revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

# O PRINCÍPIO DE CAVALIERI POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA COM FORMAÇÃO DE PROFESSORES

**DOI:** https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.27.480-506

Amanda Zanelato Colaço[1]
Elisandra Bar de Figueiredo[2]
Eliane Bihuna de Azevedo[3]

**Resumo:** Neste artigo, apresentamos o relato de experiência de uma sequência de atividades desenvolvida para abordar o Princípio de Cavalieri por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Essa prática propõe o uso de material concreto e aplicativos dinâmicos no GeoGebra 3D e foi aplicada em uma turma de um curso de Licenciatura em Matemática. A pesquisa foi uma investigação qualitativa de natureza exploratória, cuja experimentação possibilitou identificar as potencialidades e as limitações dos objetos de aprendizagem utilizados e suas influências no ensino e aprendizagem de matemática. Com a aplicação, percebemos a importância do material concreto para a visualização e o uso em conjunto com aplicativos dinâmicos que permitiam simular várias situações. Por outro lado, chamou-nos atenção a falta de experiência dos alunos em trabalhar com aproximações de resultados em problemas experimentais, evidenciando a necessidade de mais práticas com situações semelhantes. Além disso, podemos constatar que os alunos não tinham familiaridade com o Princípio de Cavalieri, usando as fórmulas sem refletir sobre as suas origens. Na formalização, discutimos como esse resultado se aplica no cálculo de volumes de diversos sólidos, ressaltando sua importância na formação de professores e indicando possibilidades de uso também no Ensino Básico.
**Palavras-chave:** Princípio de Cavalieri. Material Concreto. GeoGebra. Cálculo de volume.

# CAVALIERI'S PRINCIPLE THROUGH PROBLEM SOLVING: AN EXPERIMENT WITH TEACHER TRAINING

**Abstract:** This paper presents an experiment report about a set of activities developed to approach Cavalieri’s principle using the Teaching-Learning-Assessment methodology through Problem Solving. This practice, which was applied to undergraduate students from a mathematics licentiate degree program, proposes the use of concrete materials and dynamic applications in GeoGebra 3D. The research was an exploratory qualitative study, whose experimentation allowed for the identification of the potentialities and caveats of the learning objects employed and their influence on the teaching and learning of Mathematics. With the application of the activities, we noticed the importance of the concrete material for visualization and its use combined with dynamic applications that enable simulating many situations. On the other hand, the students’ lack of experience in working with result approximation in experimental problems caught our attention, clearly pointing the need for more activities with similar situations. Furthermore, it was noticeable that the students were not familiar with Cavalieri’s principle, using the equations with no reflection about their origins. When formalizing, we discussed how that

[1] Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina – CCT/UDESC, E-mail: amandazanelatocolaco@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7334-3643
[2] Doutora em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos, professora associada do departamento de Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina - CCT/UDESC, professora do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), E-mail: elisandra.figueiredo@udesc.br - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2101-4009
[3] Doutora em Ciências da Educação pela Universidade do Minho, professora adjunta do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade do Estado de Santa Catarina – CCT/UDESC, E-mail: eliane.azevedo@udesc.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7075-177X

result applies when calculating volumes for many solids, stressing its importance in the training of teachers and showing the possibility of using it in Primary School as well.
**Keywords:** Cavalieri's principle. Concrete Material. GeoGebra. Volume calculation.

## Introdução

Por décadas, a educação baseou-se no modelo clássico de ensino, aceito sem questionamentos por professores, alunos e pela sociedade, em que o professor ensina narrando o que supõe que os estudantes devam saber, e memorizar para reproduzir mais tarde em avaliações (MOREIRA, 2011). Essas características e outras discussões sobre o ensino e aprendizagem de Matemática começaram a ser questionadas na Educação Matemática, sendo por um lado, reflexo dos "entraves de muitos alunos com a aprendizagem em Matemática e, por outro, na formação do professor, pois os conteúdos matemáticos devem ser bem compreendidos para que possam ser bem ensinados" (GOMES, 2011, p.10). Ensinar bem refere-se também ao docente utilizar alternativas no ensino, que viabilizem a participação ativa do aluno na construção da sua própria aprendizagem.

Nesse sentido, alternativas que valorizam esses aspectos têm sido mencionadas em documentos no Brasil e em outros países. Documentos curriculares nacionais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mencionam a Resolução de Problemas (RP) como uma estratégia atual para a aprendizagem matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021). E ainda, propõe a Formulação de Problemas (FP) como uma outra alternativa a ser adotada, colocando o aluno como o formulador de problemas matemáticos (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022).

Essas duas práticas são mencionadas com frequência na área do conhecimento de matemática da BNCC. Para o Ensino Fundamental, indica-se que o desenvolvimento do letramento matemático tem que estar associado às competências e habilidades que contribuam para a formulação e resolução de problemas em diferentes contextos (BRASIL, 2018). Para a fase subsequente, o documento indica o Ensino Médio como uma etapa em que é preciso incentivar "processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 529).

Já nos Estados Unidos, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (*National Council of Teachers of Mathematics - NCTM*), indica a RP como um veículo poderoso de aprendizagem, no qual as crianças podem desenvolver suas próprias ideias matemáticas ao resolver um problema de solução desconhecida (NCTM, 2000). Além disso, segundo Van de Walle (2009), entre os padrões profissionais para o ensino de matemática, está incluso no papel do aluno propor e iniciar problemas, fazer conjecturas e apresentar soluções, cabendo também ao professor incentivar esses aspectos em sala de aula.

O volume de sólidos, apesar de muitas vezes não ser percebido explicitamente, faz parte de atividades básicas do cotidiano, por exemplo, quando compramos ou medimos produtos. Entender o cálculo do volume é um domínio básico matemático e o Princípio de Cavalieri é uma opção que possibilita a interpretação de volumes entre sólidos de diferentes formatos e com mesmo volume a partir da comparação de suas alturas e áreas de seções. Além disso, essa ferramenta é capaz de demonstrar a dedução da fórmula dos volumes dos sólidos, o que esclarece ao aluno o seu surgimento e como obtê-la, sem a necessidade de decorá-la.

Durante a abstração existente nesse processo, materiais manipulativos concretos e virtuais podem servir para facilitar a interpretação. Aderir a essas ferramentas permite que o aprender do estudante não seja mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que e por que faz, mas que seja um aprender em que "o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade" (FIORENTINI *et al*., 1990).

Neste artigo, apresentaremos o relato da aplicação de uma sequência de atividades para o ensino do Princípio de Cavalieri em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática. As atividades foram elaboradas para abordar esse princípio por meio da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), e fazem uso de material concreto e aplicativos dinâmicos no GeoGebra.

## Referencial Teórico

Responsável por produzir obras no campo da matemática, óptica e astronomia, Bonaventura Cavalieri, nascido em Milão em 1598, tornou-se um matemático muito influente devido às significativas contribuições nessas áreas. Aos 15 anos foi aluno de Galileu e mais tarde atuou como professor de matemática na Universidade de Bolonha, de 1629 até o ano de sua morte, em 1647. Uma das obras de maior prestígio publicadas por Cavalieri é o tratado *Geometria indivisibilibus*. Esse trabalho apresenta o método dos indivisíveis que se origina das ideias de Demócritos e Arquimedes, e sobretudo, tem motivação direta nas tentativas de Kepler em encontrar determinadas áreas e volumes (EVES, 2011).

As observações sobre geometria desenvolvidas por Cavalieri foram formalizadas nos chamados Princípios de Cavalieri para o cálculo de áreas e de volumes. Em particular, para o cálculo de volumes, o princípio conceitua que se dois sólidos A e B são tais que qualquer plano horizontal, e paralelo ao plano que intercepta a base dos sólidos, secciona A e B formando figuras planas com áreas iguais, então os volumes dos sólidos são iguais (MACHADO, 2021).

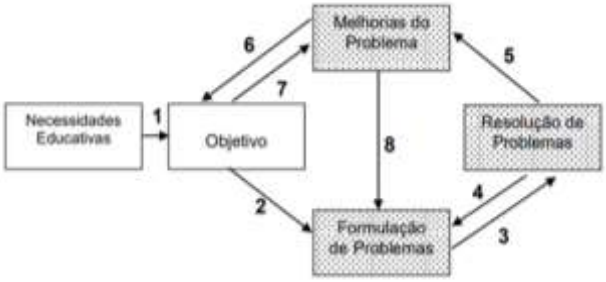
Esse princípio é tratado como um teorema que pode ser demonstrado por meio do Cálculo Integral moderno, contudo em geral é considerado um axioma. Inclusive, Pontes (2014) aponta que problemas matemáticos sobre áreas e volumes que necessitam do cálculo para suas soluções, tem a possibilidade de serem resolvidos por estudantes do Ensino Médio graças a existência do Princípio de Cavalieri.

Uma das abordagens metodológicas para trabalhar conteúdos matemáticos como o Princípio de Cavalieri no ambiente educacional é a Resolução de Problemas. A RP "pressupõe aulas de Matemática com professores e alunos envolvidos em comunidades de aprendizagem, desempenhando diferentes papéis e responsabilidades, visando promover uma aprendizagem mais significativa" (MORAIS; ONUCHIC, 2021, p.19). Assim, resolver problemas não é uma meta de aprendizagem, mas uma forma de fazer matemática (VAN DE WALLE, 2009). Afinal, é uma abordagem considerada o "coração" da atividade matemática, que é fundamental para a construção de novos conhecimentos, e reciprocamente, novos conhecimentos possibilitam a formulação e a resolução de novos problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

A FP, por sua vez, tem ganhado cada vez mais espaço em sala de aula, em que é o papel do discente formular ou reformular problemas de matemática, e não somente papel do professor, o qual segundo Allevato e Onuchic (2021) passa a atuar como mediador. Nesse processo, os alunos podem desenvolver a autenticidade, conceitos matemáticos e a criatividade (ALTOÉ, 2017), aspectos que muitas vezes não são possíveis de serem abordados somente por meio da RP.

Assim, ao formular um problema matemático, o estudante percorrerá três procedimentos fundamentais (Figura 1): formular, resolver e melhorar o problema (RAMÍREZ, 2006). O primeiro procedimento visa a estruturação do problema matemático, considerando os dados matemáticos e a classificação do problema (contextualizado, demonstrativo, etc.); o segundo é destinado para a resolução do que foi elaborado e se houver necessidade, retorna-se ao procedimento anterior para a realização de aprimoramentos; e por fim, o objetivo é avaliar o problema formulado, de modo a considerar correções, melhorias, grau de complexidade, e principalmente, verificar se o objetivo inicial foi atingido. Existe a flexibilidade de transitar entre os procedimentos, sendo viável também descartar o problema anterior e iniciar um novo caso necessário.

**Figura 1:** Procedimentos da Formulação de Problemas.




Fonte: DUARTE, 2020, p.80[4].

Integrando a RP e a FP, segundo Allevato e Onuchic (2021), a MEAAMaRP foca em utilizar um problema matemático como ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos. Assim, tem também "o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devam ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno" (ALLEVATO, ONUCHIC, 2021, p.47). Aliás, durante essa construção, o docente deve atuar como guia e mediador por meio da observação das estratégias e soluções dos estudantes e incentivo no uso dos conhecimentos prévios, sem prescrever regras específicas para se encontrar a solução do problema.

Allevato e Onuchic (2021) sugerem um roteiro para colocar em prática essa metodologia, que é constituída de dez etapas: proposição do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observação e incentivo; registro das resoluções na lousa; plenária; busca de consenso; formalização do conteúdo; proposição e resolução de novos problemas. As cinco primeiras etapas referem-se à construção do novo conceito, que se origina de um problema gerador que precisa ter sua solução expressa na forma escrita, através da linguagem matemática, desenhos e/ou esquemas. Por meio disso, nas três etapas seguintes, os estudantes poderão compartilhar as soluções na lousa, estabelecendo um ambiente para discutir e justificar suas ideias, que será ideal para que a turma obtenha consenso e uma suposição matemática, que posteriormente será formalizada pelo professor em linguagem matemática, o que configura a nona etapa do roteiro. Na última etapa, há a oportunidade de verificar se os conceitos matemáticos foram compreendidos, pela resolução de outras situações problemas ou com a elaboração de novos problemas pelos próprios alunos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021). Esses novos problemas devem envolver o conceito aprendido, e podem ser contextualizados em cenários cotidianos, por exemplo, a depender da criatividade do aluno. É válido mencionar

[4]Versão traduzida do esquema elaborado por Ramirez (2006).

que o roteiro pode ser flexibilizado, adaptado ao contexto da sala de aula em que a MEAAMaRP está sendo adotada, mas não se pode deixar de realizar uma discussão acerca das resoluções apresentadas (plenária) e da formalização do conteúdo (AZEVEDO, FIGUEIREDO, PALHARES, 2020).

Ainda, sobre a última etapa do roteiro, a BNCC cita que a formulação de problemas

> Amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BRASIL, 2018, p.536).

Inclusive, a BNCC considera a prática de resolver problemas como uma estratégia atual para a aprendizagem de matemática, desde que aplicada adequadamente. Isto é, os estudantes precisam identificar os conceitos e procedimentos matemáticos, posteriormente aplicá-los e executar os procedimentos decorrentes, e por fim analisar os resultados com o problema matemático, comunicando suas soluções com linguagem adequada aos demais colegas (BRASIL, 2018, p.535).

Nesse processo, o estudante precisa necessariamente estabelecer conjecturas e suposições que precisam ser justificadas por meio de argumentos coerentes, sendo motivado por "induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais" (BRASIL, 2018, p. 540).

A exemplo entre essas opções, o GeoGebra e os materiais concretos produzidos por impressão 3D têm se tornado cada vez mais viáveis nas salas de aula de matemática. Como protagonista entre os softwares, o GeoGebra admite a representação de um mesmo objeto matemático na forma algébrica, gráfica e numérica simultaneamente, o que possibilita simulações, que são essenciais para a validação ou refutação de conjecturas durante a investigação matemática. Já o material concreto pode ampliar as interpretações de conteúdos matemáticos muitas vezes difíceis de serem abstraídos, e eventualmente pode atuar como um complemento quando aliado ao GeoGebra, e vice-versa. Para Rodrigues e Gazire (2012) os materiais concretos têm o potencial de tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e compreensíveis, visto que aproximam a teoria matemática da sua constatação na prática por meio da ação manipulativa do próprio aluno, assim se aprende fazendo.

Desse modo, o uso integrado do material concreto auxilia e facilita a resolução de problemas, uma vez que desenvolve e amplia a visão espacial e abstrata do conteúdo, otimizando o tempo de solução de problemas similares que o aluno possa encontrar em outras oportunidades (FORTES, 2018). O GeoGebra aliado à RP também contribui nesse sentido, sendo até mesmo apelativo quando se trata de geometria, pois possibilita que as "ideias e os conceitos geométricos ganhem vida através da sua manipulação, ao pôr a descoberto o dinamismo implícito nas condições do problema" (JACINTO, 2014). E assim, é capaz de ampliar as estratégias adotadas pelos alunos, e potencializar a formulação de conjecturas, generalizações e a articulação de argumentos. Aliás, conforme já tinha sido observado por Allevato (2005), a relação entre o software e as características do problema estudado contribuem para uma nova visão do aluno sobre conteúdos antigos, fazendo-o também perceber que a resolução envolve a necessidade de fazer contas e realizar um registro escrito consistente de sua solução.

## Descrição do Estudo

A partir de pesquisas em artigos, livros e dissertações envolvendo materiais concretos, aplicativos no GeoGebra, e sobretudo, a MEAAMaRP no ensino de matemática, elaboramos uma sequência de atividades para o ensino de volumes com foco no Princípio de Cavalieri, sendo pensada para estudantes do Ensino Médio e professores em formação.

A pesquisa realizada está vinculada a um projeto que visa o desenvolvimento de materiais concretos através da tecnologia de impressão 3D, e de aplicativos dinâmicos no GeoGebra. Propomos o uso desses objetos de aprendizagem na sequência como uma forma de melhorar os processos de ensino e aprendizagem de matemática, uma vez que a intepretação pode ser feita através da percepção tátil ou da simulação virtual com respostas visuais imediatas, que diminuem a dificuldade de abstração do conteúdo e despertam o interesse pela aprendizagem.

A investigação caracterizou-se como qualitativa, visto que a fonte de dados é o ambiente natural onde o investigador é o principal instrumento, que analisa os dados recolhidos em toda sua riqueza, respeitando a forma em como estes foram registrados (BOGDAN; BIKLEN, 1994). E ainda, é de natureza exploratória proporcionando "maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses (GIL, 2002, p.41). Nesse sentido, isso esteve vinculado ao estudo de perspectivas, potencialidades e limitações dos materiais concretos e dos objetos de aprendizagem tecnológicos utilizados, e das consequências desses no ensino de matemática.

Adaptada do trabalho de Cunha (2019) e baseada no roteiro sugerido pela MEAAMaRP (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), a sequência de atividades que propomos é composta por seis momentos (Quadro 1). Os sólidos adotados como foco de estudo foram prismas e pirâmides de base quadrada e hexagonal, cilindro e cone e a pirâmide de base triangular, os quais foram disponibilizados em material concreto e em aplicativos no software GeoGebra.

**Quadro 1:** Momentos da sequência de atividades.

| | |
|---|---|
| Momento 1 | Proposição de uma pesquisa sobre a vida e contribuições de Cavalieri. |
| Momento 2 | Organização da sala e breve apresentação sobre a MEAAMaRP. |
| Momento 3 | Resolução de cinco problemas envolvendo material concreto e aplicativos do GeoGebra. |
| Momento 4 | Compartilhamento e discussão dos resultados obtidos nos Momentos 2 e 3. |
| Momento 5 | Formalização usando o Princípio de Cavalieri. |
| Momento 6 | Proposição de uma atividade de FP para o cálculo do volume da esfera através de uma anticlepsidra. |

Fonte: Autoras, 2022.

A experimentação da sequência deu-se em uma turma de cinco alunos da disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática I, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC). Foram formados dois grupos, um com dois acadêmicos (que será denominado G1, formado pelos alunos indicados por A1 e A2) e outro com três acadêmicos (G2 formado pelos alunos A3, A4 e A5). A escolha da disciplina para a aplicação se deu em função do seu caráter, que visa trabalhar com artefatos para o ensino de geometria e discute metodologias e práticas de ensino. A sequência foi previamente apresentada, discutida com a professora regente da turma e alguns problemas foram reescritos. Com uma semana de antecedência da aplicação, a professora regente passou para os alunos a atividade da pesquisa sobre Bonventura Cavalieri (momento 1). Os momentos 2 e 3 foram realizados em três aulas faixa de 50 minutos e, os momentos 4 e 5, foram desenvolvidos em uma aula de 50 minutos, dois dias depois. O momento 6 os alunos fizeram numa aula posterior e discutiram com a professora da disciplina os resultados. Esse último momento foi sem a participação das pesquisadoras, devido a disponibilidade de horário, mas elas tiveram acesso aos dados pela professora.

## Aplicação: proposição, leitura e resolução dos problemas

O relato apresentado nesta seção corresponde as cinco primeiras etapas do roteiro de atividades para trabalhar com a MEAAMaRP e teve duração de três horas aula. Convém salientar que antes de iniciar a sequência de atividades, com o intuito de que os estudantes tivessem conhecimento da dinâmica que seria adotada nas aulas, a terceira autora desse texto fez uma breve explanação sobre a andamento de aula mediada pela MEAAMaRP, tendo como referência o roteiro de dez etapas de Allevato e Onuchic (2021). A professora regente já havia falado com os alunos sobre a metodologia, mas eles não tinham feito nenhuma atividade mediada por ela. Nessa fala a pesquisadora colocou que, na MEAAMaRP, o problema é o ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos

Em seguida, foi iniciada a sequência de atividades. As pesquisadoras e a professora da turma distribuíram para as equipes os enunciados dos problemas e os materiais concretos que faziam parte das simulações propostas nos problemas 1 e 2. Para o problema 1 (Quadro 2) cada equipe recebeu um kit de sólidos que continham primas e pirâmides de base quadrangular e hexagonal, um cilindro e um cone (Figura 2), embalagens com fragmentos de arroz e instrumentos de medida. Os materiais do kit foram modelados do software FreeCAD[5] e produzidos por impressão 3D no Laboratório FAB3D - UDESC[6]. O objetivo era comparar, primeiramente fazendo a simulação com fragmentos de arroz, o volume desses objetos e posteriormente fazer as medidas para calcular o valor numérico dos seus volumes. Todos esses artefatos tinham a mesma área da base e duas alturas diferentes, sendo que a altura do artefato menor é igual a um terço da altura do maior.

**Quadro 2:** Problema 1.

1- Simule o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz.
i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?
b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?
c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meça os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2.

Quadro 1 – Medidas do Cilindro e dos Prismas

| | Prisma quadrangular | | Prisma hexagonal | | Cilindro | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Menor | Maior | Menor | Maior | Menor | Maior |
| Aresta da base | | | | | | |
| Altura | | | | | | |
| Área da base | | | | | | |
| Volume | | | | | | |

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

Quadro 2 – Medidas do Cone e das Pirâmides

| | Cone | Pirâmide Quadrangular | Pirâmide hexagonal |
|---|---|---|---|
| Aresta/raio da base | | | |
| Altura | | | |
| Área da base | | | |
| Volume | | | |

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?

Fonte: Autoras, 2022.

[5] Software CAD de código aberto que utilizamos para modelagem 3D, disponível em: https://www.freecadweb.org/.
[6] Laboratório de Ensino onde são desenvolvidos materiais para o ensino de Matemática usando ferramentas impressão 3D e corte a laser para a fabricação.

**Figura 2:** Kit de material concreto do problema 1.

Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D - UDESC, 2022.

Para resolver esse problema os grupos começaram de maneiras diferentes. G1 começou fazendo as medidas para preencher os quadros da atividade 1 (ii) (Figura 3a), enquanto G2 começou com as simulações com os fragmentos de arroz (Figura 3b). A resolução das questões dessa atividade demorou muito mais do que foi previsto, pois os grupos fizeram as medidas das alturas, raios e arestas das bases de todos os materiais. Como os kits formados tinham artefatos que tinham apenas três bases (quadrado, hexágono e círculo) diferentes supomos que os alunos fariam cada uma dessas medições apenas uma vez, pois, visualmente, consideramos perceptível que todos os artefatos maiores possuíam a mesma altura se comparados entre si. Mesma situação ocorria com os artefatos menores.

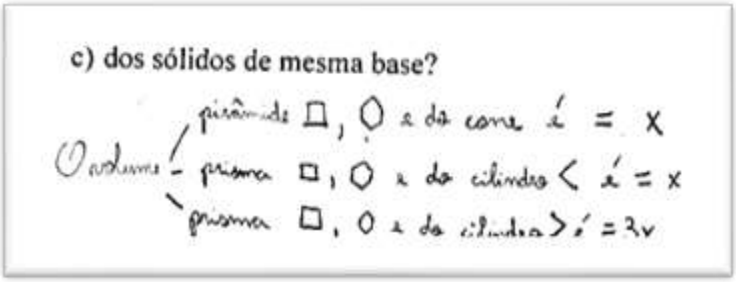
**Figura 3:** Simulações do problema 1.

**a)** G1 **b)** G2

Fonte: Acervo das autoras, 2022.

Para chegar as conclusões dessa questão, G1 foi mais objetivo, não se preocupando com os pequenos erros obtidos. Esse grupo concluiu que os prismas e o cilindro de mesma altura tinham o mesmo volume, e as pirâmides e cone tinham um terço do volume dos prismas de altura maior e mesmo volume dos prismas e cilindro de altura menor, como podemos observar na Figura 4.

**Figura 4:** Conclusões de G1 sobre o problema 1.


c) dos sólidos de mesma base?

O volume: pirâmide □, ⬡ e do cone é = x
prisma □, ⬡ e do cilindro < é = x
prisma □, ⬡ e do cilindro > é = 3v

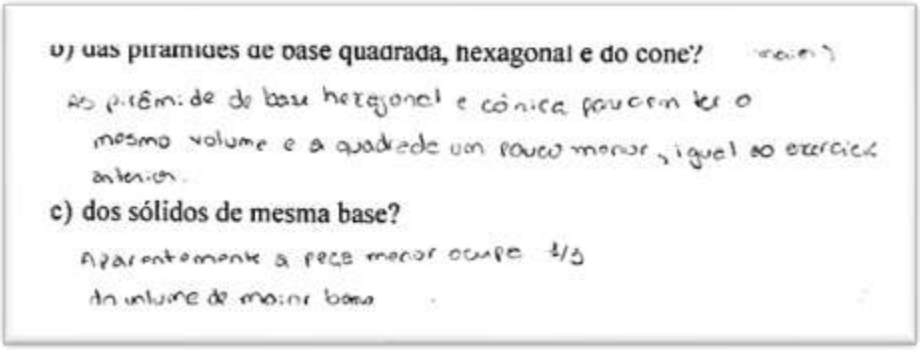
Fonte: Dados da pesquisa, 2022.

Já G2 ficou em dúvida sobre as aproximações, como podemos observar no diálogo entre os alunos indicados como A3 e A4:

> A3: O que tu acha, eu não vi como ficou no quadrado.
> A4: No quadrado ele ficava certinho, a gente pode ter como padrão.
> A3: Acho que esse aqui também fica tipo quase certinho se separar certinho. Porque a gente tem que pensar que tipo essas frestinhas não foram completas por inteiro. Acho que esses dois são bem parecidos.
> A4: A que deu diferença foi a de base quadrada, que pareceu que ficou um volume menor, daí aqui que pareceu que tinha um volume menor, qual que sobrou desse aqui? [...] Aparentemente, o hexagonal e o circular ficaram com volume igual, e deu uma diferença pequena no de base quadrada.

As pesquisadoras e a professora mediaram sugerindo que poderiam trabalhar com aproximações, porém nas respostas eles deixam registrado a sua dúvida (Figura 5).

**Figura 5:** Conclusões de G2 sobre o problema 1.


b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?

As pirâmide de base hexagonal e cônica parecem ter o mesmo volume e a quadrada um pouco menor, igual ao exercício anterior.

c) dos sólidos de mesma base?

Aparentemente a peça menor ocupa 1/3 do volume da maior base

Fonte: Dados da pesquisa, 2022.

Para o problema 2, apresentado no Quadro 3, foram disponibilizados um kit de materiais concretos e um aplicativo do GeoGebra. O kit (Figura 6a) era composto por uma pirâmide quadrangular e um cone de mesma altura, áreas da base iguais e seções por um plano paralelo a base numa mesma altura e o aplicativo simulava os mesmos objetos do kit com a possibilidade de simular dinamicamente várias seções em alturas diferentes (Figura 6b).

**Quadro 3:** Problemas 2 e 3.

2 – Explore o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base e o aplicativo do Geogebra disponível do link: www.geogebra.org/m/dpykks9y.

i) Meça os elementos do material concreto e preencha os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

| | Cone | Pirâmide |
|---|---|---|
| Aresta/raio da base | | |
| Altura total | | |
| Área da base | | |
| Aresta/raio da seção | | |
| Altura da seção | | |
| Área da seção | | |
| Volume Total | | |

O que você pode concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) O que vocês podem concluir com a simulação do aplicativo?

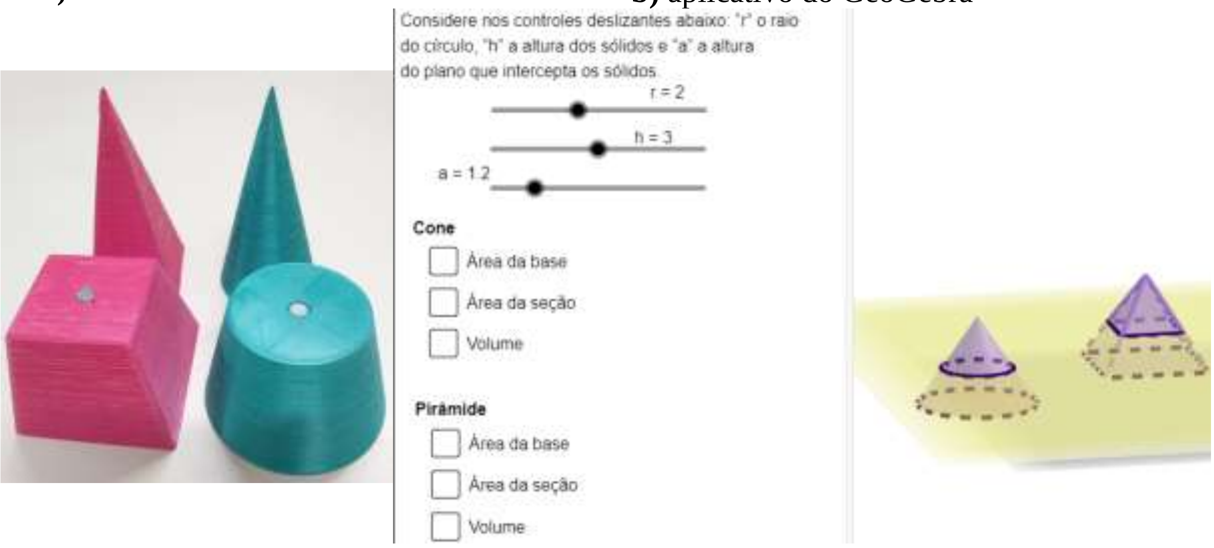
iii) Vocês observaram alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

3 - Com base no que vocês observaram nos problemas 1 e 2, vocês conhecem algum resultado matemático que generalize esses dados? Expliquem.

Fonte: Autoras, 2022.

**Figura 6:** Ferramentas para o problema 2.

**a)** kit de material concreto **b)** aplicativo do GeoGebra

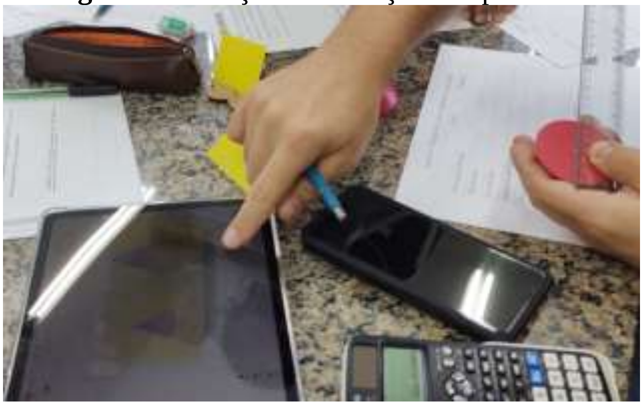



Fonte: Autoras, 2022.

Esse problema os dois grupos resolveram rapidamente, pois o número de medições a serem feitas era menor. Ambos os grupos fizeram as medidas e foram comparando os resultados obtidos nos aplicativos, como podemos observar na Figura 7.

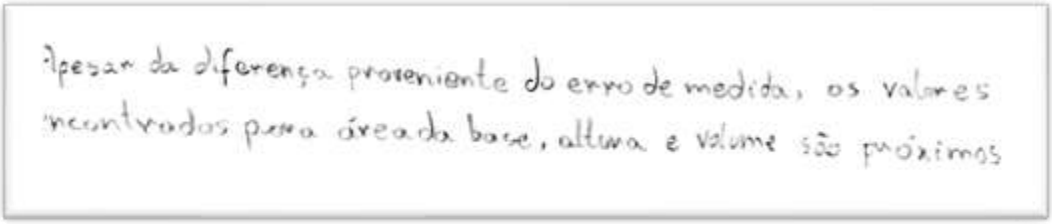
No registro das respostas, G2 ainda fica desconfiado das aproximações e destaca esse ponto na sua folha de registros (Figura 8). G1, por sua vez, tece comparações entre trabalhar com o material concreto e com o aplicativo, ressaltando que no primeiro não há como fazer variações nas alturas dos sólidos e das seções, como se observa na Figura 9.

**Figura 7:** Medição e simulação no aplicativo.



Fonte: Acervo das autoras, 2022.

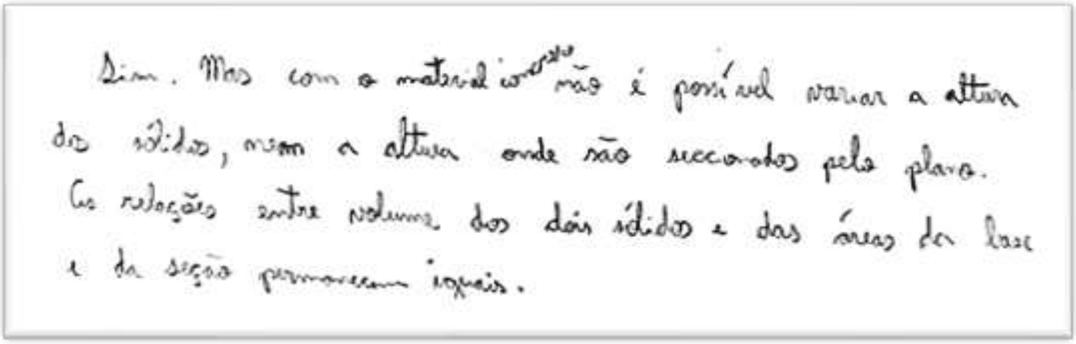
**Figura 8:** Resolução problema 2 (iii).



Apesar da diferença proveniente do erro de medida, os valores encontrados para área da base, altura e volume são próximos

Fonte: Dados da pesquisa, 2022.

**Figura 9:** Resolução problema 2 (iii) por G1.



Sim. Mas com o material usado não é possível variar a altura dos sólidos, nem a altura onde são seccionados pelo plano. As relações entre volume dos dois sólidos e das áreas da base e da seção permanecem iguais.

Fonte: Dados da pesquisa, 2022.

O problema 3 (Quadro 3) objetivava que os grupos observassem os resultados obtidos nos problemas anteriores e percebessem que estavam usando uma aplicação do Princípio de Cavalieri, porém nenhum deles chegou a essa conclusão. G1 destacou como resultado que estava sendo usado a fórmula de cálculo de volume de pirâmides ou cones, enquanto G2 ficou preso nos valores aproximados que obteve, concluindo que não poderia obter uma generalização para as atividades. Porém, apresentam uma proposta de como poderiam ter uma melhor aproximação, que seria utilizando água em vez de arroz, por não sobrar "brechas" como ocorrem entre os grãos de arroz, como observamos no diálogo entre os alunos:

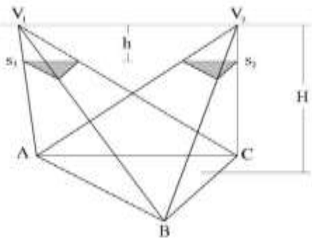
> A3: É que o nosso deu diferente, mas era para ter dado igual [sobre os valores da tabela], mas aí se tivesse a mesma altura e a mesma área da base ele ia ter o mesmo volume. Dá pra gente concluir, só que aqui não foi a conclusão que a gente chegou [...] pelos nossos resultados não dá para generalizar nada, mas é porque a gente foi medindo na mão, mas daí era pra ter dado todos esses valores aqui todos iguais.
> A4: Se fosse com água, teria dado mais certinho [...] porque dependendo do arroz, o ar, ele ia ficar entre os grãozinhos de arroz.
> A5: O arroz fica uns espacinhos, a água teria preenchido totalmente.

O problema 4, apresentado no Quadro 4, trazia um resultado de geometria espacial, que fala sobre as razões de semelhança num tetraedro quando seccionado por um plano paralelo a base, que os grupos deveriam usar para responder questões que generalizam a relação entre a área da base e a área da seção de tetraedros com mesma altura e área da base.

**Quadro 4**: Problemas 4 e 5.

4 - Suponha duas pirâmides de base triangular $ABC$ e altura $H$, sendo que seus vértices são $V_1$ e $V_2$. Um plano paralelo à base $ABC$ e que dista $h$ dos vértices produz seções $S_1$ e $S_2$ de áreas $A_1$ e $A_2$ nas pirâmides de vértice $V_1$ e $V_2$, respectivamente.

Figura 1: Pirâmides de base $ABC$




Fonte: PONTES, 2014.

Usando o seguinte Teorema:

> Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos:
> • As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
> • A seção e a base são triângulos semelhantes.
> • A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice (DOLCE; POMPEO, 2005).

determine e explique:
a) a relação de $A_1$ com $A_2$ e cada uma delas com a área do triângulo $ABC$;
b) a relação entre os volumes dessas duas pirâmides triangulares originais ($ABCV_1$ e $ABCV_2$);
c) a relação entre o volume de duas pirâmides triangulares que possuem bases de áreas iguais e alturas iguais.

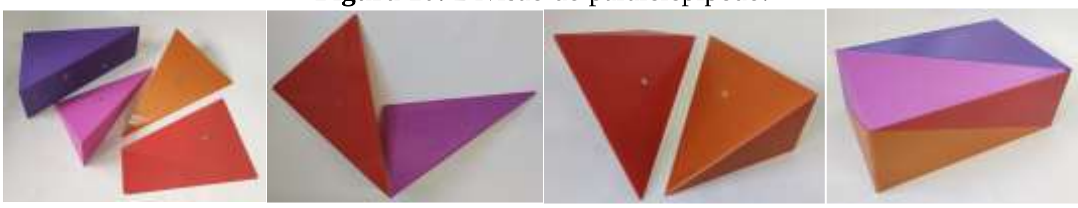
5 - Observe e analise o material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. O que vocês podem afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

Fonte: Autoras, 2022.

O enunciado desse problema gerou muitas dúvidas por causa do teorema que precisava ser usado. Por um tempo os grupos tentaram provar o teorema, confundiram o fato de no teorema ser mencionado um tetraedro, enquanto na situação e na figura (contida no enunciado do problema 4) havia dois tetraedros, além do enunciado fazer referência ora ao tetraedro e ora à pirâmide triangular. A professora regente e as pesquisadoras foram mediando esses questionamentos, sugerindo que eles usassem novamente o aplicativo (do problema 2) para observar o que acontecia na pirâmide. Porém, nesse momento percebemos a necessidade de um aplicativo com mais informações sobre as medidas das arestas em relação a seção. Por fim, os dois grupos conseguiram concluir o problema.

O problema 5 (Quadro 4) tinha como objetivo perceber pelo uso de material concreto que um prisma triangular poderia ser decomposto em três tetraedros de mesmo volume, observando que dois a dois eles tinham a mesma base e a mesma altura. O material concreto, ilustrado na Figura 10, é composto por um prisma triangular e três tetraedros de mesmo volume que decompõe esse prisma. Juntos eles compõem um prisma retangular.

**Figura 10:** Divisão do paralelepípedo.



Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D, 2022.

O G2 fez esse problema durante a aula, mas G1 não teve tempo e levou o material para casa para terminar de resolvê-lo. Ambos os grupos concluíram que os três tetraedros tinham o mesmo volume, mas pela nossa percepção a conclusão não foi baseada na manipulação do material concreto. Esse ponto ficou evidente na plenária, que abordaremos na próxima seção.

## Aplicação: plenária, busca do consenso, formalização e elaboração de novos problemas

No segundo dia da aplicação iniciamos com a plenária, que foi conduzida pela segunda autora desse trabalho, que nas falas que seguem aparece nomeada como pesquisadora 2 (P2). O fato de ter apenas cinco estudantes e da aula ser num laboratório que tem mesas grandes, propiciou uma discussão de forma oral. Se para haver o entendimento do que foi feito pela equipe fosse necessário ver o que escreveram/interpretaram, poder-se-ia ver a folha de respostas do grupo além de ter disponível uma lousa na sala para que fosse registrada alguma informação que fosse necessária para continuar com a discussão dos resultados.

Ao apresentarem suas conclusões sobre o problema 1, G2 destacou que ficou bastante inseguro em tirar conclusões por causa dos resultados aproximados. Esse grupo também sugeriu que o enunciado estipule uma tolerância de erro nas aproximações. Durante a apresentação de suas conclusões, perceberam que um erro cometido ocorreu nas medições por ora usar a medida interna ora a externa, como podemos observar na fala de A3:

> Os materiais que a gente usou pra medir, tudo bem ah a gente tá usando a régua, mas a gente não sabe exatamente onde tá o diâmetro da circunferência [...] as vezes era pra ter usado a parte interna e a gente tá considerando a externa, então já vai mudar um pouquinho. Porque quando eu estava usando o paquímetro, eu peguei a parte de dentro do paquímetro e coloquei por dentro daí pra medir aí essa bordinha lateral ela não pega, só que aí com a régua eu considerei essa bordinha lateral, aí tipo já dava 2 mm de diferença, e ai querendo ou não vai impactar que justamente um deu 163 cm³ e outro deu 166 cm³, é bem pequeno mas pode ser que essa variação de 2 mm pode ter influenciado nisso.

Apesar dos valores aproximados, chegou-se ao consenso que se tinha volumes iguais e que os materiais estavam relacionados entre si.

No problema 2, as equipes destacaram que fizeram as medidas dos materiais concretos, chegando as conclusões. Nesse momento a pesquisadora questionou os alunos sobre qual ferramenta (entre o aplicativo e os materiais concretos) consideraram melhor para visualização. Os estudantes A2 e A4, responderam que foi o aplicativo, por permitir a simulação de várias alturas e já mostrar o resultado das áreas das seções. Enquanto A5 colocou que o material concreto foi importante para ela perceber o que estava acontecendo e entender melhor o que o aplicativo estava ilustrando, vemos isso no diálogo:

> A2: Eu achei o aplicativo.
> A4: Nesse caso como é para variar é interessante a gente vai alterando e observando os valores [complementando a resposta de A2].
> A2: O aplicativo é mais rico.
> A5: Para mim, óbvio que o aplicativo ajuda, mas não sei se sou eu, mas já bati na tela, movimentei tudo errado, eu tenho muita dificuldade nessas coisas, sou bem desastrada, então ter uma peça física me ajuda a visualizar como realmente seria a forma. Tipo, aqui realmente seria assim. Ah tá e aqui no aplicativo funciona assim. Aí vendo ali [o físico] eu consigo entender o que está acontecendo. Pra mim fica mais fácil. Talvez se tivesse só o aplicativo, eu teria entendido, mas não seria a mesma coisa.
> A4: Acho que a combinação dos dois [material concreto e aplicativo] você consegue ver bem.

No problema 3, o único resultado que G1 destacou foi a fórmula do cálculo de volumes de cones e pirâmides e G2 argumentou que não se sentiu confortável em estabelecer um resultado por causa das aproximações: “A5: A gente colocou que em condições ideais essas áreas seriam todas iguais, e aí essa fórmula seria tudo igual para elas, porque se não faz diferença o polígono sendo a área igual e a altura, então o volume seria o mesmo”. Nesse momento a professora regente destacou que as estratégias das duas equipes foram determinantes para as conclusões:

> Eu achei interessante que vocês meio que não se conformavam, não é que não se conformavam, mas vocês ficaram bem incomodados com a questão da aproximação [se referindo a G2], em nenhum momento vocês pegaram e disseram ‘ah, mas isso é quase igual’. Não, vocês fizeram as contas e vocês diziam ‘não é igual, não é igual’ e ficaram naquela do número do não é igual. E eu acho que eles já não [se referindo a G1] já teve essa questão lá no começo o A2 falando ‘mas isso é praticamente a mesma coisa’. O que para eles [G2] era um erro grande, para eles [G1] não era um erro tão grande, era só ‘é quase a mesma coisa’. Então isso foi influenciando nas conclusões (Professora regente).

Os dois grupos concordam com essa análise da professora e A5 reforça que realmente a questão da aproximação fez com que eles não assumissem que existiria uma generalização.

No problema 4, A5 começa destacando que teve muitas dúvidas com a intepretação, mas seguiu o seguinte raciocínio:

> A relação entre a área $A_1$ e $A_2$ para mim é que elas seriam iguais, porque elas faziam parte duas pirâmides que tinham a mesma altura e a mesma base, e aí essas duas areazinhas eram formadas por um plano paralelo a essa base. E aí a gente tinhas essas condições ali que ele dava [se referindo ao teorema do enunciado do problema], que essas arestas laterais e altura iam ficar divididas pela mesma razão então a gente tinha uma proporcionalidade ali, e a seção e a base eram triângulos semelhantes. Com isso esses dois triângulos eram semelhantes a base, então eles eram semelhantes entre si. Então, na minha cabeça juntando tudo ali eles eram iguais.

A aluna seguiu contando as relações que tinha escrito. Para ficar mais claro o que estava sendo explicado, a pesquisadora pediu para A5 escrever na lousa a relação que tinha conseguido visualizar (Figura 11).

**Figura 11:** Registro no quadro do item (a) do problema 4.

Fonte: Acervo das autoras, 2022.

A aluna destaca que tinha conseguido fazer a comparação para apenas uma das razões $\frac{A_1}{A}$. Depois dela ter escrito a relação na lousa, seguiu o diálogo entre a pesquisadora (P2) e a aluna do G2:

- P2: E o que acontece com $A_2$?
- A5: Vai acontecer a mesma coisa, eu acho.
- P2: Então escreve o $A_2$ lá.
- A5: A área vai ser a mesma ... então ...
- P2: E aí você tira sua dúvida?
- A5: Sim.
- P2: Sim, a área é a mesma por conta desta relação.

[...]

- A5: É, portanto que eu nem pensei naquilo ali [referindo-se à conclusão que chegou com as fórmulas no quadro] porque eu estava pensando em olhar e pensar alguma coisa, então eu pensei no semelhante e não sei o que, mas não tinha nem pensado em usar a fórmula pra concluir.

Pela fala de A1 do G1 eles chegaram a mesma conclusão e ela destacou que a formulação desse problema estava bem confusa:

> Eu achei que tinham umas coisas que pareciam pra confundir mesmo. As vezes parece assim que, quando eu lia essas informações, eu via que eram proporcionais, que ia dar outra coisa, mas parecia que dissesse outra coisa, era um detalhe simples, mas parecia que queria que explicasse outra coisa bem mais aprofundada (fala de A1)

A pesquisadora 2 fez colocações destacando que percebeu durante a aplicação que o enunciado ficou confuso principalmente por apresentar no enunciado um teorema e uma figura inseridos que traziam situações diferentes. A professora regente ainda acrescentou que houve uma quebra de estilo de problemas. Os primeiros foram bem experimentais e o quarto totalmente teórico e formal. A pesquisadora ressalta que essa colocação é muito importante para que os enunciados sejam revistos e melhorados, inclusive ser elaborado outro aplicativo para ilustrar a situação que acontece no enunciado do teorema. E acrescenta que a intenção de colocar o Teorema no enunciado do problema era para ajudar aos alunos a recordarem essas relações de semelhança, sem precisar provar o resultado de forma teórica, mas que irão rever essa formulação para futuras aplicações.

Por fim, na explanação do problema 5 os dois grupos citaram que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma com a mesma base, por isso os três tetraedros, que compunham o material, tinham o mesmo volume. Porém, ao serem questionados como que eles tinham observado isso, não conseguiram posicionar os tetraedros de forma a concluir o resultado e também não expuseram cálculos. Então, P2 os instiga a tentarem, mas eles têm bastante dificuldade, como vemos no diálogo:

> P2: O que vocês concluíram desses três tetraedros ou pirâmides triangulares?
> A2: Que tem a mesma base, então a área da base é igual, também tem a mesma

> altura, então se são 3 o volume é 1/3 do volume total.
> P2 [para o A2]: As três têm a mesma base?
> P2 [para o G2]: E vocês?
> A5: A gente colocou que o volume das três são iguais pois elas ocupam o mesmo espaço dentro do prisma.
> P2 [para A5]: Como assim ocupa o mesmo espaço?
> A2: Por que o volume delas é igual?
> [Risadas...]
> P2: Mas eu quero saber por que o volume das três é igual? Você [para A2] falou que as três têm a mesma base.
> A2: Uhum.
> P2: Então, elas têm as três a mesma base?
> A2: Não.

Eles percebem que as bases são de mesma área, porém ficam por um tempo tentando encontrar três bases iguais e três alturas iguais, porém sem sucesso (que de fato não há). A pesquisadora os instiga a comparar os tetraedros dois a dois e com isso conseguem entender como pode ser percebida a equivalência dos volumes dos três tetraedros.

Terminado o compartilhamento e busca do consenso P2 passou-se para a formalização. Resgatando os resultados dos problemas 1 e 2, chamando atenção para os resultados obtidos: volumes iguais mesmo tendo-se bases diferentes, porém com a mesma área, no caso dos prismas e cilindros; áreas das bases e áreas das seções paralelas as bases iguais no problema 2. Com essas informações, a pesquisadora, chamou atenção para as características dos sólidos envolvidos nesses problemas: “eu tenho sólidos que têm a mesma área da base, a mesma altura e todas as áreas das seções iguais. No aplicativo vocês viram que conforme vocês vão subindo e descendo todas as áreas são iguais, não só num corte específico.” Como isso se estendeu uma conversa sobre definição de sólidos que teriam essas características e quais não teriam, resgatando a definição e exemplos de superfícies cilíndricas. Para conseguir chegar no resultado matemático P2 questiona os alunos sobre a pesquisa que tinham feito sobre Cavalieri, eles relembraram dos indivisíveis, mas não conseguem relacionar com os problemas que tinham sido aplicados, como percebemos na fala de A1 de G1 “Sobre as partes dos planos acho, um plano seccionando um sólido, vai ter as áreas que vão ser proporcionais, não o volume, não lembro [...] vai ter altura, e o volume também”. Com isso P2 explica que o resultado que generaliza os resultados percebidos nos problemas 1 e 2 é o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, conforme Figura 12.

**Figura 12:** Princípio de Cavalieri.


Fonte: Autoras, 2022.

A pesquisadora exemplifica o princípio com os sólidos que foram abordados nos problemas, resgata a definição de volume de um cubo e de volume de paralelepípedo, e coloca que a partir desse volume conhecido e do Princípio de Cavalieri sabe-se o volume que qualquer cilindro (e prisma). De forma análoga comparando pirâmides e cones, destacando que o Teorema no enunciado do problema 4 é que garante as hipóteses do Princípio de Cavalieri para essa categoria de sólidos. Por fim, o problema 5, vem garantir que o volume de um tetraedro é um terço do volume do prisma triangular de mesma base e resgatando o problema 4 esse resultado é válido para qualquer pirâmide e cone.

Para fechar a formalização P2 falou brevemente sobre o que é preciso para usar o Princípio de Cavalieri, destacando que apesar de ser muito útil, não é um resultado simples de ser usado, pois para determinar o volume de um sólido desconhecido precisamos de um outro sólido, que possua as mesmas medidas de área para cada seção horizontal e possua a mesma altura que o sólido do qual desejamos calcular o volume. Há inúmeros sólidos existentes, mas encontrar um que possua tais características não é um trabalho fácil, principalmente no que se refere a corpos redondos. Para resolver esse problema temos as somas de Riemann e o Cálculo de Integral, que inclusive é uma das ferramentas para se demonstrar o Princípio de Cavalieri.

Como fechamento da aplicação, foi deixado como atividade extraclasse, para entrega na aula posterior, a elaboração de um problema matemático usando o Princípio de Cavalieri, o material concreto composto por calotas de esfera e a anticlepsidra (Figura 13) e o aplicativo disponível no link https://www.geogebra.org/m/TbUDpCCt.

**Figura 13:** Material concreto para o volume da esfera.

Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D, 2022.

A professora regente acabou deixando os alunos trabalharem na formulação dos problemas durante as três aulas da semana seguinte. Não houve a participação das pesquisadoras, temos apenas o relato da professora e as atividades que foram elaboradas. Segundo a professora, apenas três alunos participaram da elaboração: A1, A2 e A5, e eles trabalharam todos juntos e propuseram dois problemas. A princípio os alunos ficaram trabalhando sozinhos, mas a professora percebeu que eles não estavam conseguindo interpretar o material e o aplicativo, então ela auxiliou nesse momento para chegarem a uma conexão com o Princípio de Cavalieri.

Nos dois problemas propostos (Figura 14) percebemos a preocupação com uma situação contextualizada, porém não há efetivo uso do material concreto e do aplicativo. A professora relatou que foram os alunos que decidiram elaborar problemas contextualizados, não foi uma orientação dela. Os problemas foram apresentados e discutidos com a professora e nesse momento foram feitas algumas correções do enunciado para melhor interpretação.

**Figura 14:** Problemas elaborados pelos alunos.

O princípio de Cavalieri nos diz que, dados dois sólidos A e B de mesma altura e áreas da base iguais, que estão contidos no mesmo plano $\beta$, terão o mesmo volume se qualquer plano e, paralelo a $\beta$, determinar duas seções transversais com áreas iguais. A partir dele vimos em sala que, se tomarmos uma anticlepsidra e uma esfera assentadas em um mesmo plano horizontal, os seus volumes serão iguais. Sabendo disso, considere as questões abaixo:

1. Maria possuía uma ampulheta formada por cones de raio e altura iguais a 4cm. Certo dia o gato de Maria quebrou sua ampulheta e ela transferiu a areia para um pote com formato de esfera. Considerando que Maria foi capaz de recuperar toda a areia da ampulheta, calcule a porcentagem do volume da esfera ocupada pela areia da ampulheta se:

a) Um cone tem todo o seu volume preenchido por areia.

b) Um cone tem ¾ do seu volume preenchido por areia. Considere a fórmula do tronco de cone como: $V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$.

2. Pedro estava em uma festa com uma taça de Martini como a ilustrada abaixo. em determinado momento, Pedro esbarrou com a taça em uma mesa quebrando a base que deixava a taça em pé. Para não perder o Martini, Pedro rapidamente pegou um potinho de sobremesa como o da figura. Considerando que a taça estava cheia até a borda com 100ml de Martini, considerando a taça como um cone de raio $x$ e altura $y$, e o potinho de sobremesa como sendo a metade de uma esfera de raio $x$ e altura $y$, assinale a resposta que corresponde ao volume do potinho:

a) 100ml
b) 150ml
c) 200ml
d) ½ $e$(100)ml
e) 250ml

Fonte: Dados da pesquisa, 2022.

Os problemas formulados foram criativos, mas a necessidade que os alunos sentiram em propor algo contextualizado acabou tirando o foco da atividade proposta. Analisando os procedimentos da formulação de problemas da Figura 1, vemos que faltou a etapa 6, de rever o objetivo (usar o material concreto e aplicativo), e então voltar ao enunciado ou voltar para a etapa de formulação.

## Considerações finais

Neste trabalho foi apresentada de forma detalhada a experiência vivenciada por uma turma da disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática de um curso de Licenciatura em Matemática com aulas apoiadas na MEAAMaRP. Com essa prática, os estudantes tiveram a oportunidade de estudar o Princípio de Cavalieri com uso de material concreto e de aplicativos desenvolvidos no GeoGebra 3D de forma mais intuitiva, evitando dessa forma a reprodução automática do uso fórmulas sem um significado conceitual (LEMKE; SIPLE; FIGUEIREDO, 2016). Nesta prática os estudantes tiveram um papel ativo durante todo o processo, enquanto as pesquisadoras e a professora regente o papel de mediadoras, como esperado pelo uso da MEAAMaRP.

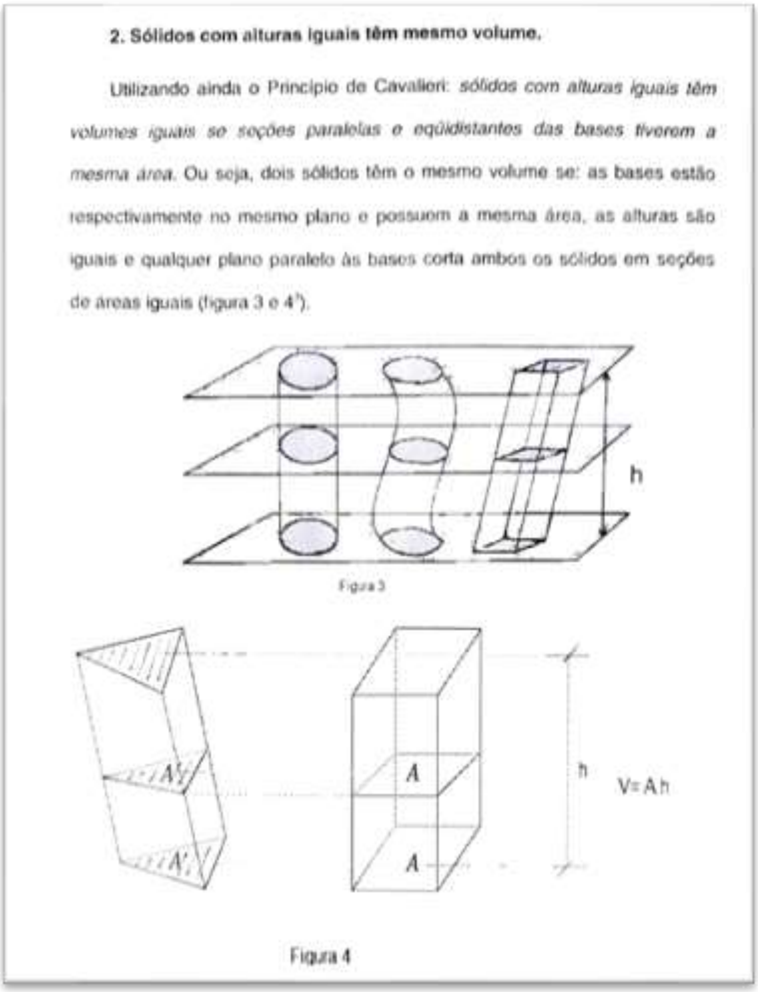
A discussão das resoluções feita pelos grupos foi um momento rico em que se tornou evidente o processo de avaliação que os próprios estudantes fizeram sobre a sua resolução. Como exemplo desse momento, citamos a discussão do problema 3, em que os estudantes observaram que existia diferença entre o valor obtido pelos volumes que estava sendo causada ao tomar as medidas dos artefatos, considerando ora medida externa ora medida interna; e, o apontamento de uma possível forma de obter um resultado mais preciso, que seria ao invés de utilizar os fragmentos de arroz utilizar água, pois dessa forma não haveria brechas como as que existem entre os grãos de arroz. Um segundo momento que consideramos importante para a aprendizado dos estudantes foi da discussão dos resultados em que a professora pesquisadora fez uma mediação que resultou na conclusão almejada com a atividade proposta. Mais especificamente, o momento em que A5 escreveu na lousa a sua conclusão obtida para apenas uma das proporções (Figura 11), com a mediação da docente, a discente conseguiu expandir as suas considerações.

Ao analisarmos a atividade de pesquisa (Momento 1), que foi entregue para as pesquisadoras, percebemos que alguns alunos tinham informações bem completas com exemplos ilustrativos do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, como podemos observar no recorte apresentado na Figura 15. Porém, isso não foi suficiente para perceberem a relação dos problemas com o princípio. Ainda foi possível perceber, durante a plenária e formalização, uma lacuna dos alunos em relação a esse tema.

Na etapa da formulação de problemas não houve a participação das pesquisadoras nem na mediação e nem na discussão. Com o acesso aos problemas elaborados e ao relato da professora regente, percebemos que os alunos tiveram a preocupação em elaborar problemas contextualizados, mas não usaram efetivamente o material concreto e o aplicativo nos enunciados.

Com a experimentação destas atividades, as autoras puderam identificar enunciados que precisam ser reformulados, conforme sugestões dos próprios estudantes, para facilitar a compreensão, não restar dúvidas do que estava sendo solicitado e que propicie de forma natural os estudantes estabelecerem uma conexão entre a pesquisa feita no primeiro momento da sequência com as conclusões obtidas com os problemas que foram propostos.

**Figura 15:** Registros da pesquisa sobre Cavalieri.



**2. Sólidos com alturas iguais têm mesmo volume.**

Utilizando ainda o Princípio de Cavalieri: *sólidos com alturas iguais têm volumes iguais se seções paralelas e eqüidistantes das bases tiverem a mesma área*. Ou seja, dois sólidos têm o mesmo volume se: as bases estão respectivamente no mesmo plano e possuem a mesma área, as alturas são iguais e qualquer plano paralelo às bases corta ambos os sólidos em seções de áreas iguais (figura 3 e 4[1]).



Fonte: Dados da pesquisa, 2022.

Consideramos que a aplicação gerou novos conhecimentos para os alunos que no final conseguiram perceber como o Princípio de Cavalieri precisa ser usado e o uso dos materiais concretos e aplicativos dinâmicos geraram experiências que contribuíram para o aprendizado. Durante a plenária alguns alunos declararam preferência por um ou por outro, mas o consenso foi que um complementou o outro. No momento da formalização, exploramos como esse resultado pode ser utilizado no cálculo de volumes de variados sólidos e sugerimos algumas possibilidades de aplicações deste princípio também no Ensino Básico. Por fim, temos para nós que a MEAAMaRP fez os alunos discutirem e participarem ativamente de todo o processo de ensino-aprendizagem-avaliação, sendo uma experiência muito importante com que os estudantes tiveram enquanto são professores em formação.

A pesquisa segue ativa, buscando melhorias no enunciado dos problemas, novos aplicativos para deixá-los mais dinâmicos e almejamos novas aplicações em turmas de formação de professores e também no Ensino Básico.

**Agradecimentos**

As autoras agradecem ao Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Sistemas Aplicados ao Ensino - PEMSA e a Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina - FAPESC.

**Referências**

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. 2005. 370 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? *In:* ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

ALTOÉ, Renan Oliveira. **Formulação de Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo no Ensino Fundamental**: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. 2017. 229 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

AZEVEDO, Eliane Bihuna de; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; PALHARES, Pedro Manuel Baptista. Adaptação no roteiro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática do GTERP para ensinar Cálculo Diferencial e Integral através da Resolução de Problemas. **REMAT**, v. 17, p. 01-22 – e020012, 2020.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: Mecseb, 2018.

CUNHA, Luiz Gustavo. **Cálculo de Volumes Usando o Princípio de Cavalieri Mediado por Materiais Concretos**. 2019. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2019

DUARTE, Edna Mataruco. **O desenvolvimento de jogos educacionais digitais sob a perspectiva de Formulação de Problemas e a aprendizagem no Ensino Superior**. 2020. 245 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2020.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, Dario *et al*. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

FORTES, Filipe do Nascimento. **Resolução de Problemas com o uso de material concreto:** uma investigação na formação de professores. Manaus: Universidade do Estado do Amazonas, 2018.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOMES, Severino Carlos. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de trigonometria numa abordagem histórica**. 2011. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16072/1/SeverinoCG_DISSERT.pdf. Acesso em: 27 out. 2022.

JACINTO, Hélia. O GeoGebra na Resolução de Problemas: diferentes abordagens e suas potencialidades. **Tecnologias na Educação Matemática**, p. 60-63, 2014.

LEMKE, Raiane; SIPLE, Ivanete Zuchi; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. OAs PARA O ENSINO DE CÁLCULO: POTENCIALIDADES DE TECNOLOGIAS 3D. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, 2016. DOI: 10.22456/1679-1916.67355. Disponível em: https://www.seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/67355. Acesso em: 27 fev. 2023.

MACHADO, Luiza Lucia Mendes da Costa. **O Princípio de Cavalieri e suas aplicações**: áreas e volumes. 2021. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal Espírito Santo, Vitória, 2021. Disponível em: https://sappg.ufes.br/tese_drupal/tese_15388_Disserta%E7%E3o_Luiza_Lucia_%28Revisada%29.pdf. Acesso em: 25 ago. 2022.

MORAIS, Rosilda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. *In:* ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 1-214.

MOREIRA, Marco Antonio. Abandono da narrativa, ensino centrado no aluno e aprender a aprender criticamente. **Ensino, Saúde e Ambiente**, v. 4, n. 1, p. 2-17, abr. 2011. Disponível em: https://periodicos.uff.br/ensinosaudeambiente/article/view/21094/12568. Acesso em: 11 nov. 2022.

NCTM, National Council Of Teachers Of Mathmatics. **Principles and Standards for School Mathmatics**. Reston: Nctm, 2000.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 13 set. 2021.

POSSAMAI, Janaína Poffo; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Elaboração/ Formulação/ Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 6, n. 12, p. 1-28, 22 fev. 2022. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/4726. Acesso em: 28 fev. 2022.

RAMÍREZ, Miguel Cruz. A Mathematical Problem – Formulating Strategy. **International Journal For Mathematics Teaching And Learning**. p. 79-90. 7 dez. 2006. Disponível em: https://www.cimt.org.uk/journal/ramirez.pdf. Acesso em: 19 dez. 2022.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão reflections on use of material in school teaching of mathematics manipulable. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, 13 dez. 2012. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p187.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

**Recebido em: 20 de dezembro de 2022**
**Aprovado em: 20 de fevereiro de 2023**