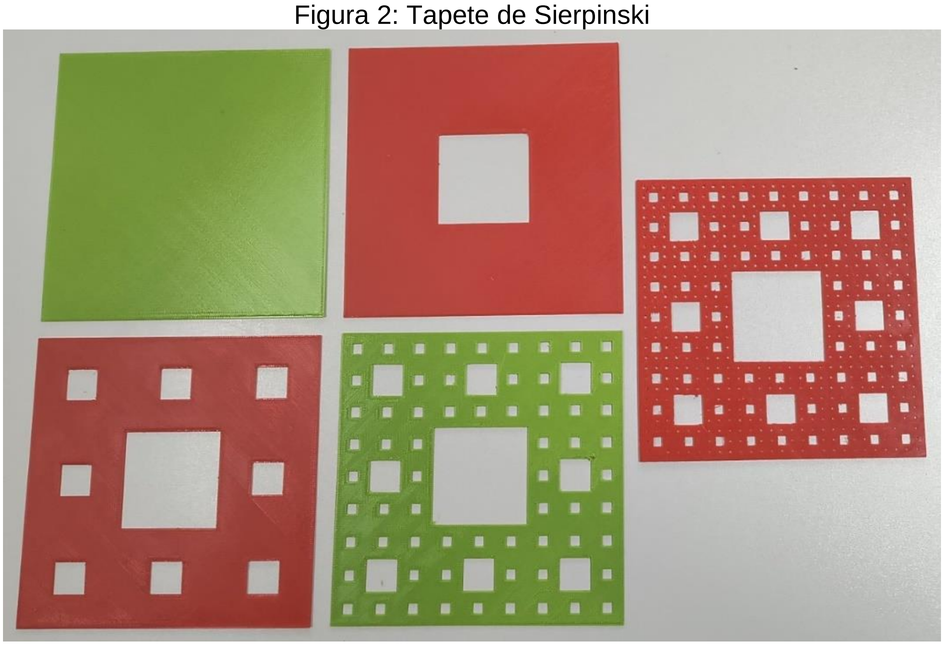
No Fab3D temos vários materiais que exemplificam fractais e para as atividades aqui propostas exploramos três modelos: o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e a Árvore de Pitágoras, ilustrados nas Figuras 1, 2 e 3.

Figura 1: Triângulo de Sierpinski



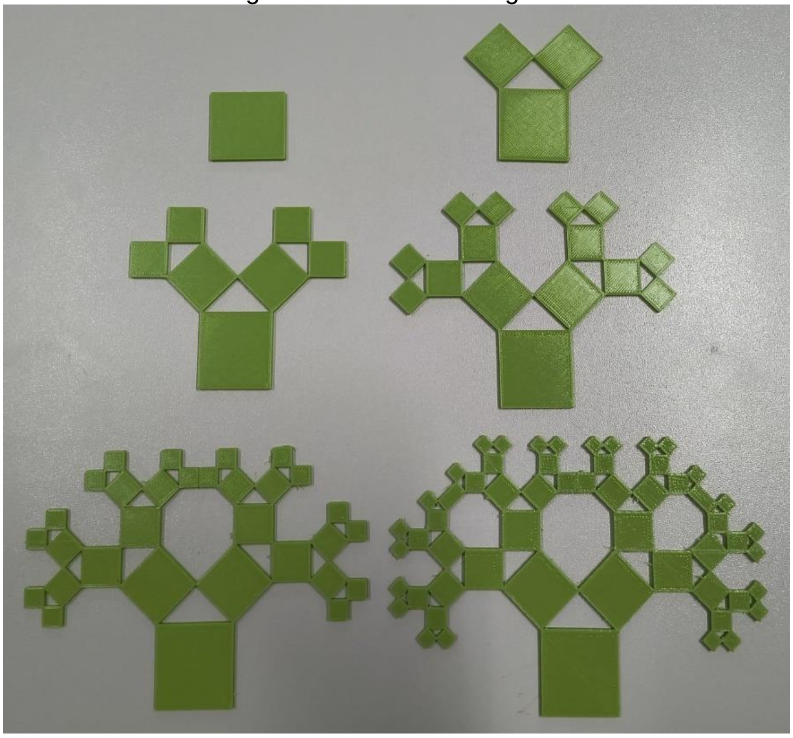
Fonte: Acervo do FAB3D (2024).

Figura 2: Tapete de Sierpinski



Fonte: Acervo do FAB3D (2024).

Figura 3: Árvore de Pitágoras



Fonte: Acervo do FAB3D (2024).

Os modelos para impressão 3D dos fractais acima estão disponíveis em:

- Triângulo de Sierpinski: https://www.printables.com/model/878891-sierpinski-triangle-at-4-levels;
- Tapete de Sierpinski: https://www.thingiverse.com/thing:1562255;
- Árvore de Pitágoras: https://www.printables.com/model/986086-pythagoras-tree-for-3d-print-and-laser-cut.

Para complementar os materiais concretos, foram desenvolvidos aplicativos no GeoGebra para explorar esses três fractais podendo-se escolher o número de iterações e obter as respostas para o número de figuras geométricas criadas, seu perímetro e sua área. Observando esses valores espera-se que os alunos sejam capazes de formular uma relação desses valores com a iteração e com isso montar a lei da sequência.

Os aplicativos podem ser acessados pelos links:

- Triângulo de Sierpinski: https://www.geogebra.org/m/nqnx9gfr;
- Tapete de Sierpinski: https://www.geogebra.org/m/kj47rqzg;
- Árvore de Pitágoras: https://www.geogebra.org/m/xrjpdrkm.

Objetivos

Atividades que auxiliem o professor no ensino de sequências e progressões geométricas com o uso de fractais na forma de materiais concretos e/ou aplicativos do GeoGebra.

Nível de ensino/ Turmas

Turmas de Ensino Médio e formação de professores.

Sugestões de atividades

Como foram criados três modelos elaboramos três diferentes sugestões de atividades que mantém um padrão onde o primeiro bloco de questões trata da relação do número de formas geométricas sendo geradas a cada iteração, o segundo falando sobre a relação entre os lados e os perímetros e, por fim, um bloco com perguntas sobre a área. As atividades estão nas páginas finais desse documento.

As soluções e discussões sobre as atividades estão em Zambrano (2024). Quem tiver interesse nos materiais concretos entre em contato pelo e-mail fab3d.cct@udesc.br.

Autoria

Triângulo de Sierpinski e Árvore de Pitágoras modelados por Diogo Guedes de Figueiredo.

Tapete de Sierpinski baixado de https://www.thingiverse.com/thing:1562255.

Aplicativos do GeoGebra adaptados ou desenvolvidos por Vitória Garcia Zambrano e Elisandra Bar de Figueiredo.

Sequência desenvolvida por Vitória Garcia Zambrano e Elisandra Bar de Figueiredo.

Sugestões

Aos que utilizarem as atividades por favor nos deem o retorno sobre a viabilidade e sugestões de alteração pelo e-mail fab3d.cct@udesc.br.

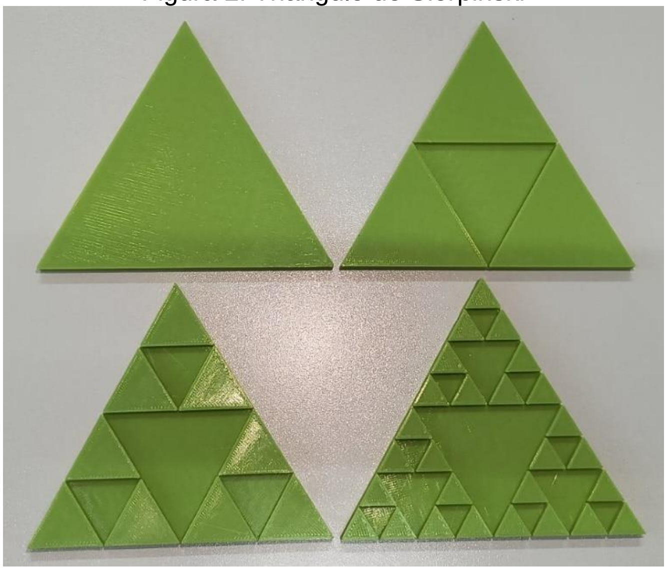
Referência

ZAMBRANO, Vitória Garcia. Fractais na educação básica: uma proposta para o ensino de sequências numéricas com materiais manipuláveis. 2024. 134 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Curso de Licenciatura em Matemática, Joinville, 2024. Disponível em: https://pergamumweb.udesc.br/acervo/167231/referencia. Acesso em: 24 ago. 2024.

Triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski leva esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński, que percebeu algumas propriedades desse fractal. Sua construção se dá através de um triângulo equilátero inicial, onde a cada iteração, são encontrados os pontos médios dos lados desse triângulo e unidos até formar um triângulo central que é desprezado. Dessa forma, a cada nova iteração o triângulo maior é divido pelos menores. Observe as etapas no material concreto (ilustrado na Figura a seguir) e aplicativo do GeoGebra disponível em https://www.geogebra.org/m/nqnx9gfr.

Figura 2: Triângulo de Sierpinski



Fonte: Acervo do FAB3D (2024).

Com base no material concreto e considerando que o triângulo inicial tem lado igual a L, preencha o quadro a seguir e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de Δ	Lado de cada Δ	Perímetro de cada Δ	Perímetro total	Área de cada Δ	Área Total
0						
1						
2						
3						
4						

1. Com relação ao número de triângulos:

a) Escreva de maneira ordenada o número de triângulos gerados até a quinta iteração.

b) A partir da lista feita no item (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a.

c) De que maneira podemos generalizar a expressão para a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos triângulos:

a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de triângulos, há uma relação entre a medida dos lados de cada triângulo gerado por uma nova iteração. Escreva uma maneira de generalizar essa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão.

b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

3. Com relação à área dos triângulos:

a) Escreva de maneira ordenada a área de cada triângulo até a quinta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.

b) O que acontece com a soma das áreas de todos os triângulos restantes em cada iteração? Justifique sua resposta com argumentos intuitivos e tente formalizar essa resposta matematicamente.

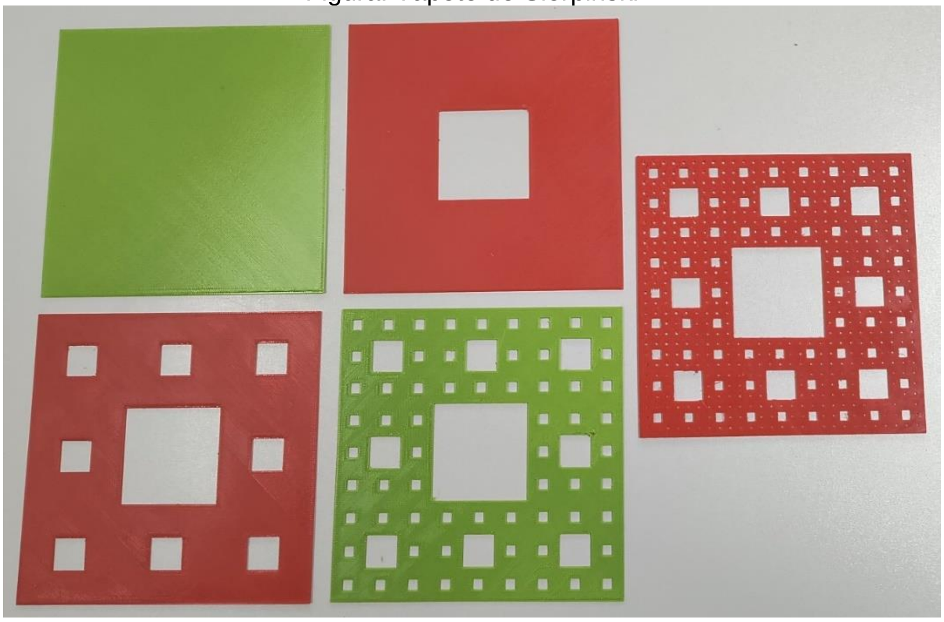
c) Em cada iteração são retirados os triângulos centrais. Que valor obtemos se somarmos a área desses triângulos retirados até a quarta iteração? O que acontece se continuarmos somando as áreas de todos os triângulos retirados? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.

d) Há relação entre a soma do item (b) e do item (c)? Justifique.

Tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski leva esse nome em homenagem ao matemático polonês Wacław Franciszek Sierpiński, que percebeu algumas propriedades desse fractal. Para sua construção, temos inicialmente um quadrado de lado L, que é divido em nove outros quadrados, tendo cada novo quadrado o lado um terço do anterior, e o quadrado central é removido. Esse procedimento pode ser realizado infinitas vezes. Observe a etapas no material concreto (ilustrado na Figura a seguir) e no aplicativo do GeoGebra disponível em https://www.geogebra.org/m/kj47rqzg.

Figura: Tapete de Sierpinski



Fonte: Acervo do FAB3D (2024).

Com base no material concreto, e considerando que o quadrado inicial tem lado igual a L, preencha o quadro abaixo e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de □	Lado de cada □	Perímetro de cada □	Perímetro total	Área de cada □	Área Total
0						
1						
2						
3						
4						

1. Com relação ao número de quadrados:

a) Escreva de maneira ordenada o número de quadrados gerados até a quinta iteração.

b) A partir da lista feita no item (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva-a.

c) De que maneira podemos generalizar a enésima iteração da relação construída na questão anterior? Demonstre seu raciocínio.

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos quadrados:

a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de quadrados, há uma relação entre a medida dos lados de cada quadrado gerado por uma nova iteração. Escreva uma maneira de generalizar essa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão.

b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

3. Com relação à área dos quadrados:

a) Escreva de maneira ordenada a área de cada quadrado restante até a quinta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.

b) O que acontece com a soma das áreas de todos os quadrados restantes em cada iteração? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.

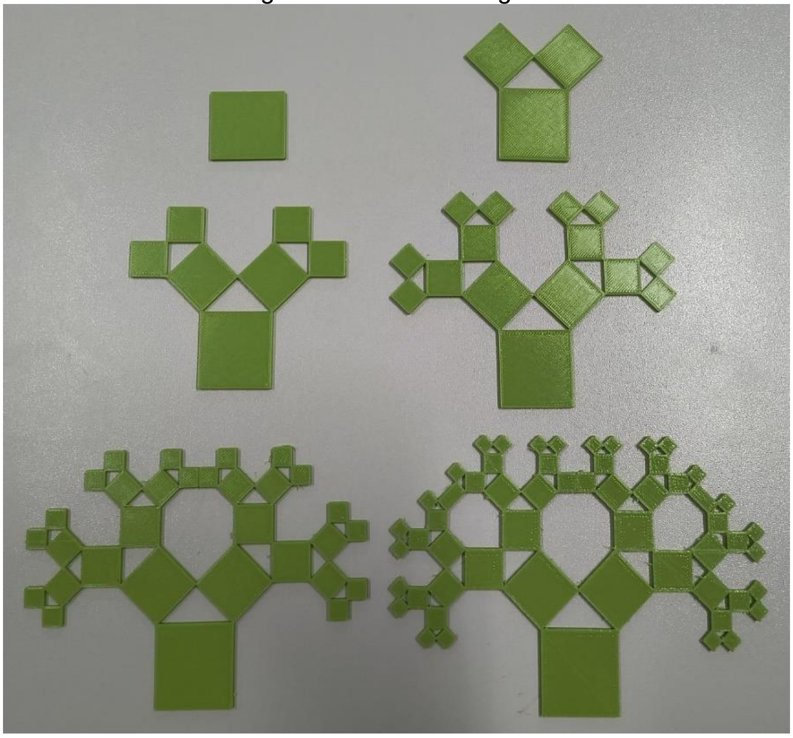
c) Em cada iteração são retirados os quadrados centrais. Que valor obtemos se somarmos a área desses quadrados retirados até a quarta iteração? O que acontece se continuarmos somando as áreas de todos os quadrados retirados? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.

d) Há relação entre as somas obtidas no item (b) e no item (c)? Justifique.

Árvore de Pitágoras

A árvore de Pitágoras é um fractal plano construído a partir de quadrados. Sua construção começa com um quadrado. A seguir, usando como base o lado de cima desse quadrado, constrói-se um triângulo retângulo isósceles que tem o lado do quadrado como hipotenusa. Na sequência são construídos, sobre os catetos desse triângulo, outros dois quadrados. Esse procedimento é aplicado recursivamente aos dois quadrados menores, *ad infinitum*. Seguindo o padrão teremos a árvore, sendo o quadrado construído sobre a hipotenusa o tronco da árvore. Observe as etapas no material concreto (ilustrado na Figura a seguir) e no aplicativo do GeoGebra disponível em https://www.geogebra.org/m/xrjpdrkm.

Figura: Árvore de Pitágoras



Fonte: Acervo do FAB3D (2024).

Com base no material concreto, e considerando que o quadrado inicial tem lado igual a L, preencha o quadro a seguir e depois responda as perguntas.

Nº de iterações	Nº de □ novos	Lado de cada novo □	Perímetro de cada novo □	Perímetro total	Área de cada novo □	Área Total
0						
1						
2						
3						
4						

1. Com relação ao número de novos quadrados:

a) Escreva de maneira ordenada o número de novos quadrados gerados até a quarta iteração.

b) A partir da lista feita na letra (a) podemos perceber uma relação entre esses números, descreva essa relação.

c) De que maneira podemos generalizar a enésima iteração da relação construída na questão anterior (desconsidere as sobreposições)? Demonstre seu raciocínio.

2. Com relação à medida dos lados e perímetro dos quadrados:

a) De maneira análoga ao que foi feito para o número de quadrados, há uma relação entre a medida dos lados de cada quadrado gerado por uma nova iteração. Escreva uma generalização dessa relação para a enésima etapa e explique como chegou a essa conclusão.

b) O que acontece com o perímetro total quando aumentamos o número de iterações? Há alguma maneira de explicar por que isso acontece?

3. Com relação à área dos quadrados:

a) Escreva de maneira ordenada a área de cada novo quadrado até a quarta iteração. Descreva uma relação existente entre esses valores.

b) O que acontece com a soma das áreas de todos os quadrados em cada iteração? Justifique sua resposta de forma intuitiva e tente formalizar essa resposta matematicamente.