UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

AMANDA ZANELATO COLAÇO

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE VOLUMES

JOINVILLE
2023

AMANDA ZANELATO COLAÇO

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE VOLUMES

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profª. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Profª. Eliane Bihuna de Azevedo

JOINVILLE

2023

AMANDA ZANELATO COLAÇO

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:
SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE VOLUMES

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.
Orientadora: Profª. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo
Coorientadora: Profª. Dra. Eliane Bihuna de Azevedo

BANCA EXAMINADORA

Dra. Elisandra Bar de Figueiredo

Universidade do Estado de Santa Catarina

Membros:

Dra. Ivanete Zuchi Siple

Universidade do Estado de Santa Catarina

Dra. Norma Suely Gomes Allevato

Universidade Cruzeiro do Sul

Joinville, 30 de junho de 2023.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo dom da vida e por me conceder saúde, sabedoria e determinação para elaborar este trabalho, e principalmente, para realizar esta graduação.

Aos meus pais por todo amor, carinho e incentivo em todos os momentos, e por me ensinarem a viver a vida com dignidade e batalhar pelos meus sonhos com honestidade.

Aos meus colegas pelo apoio, companheirismo e momentos de descontração durante o curso, que fizeram dessa jornada um momento memorável.

À professora Elisandra, minha orientadora, e à professora Eliane, minha coorientadora, por todos os ensinamentos, aprendizados e contribuições para este trabalho e para minha formação profissional.

A todos que me apoiaram e contribuíram para minha formação.

“Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O Problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade se puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus meios, experimenta o sentimento da autoconfiança e gozará o triunfo da descoberta” (POLYA, 2006, p. 5).

RESUMO

Este trabalho apresenta sequências de atividades para o estudo de volumes pelo Princípio de Cavalieri mediado pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. As atividades propostas fazem uso de material concreto, produzido por impressão 3D e aplicativos dinâmicos no software GeoGebra. Para a elaboração das sequências, foram realizadas pesquisas referentes aos estudos já desenvolvidos acerca desses recursos e da metodologia adotada no trabalho e, por isso, a investigação caracteriza-se como qualitativa e de natureza exploratória. A primeira sequência foi aplicada em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática, e essa experiência possibilitou a identificação das potencialidades e limitações dos recursos adotados, e de que maneira esses recursos influenciaram os processos de ensino e aprendizagem de matemática. Os resultados revelaram a pouca experiência dos alunos em trabalhar com aproximações em problemas experimentais, evidenciando a necessidade de mais práticas semelhantes; mostraram a importância do estudo de volumes ser desenvolvido com apoio do material concreto e aplicativos dinâmicos; e tornou explícita a falta de reflexões dos alunos ao utilizar fórmulas matemáticas que eram necessárias para o reconhecimento do Princípio de Cavalieri. Os resultados também permitiram o aprimoramento das atividades da sequência aplicada e dos aplicativos dinâmicos propostos, dando origem as outras sequências apresentadas neste trabalho, as quais possibilitam o estudo do Princípio de Cavalieri em um sólido não usual, o anel de guardanapo, e a aplicação da sequência para estudantes da Educação Básica, além de professores em formação.

Palavras-chave: Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; Estudo de volumes; Material concreto; GeoGebra.

ABSTRACT

This paper presents sequences of activities for the study of volumes using Cavalieri's Principle, mediated by the Teaching-Learning-Assessment methodology in Mathematics through Problem Solving. The proposed activities use concrete materials produced through 3D printing and dynamic applications in the GeoGebra software. To develop these sequences, research was conducted on the studies already carried out regarding these resources and the methodology adopted in this work, thus characterizing the investigation as qualitative and exploratory in nature. The first sequence was applied in a class of Mathematics Education undergraduate students, and this experience allowed for the identification of the potentialities and limitations of the adopted resources, as well as how these resources influenced the processes of teaching and learning mathematics. The results revealed the students' limited experience in working with approximations in experimental problems, highlighting the need for more similar practices; they demonstrated the importance of studying volumes with the support of concrete materials and dynamic applications; and they made it evident that student's don't reflect enough when using mathematical equations, reflections that were necessary to recognize Cavalieri's Principle. The results also allowed for the improvement of the activities in the applied sequence and the proposed dynamic applications, giving rise to the other sequences presented in this paper, which enable the study of Cavalieri's Principle in an unusual solid, the napkin ring, and the application of the sequence to Basic Education students, as well as teachers in training.

Keywords: Teaching-Learning-Assessment Methodology in Mathematics Through Problem Solving; Study of Volumes; Concrete Material, GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EF	Ensino Fundamental
EM	Ensino Médio
FP	Formulação de Problemas
GDI	Geometria Dinâmica e Interativa
IC	Iniciação Científica
MEAAMaRP	Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
LEM I	Laboratório de Ensino de Matemática I
MMM	Movimento Matemática Moderna
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
RP	Resolução de Problemas
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TRCE	Tecnologias Régua, Compasso e Esquadro
UDESC	Universidade do Estado de Santa Catarina

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com a promulgação de leis educacionais no Brasil, após a Constituição Federativa do Brasil ser sancionada, em 1988, diversas medidas governamentais focadas na ampliação da rede educacional passaram a ser feitas, incluindo a elaboração de propostas curriculares (CALDATTO; PAVANELLO, 2015). Nesse contexto, estava inserido o abandono do ensino de geometria no país, que havia sido renunciado sob influência dos novos objetivos traçados pelo Movimento Matemática Moderna (MMM) no século XX, motivados pela corrida tecnológica.

Ainda que a constituição tenha auxiliado na mudança desse cenário, com o resgate da geometria no currículo, Caldatto e Pavanello (2015) citam que o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) mostrou resultados pouco positivos para o alcance dos objetivos educacionais traçados. Além disso, após a promulgação da lei 5692/71, que atribuía a decisão às escolas sobre programas pedagógicos, foi dada liberdade para que professores inseguros optassem por não lecionar geometria aos estudantes, ou então, quando optavam, faziam isso apenas próximo ao final do ano letivo (PAVANELLO, 1993), sem tempo suficiente para o aprendizado. Assim, eventualmente, o docente tornou-se responsável por escolher apresentar, ou não, conceitos e estratégias que facilitam a compreensão do conteúdo, principalmente para situações que podem ser complexas ou abstratas, como o cálculo de volumes de sólidos, por exemplo.

Além disso, por décadas, a educação baseia-se no modelo clássico de ensino, aceito sem questionamentos por professores, alunos e pela sociedade, em que o docente ensina narrando o que supõe que os estudantes devam saber, e mais tarde, memorizar para reproduzir em avaliações (MOREIRA, 2011). Essas características e outras discussões sobre o ensino e aprendizagem de Matemática também começaram a ser questionadas na Educação Matemática, sendo por um lado, reflexo dos “entraves de muitos alunos com a aprendizagem em Matemática e, por outro, na formação do professor, pois os conteúdos matemáticos devem ser bem compreendidos para que possam ser bem ensinados” (GOMES, 2011, p. 10). Ensinar bem refere-se também ao docente utilizar alternativas no ensino, que viabilizem a participação ativa do aluno na construção da sua aprendizagem.

Nesse sentido, alternativas que valorizam esse aspecto têm sido mencionadas em documentos no Brasil e em outros países. Documentos curriculares nacionais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), valorizam a Resolução de Problemas (RP) como uma estratégia atual para a aprendizagem matemática (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021). E ainda, propõe a Formulação de Problemas (FP) como uma alternativa a ser adotada em sala de aula, colocando o aluno como o formulador de problemas matemáticos, e não somente o professor (POSSAMAI; ALLEVATO, 2022).

Essas duas práticas são mencionadas com frequência na área do conhecimento de Matemática da BNCC. Para o Ensino Fundamental (EF), indica-se que o desenvolvimento do letramento matemático precisa estar associado às competências e habilidades que contribuam para a formulação e resolução de problemas em diferentes contextos (BRASIL, 2018). Para a fase subsequente, o Ensino Médio (EM), o documento recomenda que é preciso incentivar "processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2018, p. 529).

Além disso, a BNCC também considera como uma das habilidades a serem desenvolvidas no EM "investigar processos de obtenção da medida de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o Princípio de Cavalieri, para obtenção das fórmulas de cálculo da medida dessas figuras" (BRASIL, 2018, p. 541). Isto é, prevê a necessidade do discente aprender geometria e valoriza o estudo do Princípio de Cavalieri como uma ferramenta potencial nessa área para o cálculo de volumes.

Até porque, o volume de sólidos, apesar de muitas vezes não ser percebido explicitamente, faz parte de atividades básicas do cotidiano quando compramos ou medimos produtos, por exemplo. Entender o cálculo do volume é um domínio básico matemático, e o Princípio de Cavalieri constitui-se em uma opção que possibilita a interpretação de volumes entre sólidos de diferentes formatos e com mesmo volume a partir da comparação de suas alturas e áreas de seções. Essa ferramenta é também capaz de demonstrar a dedução da fórmula dos volumes dos sólidos, o que esclarece ao aluno o seu surgimento e como obtê-la, sem a necessidade de decorá-la.

Sendo assim, o ensino de geometria através do Princípio de Cavalieri e o uso da Resolução de Problemas como metodologia no ensino de matemática foram os estímulos propulsores para a elaboração do presente trabalho.

Diante disso, este trabalho apresenta sequências de atividades para o estudo de volumes pelo Princípio de Cavalieri mediado pela metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

(MEAAMaRP). Os recursos escolhidos para utilização nas atividades foram o material concreto, produzido por impressão 3D, e aplicativos dinâmicos no software GeoGebra.

Considerando a temática da pesquisa, faz-se necessário conhecer por meio de fontes bibliográficas os estudos já desenvolvidos sobre o assunto (GIL, 2022). Isso permite ao investigador identificar e entender perspectivas, potencialidades e limitações dos recursos didáticos vinculados à pesquisa, e suas consequências no ensino de matemática.

Com o objetivo de avaliar a sequência proposta, foi feita a aplicação numa turma do curso de Licenciatura em Matemática e para essa investigação, aplicação e análise dos resultados foi escolhida a abordagem qualitativa. Deste modo, a fonte de dados é o ambiente natural, em que o investigador analisa os dados descritivos recolhidos em toda sua riqueza, respeitando a forma como estes foram registrados, valorizando também o processo, e não somente o produto final (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Os dados para a pesquisa foram recolhidos por meio de registros escritos, áudios, vídeos, observações e questionários.

O presente trabalho está organizado em oito capítulos. O Capítulo 1 refere-se a esta introdução, que apresenta a problemática e o objetivo do trabalho, o tipo de pesquisa, os aspectos metodológicos e a estrutura do trabalho.

No Capítulo 2 será apresentado sobre a resolução e a formulação de problemas no ensino de matemática, considerando os contextos históricos que influenciaram a perspectiva que tais práticas possuem atualmente no Brasil.

No Capítulo 3 será descrito o estudo da geometria espacial por meio do Princípio de Cavalieri, fundamentado nas concepções dos documentos educacionais brasileiros. Também, serão apresentados os trabalhos produzidos por Bonaventura Cavalieri, incluindo o Princípio de Cavalieri e, posteriormente, os resultados sobre volumes de alguns sólidos usuais e, em destaque, do anel de guardanapo, em que se faz uso do resultado matemático proposto por Cavalieri.

No Capítulo 4 serão abordados o material concreto e o software GeoGebra, que são os recursos vinculados às sequências de atividades deste trabalho. Além disso, será abordada a Impressão 3D, que apresenta-se como uma alternativa para a produção de materiais concretos para as aulas de matemática.

No Capítulo 5 será feita a descrição do estudo registrado no presente trabalho, focando nos aspectos metodológicos, no percurso e contexto em que esteve envolvida a elaboração das sequências, e na apresentação das sequências de atividades propostas.

No Capítulo 6 será realizado o relato da aplicação de primeira sequência de atividades, que por sua vez, esteve vinculado a um projeto de pesquisa, sendo abordado o contexto em que essa aplicação foi realizada e a análise das atividades desenvolvidas. Além disso, serão apresentados e analisados os dados recolhidos a partir de um questionário respondido pelos participantes a respeito da experiência desenvolvida.

Como resultado disso, no Capítulo 7 serão apresentadas a segunda e a terceira sequências de atividades, que tratam-se de versões aprimoradas da sequência aplicada e relatada no capítulo anterior. Além disso, em particular, a segunda sequência propõe o estudo de um sólido não usual, o anel de guardanapo; e a terceira sequência tem público-alvo de aplicação o Ensino Médio. Ambas as sequências foram desenvolvidas especialmente para este trabalho.

Por fim, no último capítulo serão feitas as considerações finais desse trabalho, em relação às sequências de atividades propostas, os resultados obtidos a partir da aplicação de uma das sequências, e também sobre as potencialidades e limitações dos recursos envolvidos.

2 RESOLUÇÃO E FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentarei o conceito de problema no campo da matemática, e a utilização dessa ferramenta matemática na formulação e resolução de problemas como abordagem metodológica.

2.1 UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA

Quando se desperta interesse em solucionar uma dificuldade ou dúvida pode-se dizer que houve a identificação de um problema. Esse último, por sua vez, desencadeia uma investigação reflexiva e coloca o sujeito envolvido nela em uma posição suscetível de problematização (HILBERT et al., 1996, p. 6), isto é, desafia seus pensamentos para encontrar compreensão.

Na perspectiva de Onuchic e Allevato (2011, p. 9), um problema é definido como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer". Assim, há intenção do sujeito confrontar suas concepções e construir conceitos por si próprio através da elaboração de justificativas, dando sentido ao que faz.

A partir dessas concepções, torna-se notório como a definição de problemas tem relação direta com uma perspectiva educacional, sobretudo no ensino de matemática.

Nesse contexto, Van de Walle (2009) define um problema como uma tarefa ou atividade qualquer em que o sujeito não possui uma regra pré-estabelecida ou memorizada, assim como não conhece nenhum método único que possa ser o "certo" para a solução. Por isso, para Van de Walle (2009), a aplicação dos problemas em sala de aula deve ser empregue não para aplicar matemática, mas para aprender a nova matemática. E para que isso se concretize, a atividade precisa ser elaborada partindo do pressuposto de que as novas compreensões desejadas estejam embutidas no problema. Quando a tarefa assim é preparada, o desenvolvimento do pensamento reflexivo e da autonomia dos alunos tornam-se consequências imediatas.

Aliás, Allevato e Onuchic (2021) também defendem essa concepção, ressaltando a necessidade do professor não prescrever aos estudantes regras específicas de solução, pois se assim ocorrer, este não será, para o resolvedor, um problema.

Portanto, um problema destinado a aprendizagem matemática, precisa levar em conta três características (VAN DE WALLE, 2009). A primeira refere-se à valorização do saber do aluno, pois assim este será capaz de ter ideias e traçar raciocínios apropriados, mantendo interesse e se sentindo desafiado. A segunda direciona a atenção para a inserção do saber matemático que os alunos vão aprender no problema, de tal forma que seja dado significado à matemática envolvida. Isto significa que, apesar de ser interessante contextualizar o problema para torná-lo menos abstrato, é necessário cautela e foco para mantê-lo de acordo com o objetivo de aprendizagem matemática desejado. E por último, a terceira característica busca requerer que a aprendizagem matemática tenha uso de justificativas e argumentos, mostrando ao aluno que a determinação de uma solução estar ou não correta é de responsabilidade dele próprio, e precisa ser parte integrante nas resoluções.

Esses são aspectos capazes de ajudar os discentes a fazer matemática, uma vez que os estimula a falarem mais, compartilharem suas ideias, darem sugestões e desafiar ou defender soluções de seus colegas (VAN DE WALLE, 2009).

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Uma possibilidade para trabalhar conteúdos matemáticos com o uso de problemas é a RP, a qual consiste em uma atividade comum na vida cotidiana que remonta à história da civilização (MORAIS; ONUCHIC, 2021), mantendo-se presente, de forma explícita, no âmbito profissional e acadêmico, principalmente.

Nesse sentido, existe uma perspectiva da RP como uma abordagem metodológica, na qual, segundo Morais e Onuchic (2021), trata-se de um movimento originário da primeira metade do século XX, motivado pelas mudanças sociais que exigiam pessoas mais preparadas e com conhecimentos mínimos necessários bem compreendidos. Em meio a isso, e com a crença de que a aprendizagem matemática não contemplava a maior parte dos alunos nas escolas, a RP se apresentou como mais uma opção, entre outras possibilidades de abordagens de ensino, para solucionar a situação.

No início do século XX, um estudo conjunto de teorias pedagógicas e psicológicas já tinham se intensificado na busca por compreender a complexidade da aprendizagem, sobretudo, em uma sala de aula. Como resultado disso, novas configurações nos currículos escolares se estabeleceram e começaram a valorizar a RP para a aprendizagem. Esse é o caso da ideia defendida por Thorndike, em meados de 1921, escrita no seu livro Os novos métodos na Aritmética[1] que foi publicado no Brasil em 1936, em que “os

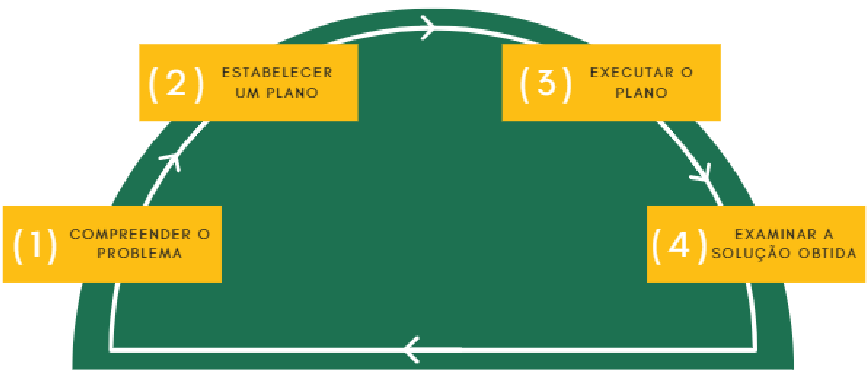
[1] THORNDIKE, Edward Lee. **The new methods in Arithmetic**. Rand McNally & Company, 1921. 260 p. Disponível em: https://bit.ly/3tOnBHi. Acesso em: 23 mar. 2023.

problemas deveriam ser pensados de modo que as perguntas feitas não tivessem respostas sem sentido para a vida real" (MORAIS; ONUCHIC, 2021, p. 22). Ainda, como observado por essas autoras, Thorndike baseava-se no processo de ensino conexionista de aprendizagem, em que os professores davam à criança a forma de solução que deveria ser encontrada, abstendo-se de se atentar ao nível de conhecimento do estudante antes de apresentar uma nova atividade.

Embora Thorndike tenha contribuído com essas e outras ideias, valorizando o sentido dos problemas na vida real e enriquecendo a pesquisa na área, George Polya é o grande precursor da RP.

A pesquisa de Polya se desenvolveu, principalmente, nos Estados Unidos, quando se tornou professor na Universidade de Stanford, e tomou dimensão internacional a partir de palestras e publicações de artigos. Para Onuchic e Allevato (2011, p. 6), em seus trabalhos, Polya "preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas". Essa atenção pode ser observada na sua principal obra, o livro A arte de resolver problemas[2], que apresenta uma sequência de quatro fases que um resolvedor de problemas executa ao resolver um problema (Figura 1), e também propõe problemas direcionados para explicar e discutir cada uma das fases. Além de defender essa ideia, Polya argumentava a necessidade dos professores se tornarem bons resolvedores de problemas, uma vez que estariam mais interessados em tornar seus alunos bons resolvedores também (MORAIS; ONUCHIC, 2021).

Figura 1 – Fases da RP de Polya



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

[2] POLYA, George. **How to Solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

Em 1975, com base em pesquisas em RP e sobretudo, na teoria de Polya, uma massa crítica de pesquisadores engajados no estudo da RP reuniram-se num primeiro grande evento da área, o primeiro Seminário de Pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática (MORAIS; ONUCHIC, 2021). Com isso, diversas pesquisas elaboradas por esse grupo passaram a ser fonte para muitos professores, como forma de buscar fundamentos para trabalhar a RP em sala de aula. Entre esses trabalhos, se destacam os de autoria do Conselho Nacional de Professores de Matemática (*National Council of Teachers of Mathematics - NCTM*), como o que foi publicado em 1980, nos Estados Unidos, chamado A Resolução de Problemas na Matemática Escolar[3] (*Problem Solving in School Mathematics*) (MORAIS; ONUCHIC, 2021), e também em 1989, denominado Padrões Curriculares e de avaliação em matemática escolar[4] (*Curriculum and evaluation standards for school of mathmatics*). Segundo Van de Walle (2009), essas e outras publicações do NCTM marcaram profundamente a matemática escolar, dando início ao movimento de Reforma Matemática que permanece até hoje. Desde então, a RP é declarada pelo NCTM como um veículo poderoso de aprendizagem, pelo qual as crianças desenvolverão suas próprias ideias matemáticas. Isto é,

> A resolução de problemas significa engajar-se em uma tarefa na qual o método de solução ainda não é conhecido. Para encontrar a solução, os alunos devem buscar seus conhecimentos, e por meio desses, desenvolver uma nova compreensão matemática. Resolver problemas não é apenas uma meta de aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la. (NCTM, 2000, p.52, tradução nossa).

Para entender como incluir essa importante estratégia de ensino na sala de aula, os docentes precisam compreender e distinguir com clareza as três abordagens de ensino de Resolução de Problemas, elencadas por Larry L. Hatfield em 1978: ensinando sobre resolução de problemas, ensinando para resolver problemas, e ensinando via resolução de problemas (SCHROEDER; LESTER JR, 1989). Na primeira abordagem, o trabalho tem como base a teoria de RP proposta por George Polya, e também o ensino de estratégias que devem ser escolhidas e utilizadas pelo próprio aluno ao resolver um problema, como procurar por padrões, por exemplo. No segundo caso, o ensino para resolver problemas

---

[3] KRULIK, Stephen; REYS, Robert (Orgs). **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. 1980. Título em inglês: *Problem Solving in School Mathematics*. Tradução de Hygino Hugueros Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997, 360 p.

[4] NCTM, National Council Of Teachers Of Mathematics. **Curriculum and evaluation standards for school of mathmatics).** Reston: Nctm, 1989.

indica que o professor deve se concentrar nas formas como a matemática pode ser aplicada em problemas cotidianos (ou não). Assim, “embora a aquisição de conhecimento matemático tenha uma importância primeira, o maior propósito da aprendizagem de matemática é ser capaz de utilizá-la” (MORAIS; ONUCHIC, 2021, p. 32). E por último, no ensino via resolução de problemas, de acordo com Schroeder e Lester (1989), os problemas têm dois principais objetivos, o de se aprender matemática e o de se fazer matemática. Essa meta é alcançada por meio de situações-problema propostas que incorporam questões chaves, desenvolvendo técnicas de solução, para assim tornar problemas não rotineiros em rotineiros. Aliás, essa última abordagem é a que possui propósitos mais alinhados às recomendações da NCTM.

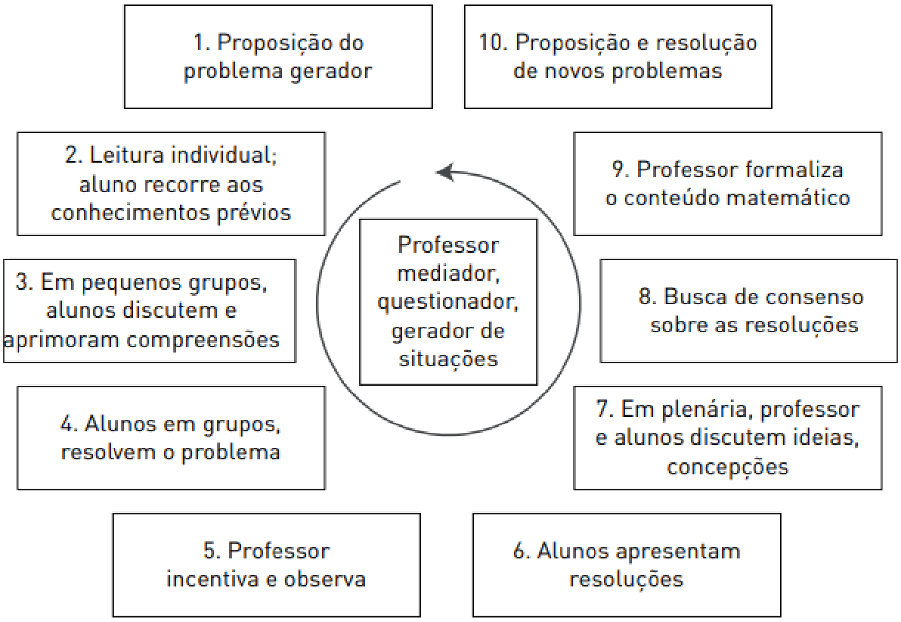
No Brasil, desde 1992, a RP tem sido tema de interesse para o grupo GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, que desenvolve suas ações na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP em Rio Claro/SP. O grupo realiza atividades “de aperfeiçoamento, de investigação e de produção científica na linha de Resolução de Problemas associada à Formação de Professores e/ou ao Ensino e Aprendizagem” (ONUCHIC et al., 2021, p. 11). Além disso, tem como foco ampliar os estudos associados ao cotidiano escolar, de todos os níveis de escolaridade, sob a perspectiva tanto do docente quanto do discente. Essa linha de estudo visa considerar, principalmente, questões de ensino, aprendizagem e avaliação de forma integrada, uma vez que o grupo se dedica a nomeada MEAAMaRP, que entende a RP como uma abordagem metodológica. Inclusive, essa metodologia está vinculada, entre as três abordagens propostas por Schroeder e Lester (1989), à concepção de ensino via resolução de problemas, que pelos trabalhos do NCTM (2000) se consolidou como ensino através da RP[5]. Ademais, o grupo GPEAEM – Grupo de Pesquisas e Estudos Avançados em Educação Matemática, da Universidade Cruzeiro do Sul de São Paulo, que é coordenado pela professora Norma Suely Gomes Allevato, também tem desenvolvido importantes pesquisas no campo da RP.

A palavra composta inicial que nomeia a metodologia (ensino-aprendizagem-avaliação) tem como finalidade apresentar a perspectiva em que “o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 47). A MEAAMaRP é composta por um roteiro de

[5] Tradução literal de Teaching throught problem solving.

dez etapas, tendo como ponto de partida um problema gerador selecionado ou elaborado pelo professor. Esse é assim denominado porque visa "à construção de um novo conteúdo, conceito princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 49).

Figura 2 – Roteiro da MEAAMaRP



Fonte: Allevato e Onuchic (2021).

Segundo Allevato e Onuchic (2021), a primeira etapa trata-se da proposição do problema gerador aos estudantes, ou proposto pelos próprios estudantes. Após a entrega desse de forma impressa, na segunda etapa, os alunos devem lê-lo individualmente, considerando a compreensão da linguagem matemática do problema e busca por sua solução através dos conhecimentos prévios. Em seguida, o docente deve organizar a turma em grupos para que os alunos possam conversar sobre suas perspectivas, discutir ideias e compreensões, constituindo o terceiro momento do roteiro. Posteriormente, ao entrar em consenso, os grupos devem organizar suas soluções de forma que, sem perceber, comecem a construir o conhecimento sobre o conteúdo planejado. Nesse momento, diversas formas de expressar a solução podem ser adotadas, como a linguagem corrente, desenhos, tabelas ou a própria linguagem matemática. Enquanto isso ocorre, como quinta etapa, o professor deve atuar como mediador, incentivando os alunos a utilizarem seus conhecimentos e promovendo discussões, sem fornecer respostas prontas.

Na sexta etapa, o docente deve solicitar que representantes dos grupos façam

> o registro de suas soluções na lousa (certas, erradas ou feitas por diferentes processos). Diante desse 'painel' de soluções, o professor estimula os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compararem e discutirem diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) na resolução. Em sessão plenária, ou seja, em um esforço conjunto, professor e alunos tentam chegar a um consenso sobre o resultado correto. Esse é um momento em que ocorre grande aperfeiçoamento da leitura e da escrita matemáticas e relevante construção de conhecimento acerca do conteúdo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 49).

Segundo essas autoras, após a sétima e oitava etapa, a seguinte trata-se da formalização do conteúdo. Nesse momento, o professor deverá registrar o conteúdo formalmente na lousa, por exemplo, fazendo uso da linguagem matemática para identificar e explicar conceitos e procedimentos através de técnicas e demonstrações, se necessário. Por fim, a última etapa oportuniza que o aluno resolva outros problemas ou ele próprio elabore novos problemas com base no que vivenciou nas etapas anteriores do roteiro. Nesse sentido, entre as formas de implementar a proposição de problemas nessa etapa, convém ressaltar que "a resolução dos problemas criados e apresentados pelos estudantes seja, também, realizada, com a troca dos problemas entre os estudantes ou com a discussão em plenária com a turma" (ALLEVATO; POSSAMAI, p. 160). Isso porque, segundo Silver (1994), os estudantes sentem-se mais engajados quando sabem que irão compartilhar seus problemas com os colegas, impactando diretamente na qualidade dos problemas propostos.

Ao experienciar a MEAAMaRP, o aluno pode ampliar sua compreensão e habilidade de conteúdos matemáticos básicos, e consegue demonstrar a sua percepção sobre os problemas por meio das estratégias adotadas, que são resultado de sua experiência matemática.

Em um contexto nacional, nos documentos curriculares vigentes, como a BNCC e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a RP é apresentada como uma estratégia atual de aprendizagem, e que, portanto, deve ser considerada pelos docentes ao elaborar e lecionar suas aulas.

Para o EF, a BNCC propõe o desenvolvimento do letramento matemático, associado a competências e habilidades matemáticas que favorecem a elaboração de conjecturas e resolução de problemas em diferentes contextos (BRASIL, 2018). Nesse caso, o documento cita a RP, a investigação e a modelagem como atividades matemáticas privilegiadas, uma vez que também são práticas de aprendizagem adotadas ao longo de todo o EF.

Por outro lado, no EM, o documento indica que essa prática, eventualmente, poderá exigir variados processos cognitivos, visto que

> há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação (BRASIL, 2018, p. 535).

Além disso, há problemas que os discentes precisam utilizar seus conhecimentos prévios com a identificação de conceitos para conseguir estabelecer estratégias de solução, até porque, muitas vezes, existe a necessidade de construir um modelo para encontrar as respostas desejadas (BRASIL, 2018). Desse modo, o estudante precisa ter autonomia para organizar suas ideias e construir seu raciocínio de acordo com as condições fornecidas.

Também organizado pelos níveis de escolaridade como a BNCC, os PCN de Matemática, embora em processo de substituição pela BNCC, traz orientações que consideramos, ainda hoje, válidas e relevantes acerca da RP e da aprendizagem matemática. O documento visa incentivar uma procura compartilhada de soluções para o ensino nessa disciplina, de tal modo que tornem-se ações que proporcionem a aprendizagem de conhecimentos matemáticos acessíveis a todos (BRASIL, 1998). Os parâmetros propostos no documento foram elaborados considerando as diversidades de âmbito regional, cultural e político, para que assim as crianças e jovens possam acessar conhecimentos socialmente necessários para o exercício de cidadania.

Nesse sentido, o documento organiza e discute em um capítulo a RP e o ensino-aprendizagem na disciplina de Matemática. De imediato, há oposição ao acúmulo de informações e reprodução automática de procedimentos, uma vez que os alunos aprendem de forma mais significativa através de situações-problema desafiadoras, que exigem o desenvolvimento de estratégias de solução. Contudo, isso não ocorre tradicionalmente no cotidiano escolar, pois os problemas têm sido utilizados apenas como uma forma de aplicação de conhecimentos que já foram obtidos antes pelos discentes (BRASIL, 1998).

Porém, a RP tem muito mais potencial, se comparada ao que apenas está sendo empregue atualmente. Nesse sentido, Brasil (1998) indica que a RP pode possibilitar que os alunos desenvolvam a autonomia a partir do gerenciamento de informações, e assim consigam ampliar conhecimentos, habilidades e perspectivas quando encontram um problema na matemática e no cotidiano, principalmente. Vale ressaltar, como também descrito em Brasil (1998, p. 40), que "a própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática". Sendo assim, a RP mostra-se como uma estratégia viável e poderosa para inserir contextos comuns no dia-a-dia associados à matemática.

Assim, para concretização da aprendizagem através dessa prática, os PCN indicam que para resolver um problema o aluno precisa elaborar procedimentos de resolução, comparar resultados e também validar seus procedimentos. E para além disso, precisa entender que "aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido" (BRASIL, 1998, p. 41). Isto é, é preciso saber justificar os resultados, testando-os e comparando-os com diferentes caminhos de solução, com a valorização do processo, e não apenas do produto final.

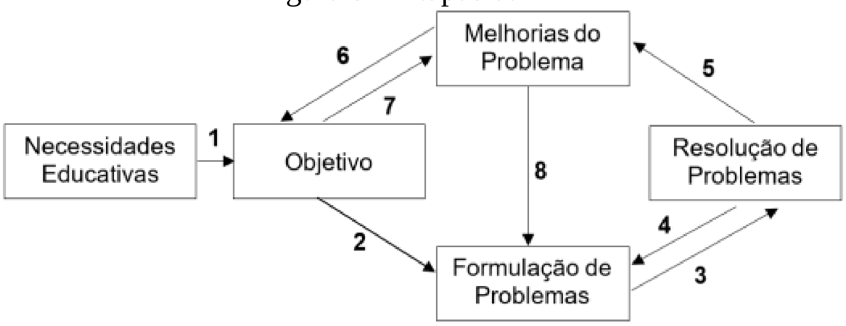
2.3 FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS

A Formulação de Problemas (FP) pelos estudantes é outra possibilidade que tem sido valorizada no contexto do ensino de matemática. Para Silver (1994, p. 19, tradução nossa), a FP "refere-se tanto à criação de novos problemas como também à reformulação de problemas já existentes. Assim, pode ocorrer antes, durante ou depois da solução de um problema", potencializando a capacidade de investigação, análise e reflexão por meio do estímulo criativo e crítico (ALTOÉ; FREITAS, 2016).

Além disso, na perspectiva de Boavida et al. (2008), essa prática é capaz de contribuir em dois sentidos: no aprofundamento dos conceitos matemáticos e na compreensão dos procedimentos percorridos durante a resolução. Através disso, torna-se mais explícita a estrutura do problema, estimulando a articulação do pensamento crítico, da capacidade de raciocinar e, sobretudo, da habilidade de exprimir ideias de forma organizada e mais precisa (BOAVIDA et al., 2008). Assim, como descrito por Duarte e Allevato (2020, p. 4), o estudante passa a vivenciar "o controle sobre o texto e sobre as ideias matemáticas nele envolvidas".

Por meio das definições acima, torna-se evidente que a FP é uma atividade associada à RP, afinal, como observado por Spinillo et al. (2017), quando formula um problema, o aluno realiza ações intelectuais e procedimentos característicos do processo de resolução. Consequentemente, precisa ter em vista a solução do problema, o que inclui conhecer as estratégias e conceitos envolvidos para obtê-la. Considerando isso, para Ramírez (2006), a prática de formular problemas abrange três procedimentos fundamentais: formular, resolver e melhorar (Figura 3). Inicia-se na etapa de Formulação de Problemas, na qual é feita a estruturação do problema matemático junto aos dados numéricos necessários. Em seguida, tem-se a Resolução do Problema, em que o discente efetivamente resolverá o problema que elaborou, e às vezes, precisará retornar a etapa anterior para o aprimoramento desse. Na etapa seguinte, de Melhorias do Problema, o objetivo será analisar o problema formulado, de modo a considerar correções, grau de complexidade e melhorias, bem como sua adequação ao objetivo traçado. Caso esse último não ocorra, é possível recomeçar na etapa de Formulação de Problemas, excluindo o que foi feito anteriormente, ou retornar a etapa de Melhorias do Problema.

Figura 3 – Etapas da FP



Fonte: Duarte e Allevato (2020)[6]

Com o reconhecimento da importância inquestionável da FP no aprendizado de conteúdos matemáticos, a BNCC e os PCN passaram a mencioná-la com frequência.

Em uma das competências gerais da Educação Básica, a BNCC menciona a necessidade de se exercitar a curiosidade intelectual do estudante e o uso das abordagens próprias das ciências estudadas por meio da investigação de causas, testes de hipóteses, da formulação e da resolução de problemas (BRASIL, 2018). E ainda, para a área de matemática e suas tecnologias, no contexto do desenvolvimento do pensamento

[6] Versão traduzida do esquema elaborado por Ramírez (2006).

geométrico do aluno, o documento prevê a necessidade da FP e a RP serem estimuladas em diferentes contextos, com ênfase nos conceitos de congruência e semelhança.

Logo, de modo geral, Brasil (2018) destaca que essa área tem a responsabilidade de aproveitar o potencial desenvolvido pelos estudantes ao longo do EF, com a intenção de ampliar o letramento matemático. Além disso, destaca o estímulo aos

> processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (BRASIL, 2018, p. 529).

Já os PCN, relativos ao terceiro e quarto ciclo do EF, também já se referiam à FP em um ambiente de ensino de matemática que não seja sustentado pela reprodução mecânica e automática dos métodos de solução. Nesse caso, é enfatizado que o aluno torne-se questionador de suas próprias respostas, pois assim, inevitavelmente, passará a utilizá-las como fonte para formular novos problemas, que nem sempre serão respondidos com soluções únicas (BRASIL, 1998). Esse processo, estimula, de forma não compulsória, o teste de conjecturas e a análise de diferentes situações encontradas quando dados são alterados.

Desse modo, a FP apresenta-se como um avanço qualitativo no que se refere a uma nova relação entre o estudante e a matemática, uma vez que "através dela o aluno irá familiarizar-se com as características de um problema matemático e as compreenderá melhor" (MEDEIROS; SANTOS, 2009, p. 7, tradução nossa). Além de que, esse processo de formular problemas necessita de uma reflexão sobre os conceitos envolvidos, e sobretudo, sua compreensão inclui a capacidade de comunicá-lo e expressá-lo (SPINILLO et al., 2017). Portanto, isso mostra que a FP pode ser utilizada para trabalhar diversos conteúdos matemáticos, desde os mais conceituais e numéricos até os que englobam a interpretação de tabelas e figuras, como a geometria espacial. Afinal, cada objeto matemático exige do aluno diferentes interpretações e representações matemáticas.

3 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL PELO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

No presente capítulo, apresentarei a situação do ensino de geometria espacial com base nas perspectivas de documentos educacionais brasileiros, salientando sua situação atual. Também, resgatarei por meio de dados históricos, as realizações do matemático Bonaventura Cavalieri, responsável por propor o Princípio de Cavalieri. Em seguida, apresentarei resultados sobre volumes de alguns sólidos a partir da definição do volume de um paralelepípedo reto retângulo e do Princípio de Cavalieri, ampliando assim a viabilidade de calcular volumes de outros sólidos, sem a necessidade de utilizar o Cálculo Integral.

3.1 O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Desde à sua origem na antiguidade, a geometria tem sido objeto de estudo para pesquisadores e filósofos, tendo como motivação principal as necessidades diárias vividas pelas civilizações, como as construções, movimentação de astros e a divisão de terras (MONTEIRO, 2015).

Atualmente, os PCN do EF vinculam a geometria a um campo fértil de estudos em sala de aula, uma vez que os estudantes apresentam interesse no assunto de forma natural, facilitando o desenvolvimento de um pensamento matemático focado em "compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1998, p. 51). Esse documento explica ainda que o trabalho com a geometria contempla a aprendizagem de números e medidas, a compreensão de diferenças e semelhanças, o aprimoramento das habilidades de percepção espacial. Nesse último caso, considera-se fundamental que "os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato" (BRASIL, 1998, p. 51), como forma de incentivo à integração entre diferentes áreas de conhecimento. Sem esquecer também que as atividades associadas a conteúdos geométricos, usualmente, promovem os primeiros contatos com o raciocínio dedutivo e a construção de argumentos.

De outro modo, no EM, os PCN propõe o ensino de geometria por meio de quatro unidades temáticas - geometrias plana, espacial, métrica e analítica - baseada em duas formas de pensar geometria: na identificação "de propriedades relativas a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas" (BRASIL, 1999, p.

123); e na quantificação de comprimentos, áreas e volumes. Para o EF, o documento propõe essa estruturação, pois entende que

> o ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares (BRASIL, 1998, p. 123).

Por outro lado, a BNCC prevê que o ensino dos conteúdos matemáticos no EM seja uma continuidade do EF, isto é, propõe que haja “consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental” (BRASIL, 2018, p. 527), de tal forma que ocorra a construção de uma visão integrada à realidade. Afinal, ainda segundo Brasil (2018), quando a realidade se torna referência é necessário considerar os impactos da tecnologia na sociedade e implementar recursos digitais e aplicativos em sala de aula que possam impulsionar o pensamento computacional.

No EF, o documento normativo brasileiro descreve que a geometria envolve uma vasta quantidade de conceitos, procedimentos e estratégias essenciais para a resolução de problemas inerentes a vida real, e que, portanto, encontram-se em diferentes áreas de conhecimento (BRASIL, 2018). Desenvolver o pensamento geométrico significa ensinar o aluno a realizar investigações, estabelecer conjecturas e elaborar argumentos persuasivos no campo da geometria. Aliar esses aspectos ao aprendizado do aluno irá prepará-lo para compreender as três principais ideias matemáticas no campo da geometria, segundo Brasil (2018): a construção, representação e a interdependência.

Como alternativa para guiar a educação formal, os PCN e a BNCC fornecem uma perspectiva do ensino da geometria que a valoriza como saber e a utiliza como uma referência para associar os conteúdos escolares à realidade. Além disso, segundo Monteiro (2015), com documentos como os PCN apresentando várias propostas para a difusão da geometria, torna-se mais viável o fortalecimento e a valorização do ensino da geometria na educação brasileira. Isso porque, inicialmente, o ensino de geometria recebeu forte influência das transformações do século XX, que causaram modificações econômicas e sociais. Como resultado disso, o ensino de matemática passou a “preocuparse mais com o aumento de notas de testes do que com o ensino propriamente dito" (MONTEIRO, 2015, p. 19), sofrendo assim certa depreciação. Aliás, ainda de acordo com Monteiro (2015), até mesmo no Ensino Superior houve fortes resistências ao ensino de geometria, o que desencadeava em ainda mais dificuldades dos estudantes ao se deparar com problemas geométricos.

Diante disso, no que diz respeito ao ensino de geometria no Brasil, há necessidade de mais pesquisas e propostas pedagógicas viáveis e efetivas, que possam contribuir para o trabalho docente e a aprendizagem da geometria com reflexo nas situações encontradas pelos alunos na vida real.

Na próxima seção, falarei sobre o Princípio de Cavalieri. Uma alternativa que pode proporcionar o aprendizado de geometria de forma mais compreensível e menos abstrata, sem a necessidade de memorizar fórmulas e procedimentos.

3.2 O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Responsável por produzir obras no campo da matemática, óptica e astronomia, Bonaventura Cavalieri, nascido em Milão em 1598, tornou-se um matemático influente devido às significativas contribuições nessas áreas. Cavalieri era membro da ordem religiosa dos jesuados, e viveu por um período em Milão e Roma, passando a atuar mais tarde como professor de matemática em Bolonha, de 1629 até o ano de sua morte, em 1647 (EVES, 2011).

Instigado por questões da época em que viveu, "escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada — geometria, trigonometria, astronomia e óptica — e foi o primeiro autor italiano a apreciar o valor dos logaritmos" (BOYER, 2012, p. 233). Embora tenha publicado também as tabelas de senos, tangentes e secantes, Bonaventura Cavalieri é lembrado por seu trabalho com o estudo dos indivisíveis, motivado por ideias de grandes astrônomos.

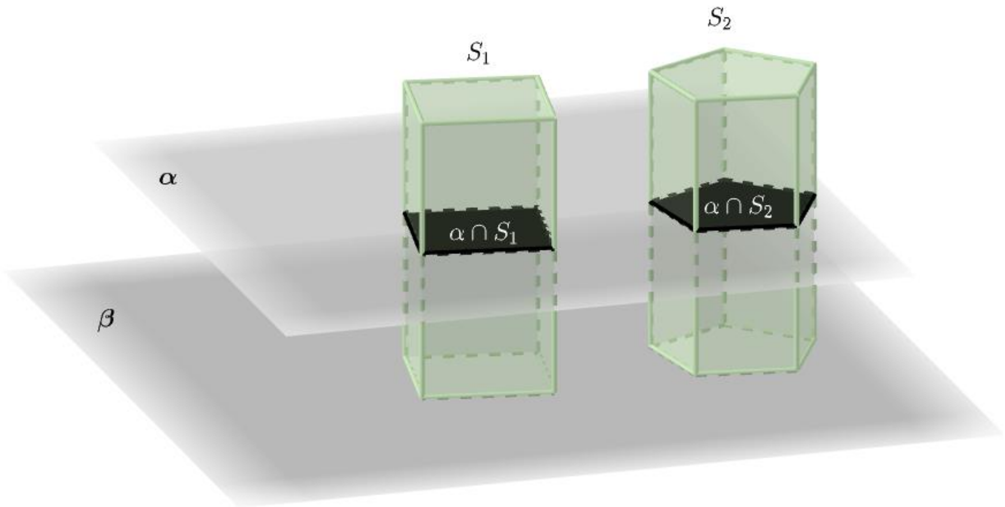
Isso porque, Cavalieri foi discípulo de Galileu Galilei (1564-1642), um astrônomo que observava os céus com seu telescópio e rolava bolas sobre planos inclinados (BOYER, 2012), sendo responsável por reflexões que ecoam na ciência até os dias de hoje. Assim, encorajado por Galileu e estimulado também pelas ideias de Johannes Kepler (1571-1630), Cavalieri organizou seus pensamentos sobre os infinitésimos em um livro, o grande legado de sua carreira, denominado *Geometria indivisibilibus*.

Esse trabalho apresenta o método dos indivisíveis que tem raízes nas ideias de Demócritos (410 a.C.) e Arquimedes (287-212 a.C.) (EVES, 2011), e sobretudo, utiliza o argumento defendido por Nicolau de Oresme (1323-1382 aprox.), Kepler e Galileu para encontrar determinadas áreas e volumes (BOYER, 2012). Esta parte do pressuposto de que "uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou 'indivisíveis' e que, de modo semelhante, volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis" (BOYER, 2012, p. 233).

Com base nisso e nas observações sobre geometria desenvolvidas, as conclusões de Cavalieri foram formalizadas nos chamados Princípios de Cavalieri para o cálculo de áreas e de volumes.

Para o cálculo de volumes, ilustrado na Figura 4, o princípio conceitua que se dois sólidos S_1 e S_2, ambos de mesma altura, tais que qualquer plano horizontal (α), e paralelo ao plano que intercepta a base dos sólidos (β), secciona S_1 e S_2 formando figuras planas com áreas iguais, então os volumes dos sólidos são iguais (MACHADO, 2021).

Figura 4 – O Princípio de Cavalieri para sólidos



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

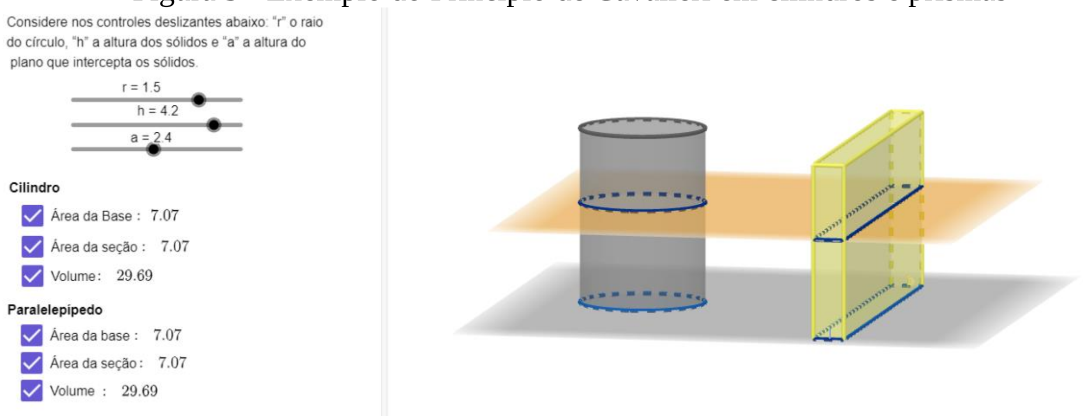
O Princípio de Cavalieri é tratado como um teorema que pode ser demonstrado por meio do Cálculo Integral moderno, contudo em geral é considerado um axioma. Inclusive, Pontes (2014) descreve que problemas matemáticos sobre áreas e volumes que necessitam do cálculo para suas soluções, têm a possibilidade de serem resolvidos por estudantes do EM graças à existência do Princípio de Cavalieri.

Entretanto, é válido enfatizar que o princípio possui limitações, pois os sólidos geométricos analisados precisam ter características específicas, sendo essas: igualdade entre as áreas das seções resultantes da interseção do plano α com os sólidos (no caso da Figura 4), igualdade entre as áreas das bases, e ainda, as alturas dos sólidos precisam ser iguais. Ou seja,

> para que o Princípio de Cavalieri seja aplicado, precisamos de um outro sólido, que possua as mesmas medidas de área para cada seção horizontal e possua a mesma altura que o sólido do qual desejamos calcular o volume. Há inúmeros sólidos existentes, mas encontrar um que possua tais características não é um trabalho fácil, principalmente no que se refere a corpos redondos (CUNHA, 2019, p. 68).

A Figura 5 apresenta a imagem de um aplicativo no GeoGebra em que o Princípio de Cavalieri é aplicado em um cilindro e em um paralelepípedo. Nesse caso, os dados numéricos à esquerda na figura, mostram que as áreas das bases e das seções são iguais entre si no cilindro, e no paralelepípedo. E o controle deslizante, chamado de h, que indica a altura de ambos os sólidos de forma simultânea, informa evidentemente que essa é mesma para ambos os sólidos. Essas características permitem concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que os sólidos possuem o mesmo volume. Inclusive, esse dado é informado numericamente na figura, por ser um recurso do GeoGebra 3D.

Figura 5 - Exemplo do Princípio de Cavalieri em cilindros e prismas



Fonte: Elaborado pela autora[7] (2022).

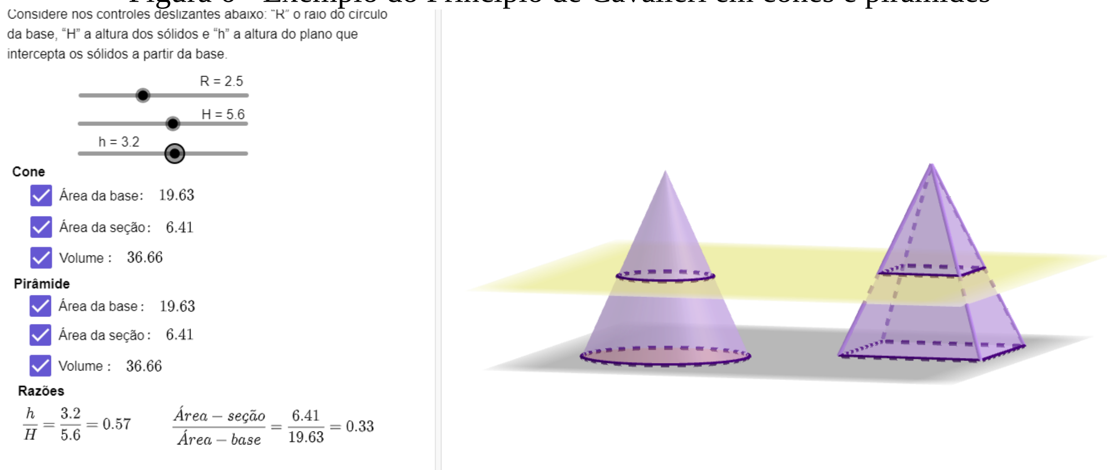
Sendo assim, tem-se, por definição de cilindros e prismas, que a figura plana ou seção horizontal, paralela a base do sólido, forma a mesma figura geométrica que a base

[7] Disponível em https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu

de cada um dos sólidos. Isso permite concluir que a seção e a base possuem a mesma área. Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, prismas e cilindros com a mesma área de base e mesma altura terão o mesmo volume.

Porém, isso não ocorre da mesma forma no caso de cones e pirâmides, uma vez que, apesar da seção horizontal e da base do sólido formarem a mesma figura geométrica, as dimensões entre elas são distintas, o que implica que suas áreas também são, conforme ilustra a Figura 6. Embora isso aconteça, como o cone e a pirâmide têm a mesma área de base e mesma altura pode-se provar, usando semelhança de triângulos, que têm a mesma área de seção quando seccionados por um plano na mesma altura, então pelo Princípio de Cavalieri, têm o mesmo volume.

Figura 6 - Exemplo do Princípio de Cavalieri em cones e pirâmides



Fonte: Elaborado pela autora[8] (2022).

Os sólidos geométricos utilizados nas exemplificações acima mostram que, apesar das particularidades de cada sólido, é viável utilizar o Princípio de Cavalieri para demonstrar a igualdade de volumes, desde que as três condições necessárias do princípio sejam atendidas. Além disso, a utilização dessa ferramenta pode ser ampliada para outros sólidos, como os estudados usualmente no Ensino Básico, ou para outros mais inusitados e complexos, como o anel de guardanapo, que será abordado na Seção 3.5.

3.2 CÁLCULO DE VOLUMES DE PRISMAS E CILINDROS

Intuitivamente, "o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada" (LIMA, 2009, p. 59). Para exprimir a grandeza volume de forma numérica é preciso

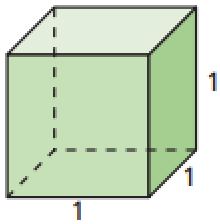
---
[8] Disponível em https://www.geogebra.org/m/u2bah2xj

compará-la com uma unidade. O resultado obtido por meio dessa comparação é chamado volume.

Por exemplo, é possível medir o volume de uma panela atribuindo como unidade uma xícara. Assim, ao encher a xícara com água e despejá-la sucessivas vezes na panela até que essa última fique completamente cheia, representa a realização de uma medida de volume (LIMA et al., 2006). Porém, essa ainda é uma ideia intuitiva, pois é útil apenas em casos mais simples, e não funciona efetivamente na prática, até porque "não permite considerar objetos muitos grandes (qual o volume da lua?) nem muito pequenos (qual o volume de um elétron?)" (LIMA, 2009, p. 59). Nota-se assim, que é necessário atribuir um significado mais preciso a essa ideia.

Segundo Lima (2009, p. 59), "costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento", denominado cubo unitário, ilustrado na Figura 7. Seu volume, por definição, é igual a 1 (LIMA, 2009, p.59). Logo, se a aresta do cubo medir 1 centímetro (cm), seu volume será 1 centímetro cúbico (cm^3); se sua aresta medir 1 metro (m), seu volume será 1 metro cúbico (m^3) (DOLCE; POMPEO, 2013). Assim, o volume de um sólido S corresponde a um número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Porém, essa ideia de conter um cubo unitário não é tão clara quando se considera sólidos que possuem formas irregulares.

Figura 7 - Cubo unitário

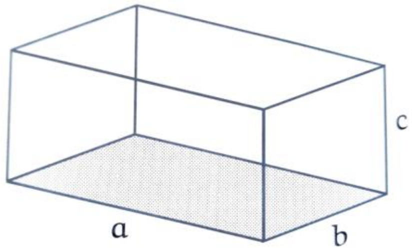


Fonte: Dolce e Pompeo (2013).

Diante disso, mostra-se necessário obter métodos sistemáticos e gerais para encontrar fórmulas que possam ser aplicadas tanto a objetos pequenos quanto a objetos grandes (LIMA, 2009).

Para isso, utiliza-se um paralelepípedo reto retângulo ou bloco retangular. Segundo Lima (2009) esse é um sólido formado por 6 retângulos, que fica perfeitamente determinado por três medidas (Figura 8): comprimento (a), largura (b) e altura (c). Seu volume será representado por $V(a, b, c)$.

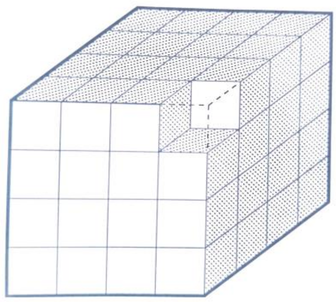
Figura 8 - Paralelepípedo reto retângulo



Fonte: Lima et al. (2006).

Isso significa que o cubo unitário é também um paralelepípedo reto retângulo cujo comprimento, largura e altura medem 1, isto é, seu volume é $V(1,1,1) = 1$ (LIMA et al., 2006). Assim, as seis faces de um cubo são quadrados iguais. Segundo Lima (2009), para o caso de um cubo não unitário cuja aresta mede n unidades de comprimento então esse pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos, de tal modo que seu volume é n^3. A Figura 9 ilustra para o caso de $n = 4$.

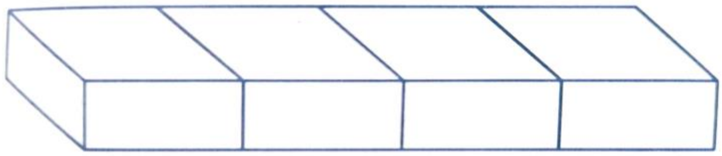
Figura 9 - Cubo de aresta 4 decomposto em 64 cubos unitários justapostos



Fonte: Lima (2009).

E ainda, quando "mantidas duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão" (LIMA et al., 2006, p. 253). Ou seja, de acordo com Lima et al. (2006), se mantivermos constante a largura e altura e multiplicarmos o comprimento por um número natural m, implica que o volume também ficará multiplicado por m, isto é, $V(m \cdot a, b, c) = m \cdot V(a, b, c)$. Por exemplo, a Figura 10 "mostra 4 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, colados em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 4 vezes maior que o volume de um deles" (LIMA et al., 2006, p. 253).

Figura 10 - Exemplo de quatro paralelepípedos retângulos justapostos



Fonte: Lima et al. (2006).

Assim, segundo Lima et al. (2006, p. 253), sendo a, b e c dimensões de um paralelepípedo qualquer, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
V(a,b,c) &= V(a \cdot 1, b, c) \\
&= a \cdot V(1,b,c) \\
&= a \cdot V(1, b \cdot 1, c) \\
&= a \cdot b \cdot V(1,1,c) \\
&= a \cdot b \cdot V(1,1,c \cdot 1) \\
&= a \cdot b \cdot c \cdot V(1,1,1) \\
&= a \cdot b \cdot c \cdot 1 \\
&= a \cdot b \cdot c = abc.
\end{aligned}
$$

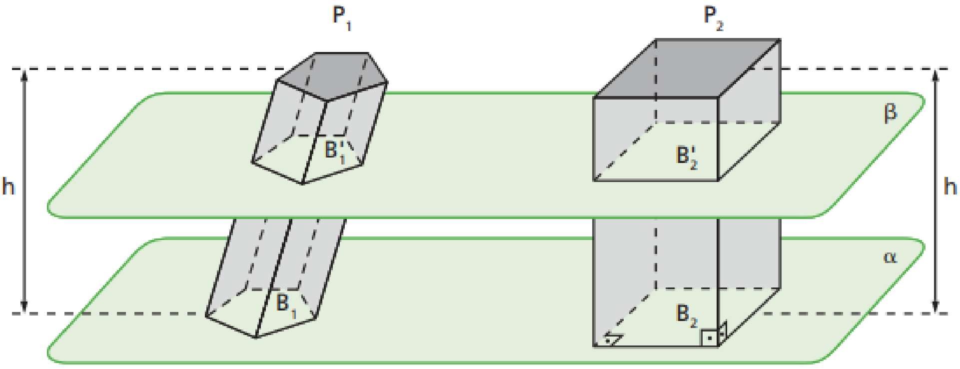
De modo geral, isso significa dizer que o volume do paralelepípedo é dado pela multiplicação da área da base pela altura.

Utilizar essa definição com o Princípio de Cavalieri torna-se extremamente útil para estabelecer relações com volumes de outros sólidos geométricos. Em particular, podemos utilizar isso para obter sem dificuldade o volume de um prisma ou cilindro.

Seja um prisma P_1 com altura h e área da base $B_1 = B$, e um paralelepípedo reto retângulo P_2 também de altura h cuja área da base é $B_2 = B$, ilustrados na Figura 11. Ambos os sólidos têm alturas congruentes e bases de mesma área (DOLCE; POMPEO, 2013).

Daí, supondo que os sólidos têm as bases num mesmo plano α. Qualquer plano β paralelo ao α, quando secciona P_1 e P_2, resulta nas seções B'_1 e B'_2 de áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases. Isto é, como $B'_1 = B_1$, $B'_2 = B_2$ e $B_1 = B_2 = B$, então $B'_1 = B'_2$.

Figura 11 - Volume do prisma

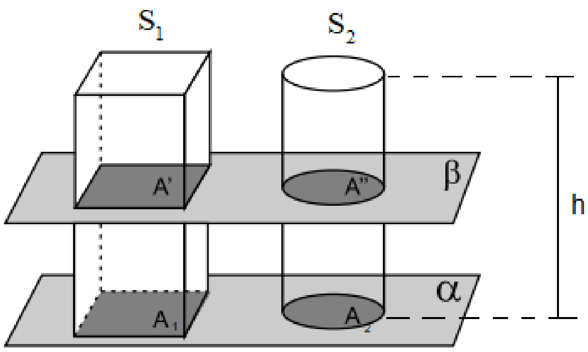


Fonte: Dolce e Pompeo (2013).

Assim, pelo Princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo reto retângulo P_2 têm volumes iguais, ou seja, $V_{P_1} = V_{P_2}$. Como $V_{P_2} = B_2 \cdot h$, então $V_{P_1} = B \cdot h$. Resumindo, o volume V de um prisma é dado pela área da base B multiplicada pela altura h, ou seja, $V = B \cdot h$.

No caso do cilindro, seja um cilindro de altura h e área da base $A_1 = A$, e um paralelepípedo reto retângulo de altura h e área da base $A_2 = A$ (Figura 12). O cilindro e o paralelepípedo reto retângulo têm alturas congruentes e bases de mesma área (DOLCE; POMPEO, 2013).

Figura 12 - Volume do cilindro



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

Suponha que os dois sólidos têm as bases em um mesmo plano α. Qualquer plano β paralelo ao α, quando secciona o paralelepípedo reto retângulo e o cilindro, gera as seções A' e A'', respectivamente, que têm áreas iguais, uma vez que $A' = A_1$, $A'' = A_2$ e $A_1 = A_2 = A$ o que implica que $A' = A''$.

Pelo Princípio de Cavalieri, o paralelepípedo reto retângulo e o cilindro têm volumes iguais. Como $V_{S_1} = A_1 \cdot h = A \cdot h$, segue que

$$V_{S_2} = A \cdot h.$$

Portanto, dado qualquer prisma ou cilindro é possível construir um paralelepípedo reto retângulo que tenha mesma área da base e mesma altura que o prisma ou cilindro. Isso significa que para calcular o volume de um prisma ou cilindro emprega-se a mesma fórmula matemática, uma vez que faz-se uso da área da base e da altura desses sólidos.

3.3 CÁLCULO DE VOLUMES DE PIRÂMIDES E CONES

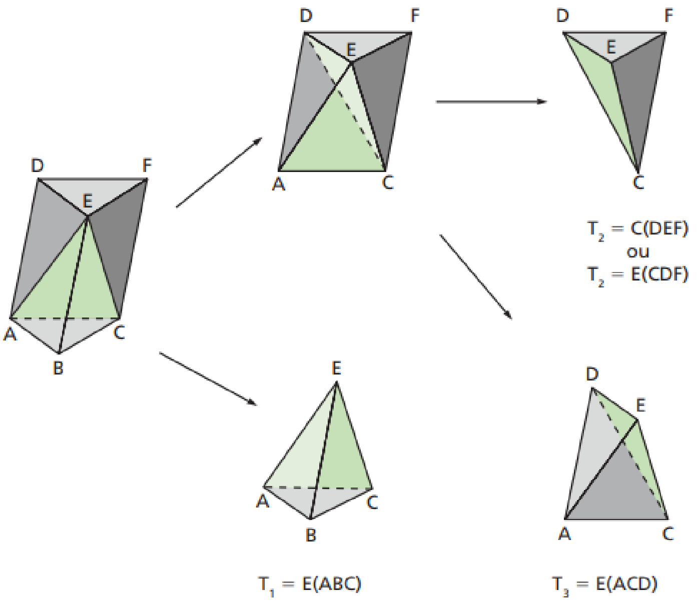
Outro resultado no cálculo de volumes é que um prisma triangular pode ser decomposto em três tetraedros equivalentes entre si (de volumes iguais).

Para demonstração desse resultado, vamos atribuir uma notação especial. Seja um tetraedro de vértices A, B, C e D, sendo a face ABC a base e o ponto D o vértice da pirâmide, vamos representá-lo por $D(ABC)$. Convencionado isso, podemos dar prosseguimento à demonstração.

Seja o prisma triangular $ABCDEF$ (Figura 13). Segundo Dolce e Pompeo (2013), ao cortar esse prisma pelo plano ACE, se obtém o tetraedro $T_1 = E(ABC)$ e a pirâmide de base quadrada $E(ACFD)$. Ao cortar essa pirâmide pelo plano CDE tem-se os tetraedros $T_2 = C(DEF) = E(CDF)$ e $T_3 = E(ACD)$. Portanto, o prisma triangular $ABCDEF$ é igual a $T_1 + T_2 + T_3$, e consequentemente, o volume desse será

$$V_{PrismaTriangular} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3}.$$

Figura 13 - Prisma triangular dividido em três tetraedros equivalentes



Fonte: Dolce e Pompeo (2013).

Como as pirâmides $T_1 = E(ABC)$ e $T_2 = C(DEF)$ têm bases congruentes (são a base e o topo do prisma triangular $ABCDEF$) e alturas iguais, então pelo Princípio de Cavalieri seus volumes são iguais ($V_{T_1} = V_{T_2}$). Mais adiante será falado um pouco mais sobre esse resultado.

E ainda, também pelo Princípio de Cavalieri, $T_2 = E(CDF)$ e $T_3 = E(ACD)$ têm volumes iguais, uma vez que as bases CDF e ACD são congruentes, pois CD é a diagonal do paralelogramo $ACFD$, e as alturas são iguais (distância do vértice E ao plano $ACFD$). Assim, $V_{T_2} = V_{T_3}$.

Portanto, se $V_{T_1} = V_{T_2}$ e $V_{T_2} = V_{T_3}$, então pela transitividade $V_{T_1} = V_{T_3} = V_T$. Desse modo,

$$V_{PrismaTriangular} = V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = 3 \cdot V_T.$$

Além disso, sabe-se, pelos resultados da seção anterior, que o volume do prisma triangular $ABCDEF$ é calculado pela fórmula

$$V_{PrismaTriangular} = B \cdot h.$$

Portanto, é possível concluir que:

$$3 \cdot V_T = B \cdot h \Rightarrow V_T = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

Isto é, o volume do tetraedro corresponde a um terço do volume do prisma triangular de mesma base.

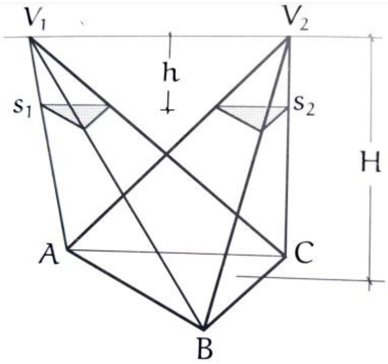
Há um outro resultado matemático que estabelece que dadas duas pirâmides de mesma base e mesma altura então ambas possuem o mesmo volume.

Considerando as pirâmides de mesma base ABC e mesma altura H ilustradas na Figura 14, com vértices V_1 e V_2, quando um plano paralelo a base ABC e distando h dos vértices intersecciona as pirâmides produz as seções s_1 e s_2 de áreas A_1 e A_2, respectivamente. Então, temos que:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A}.$$

Isso equivale a dizer que $A_1 = A_2$. Assim, pelo Princípio de Cavalieri, as duas pirâmides têm o mesmo volume.

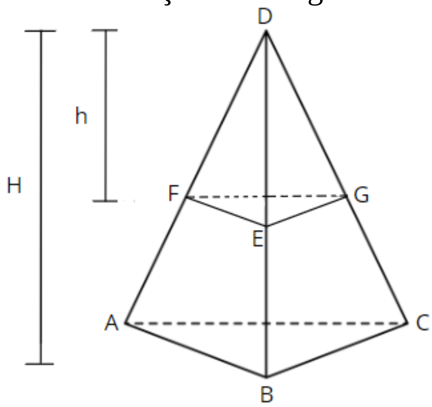
Figura 14 - Pirâmides de mesma base



Fonte: LIMA et al. (2006).

De fato, no tetraedro é possível identificar a semelhança de triângulos. Considere o tetraedro de base ABC e vértice D, ilustrado na Figura 15. Quando um plano paralelo a base ABC intersecciona o tetraedro em uma altura h, do vértice, produz uma seção, o triângulo ΔFEG. Note que como as arestas correspondentes desses triângulos são paralelas, então $\hat{A} = \hat{F}$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{G}$, logo os triângulos ΔFEG e ΔABC são semelhantes, assim $\frac{\overline{FE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{CA}} = k$, sendo k a razão de proporcionalidade entre as arestas desses triângulos. É possível provar que $k = \frac{h}{H}$. O leitor que tiver interesse nesse resultado pode consultar Dolce e Pompeo (2013, p. 181).

Figura 15 - Semelhança dos triângulos no tetraedro



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Ainda, pode-se provar que se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança k, então a razão entre suas áreas é k^2. Esse resultado pode ser consultado em Dolce e Pompeo (2013, p. 182).

Assim, sendo s_1 e s_2 seções da pirâmide de base ABC da Figura 14, temos que essas seções são triângulos semelhantes e consequentemente, para suas áreas teremos,

$$\frac{A_1}{A} = k^2 = \frac{A_2}{A}$$

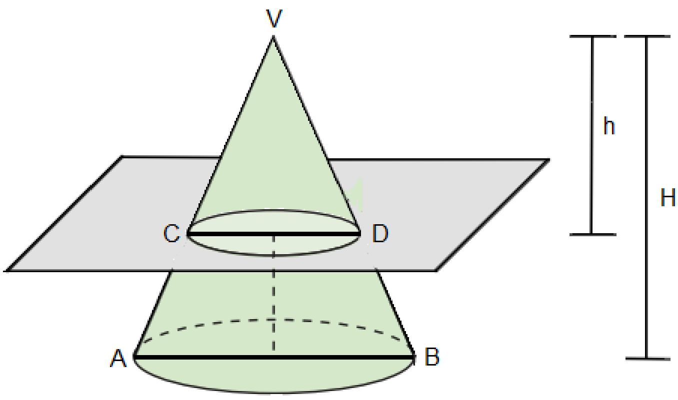
ou seja, $A_1 = A_2$.

Como todo polígono de n lados pode ser decomposto em $n-2$ triângulos, então pode-se decompor qualquer pirâmide com base de n lados em $n-2$ tetraedros mantendo o vértice e apenas decompondo a base. Dessa forma, o volume de qualquer pirâmide será igual a um terço do volume do prisma com a mesma base, ou seja, se a área da base for A e a altura for h, tem-se

$$V_{pirâmide} = \frac{A \cdot h}{3}.$$

Além disso, é possível provar que se tem, no cone, uma relação análoga a da semelhança de triângulos no tetraedro. Considere um cone, como na Figura 16, de altura H e base um círculo da área A_1, ao seccionar esse cone com um plano paralelo à base a uma altura h do vértice tem-se um círculo de área A_2, com $\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$. Essa relação é obtida ao utilizar a semelhança dos triângulos ABV e CDV para obter o raio dos círculos supracitados.

Figura 16 - Semelhança de triângulos no cone

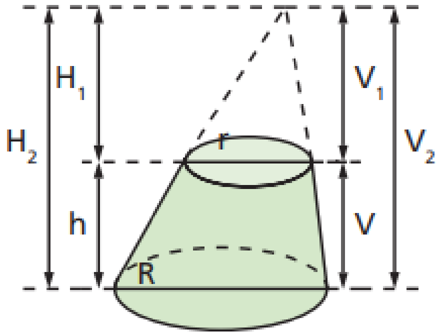


Fonte: Adaptado de Dolce e Pompeo (2013).

Com isso, garante-se que o Princípio de Cavalieri pode ser aplicado comparando qualquer pirâmide ou cone, desde que tenham a mesma área da base e mesma altura. Desse modo, o volume de qualquer pirâmide e cone é dado por $V = \frac{1}{3}Ah$, sendo A a área da base e h a altura.

A partir disso, torna-se também viável calcular o volume do tronco de um cone, que será necessário para obtermos o volume de um segmento esférico de uma base ou calota esférica. Seja um cone, como na Figura 17, cujo raio da base é R e a altura H_2. Seccionando esse cone a uma altura H_1 do vértice, obtém-se um tronco de cone com altura $h = H_2 - H_1$, raio da base maior R e raio da base menor r.

Figura 17 - Tronco do cone



Fonte: Dolce e Pompeo (2013).

Então, o volume do tronco, $V_{tronco\ cone}$, é a diferença do volume do cone maior em relação ao volume do cone menor. Logo,

$$V_{tronco\ cone} = V_{cone\ maior} - V_{cone\ menor} = \frac{1}{3}\pi R^2 H_2 - \frac{1}{3}\pi r^2 H_1.$$

$$= \frac{\pi}{3}[R^2(H_1 + h) - r^2 H_1] = \frac{\pi}{3}[R^2 h + (R^2 - r^2)H_1].$$

Usando a proporcionalidade, tem-se

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{R}{r} \Leftrightarrow \frac{H_1 + h}{H_1} = \frac{R}{r} \Leftrightarrow (H_1 + h)r = RH_1 \Rightarrow H_1 = \frac{hr}{R - r}.$$

Substituindo isso na fórmula de $V_{tronco\ cone}$, obtém-se

$$V_{tronco\ cone} = \frac{\pi}{3}\left[R^2 h + (R^2 - r^2)\frac{hr}{R - r}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[R^2 h + (R + r)(R - r)\frac{hr}{R - r}\right] = \frac{\pi h}{3}[R^2 + (R + r)r]$$

$$= \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2].$$

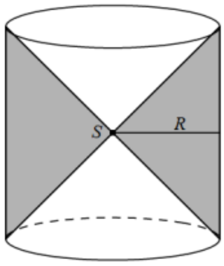
Portanto, tem-se

$$V_{tronco\ cone} = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2].$$

3.4 CÁLCULO DO VOLUME DA ESFERA

Nesta seção temos uma aplicação do Princípio de Cavalieri para o cálculo do volume da esfera usando a anticlépsidra. Para isso, inicialmente, considera-se um cilindro equilátero cujo raio da base é R e altura é $2R$, com S sendo o ponto médio do eixo do cilindro. Ao tomar dois cones que têm como bases as do cilindro e S o vértice em comum, obtém-se a clépsidra, resultante da união dos dois cones. Assim, a anticlépsidra correspondente ao sólido que está no interior do cilindro e fora dos dois cones (clépsidra). Essa situação está ilustrada na Figura 18.

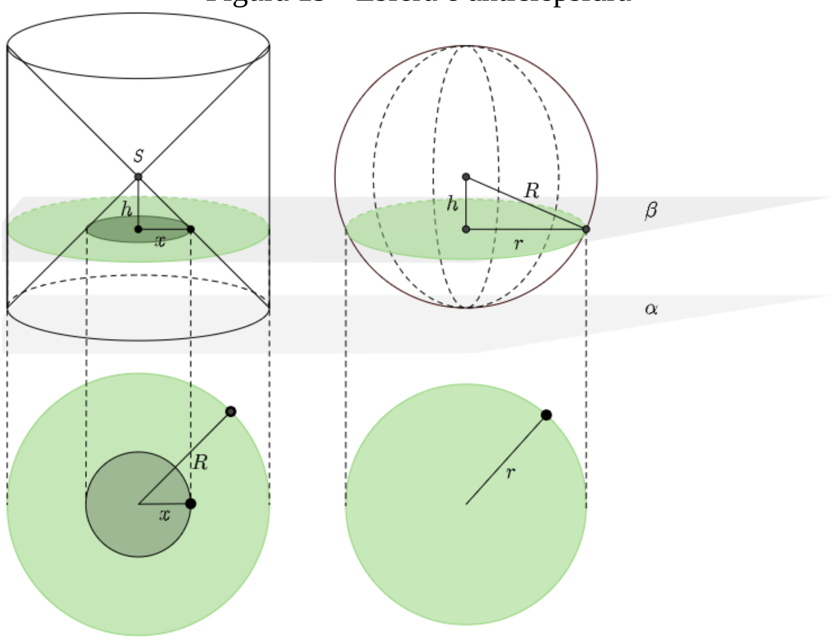
Figura 18 – Anticlépsidra



Fonte: Benk (2017).

Então, considerando uma esfera de raio R e a anticlépsidra descrita acima, suponha que a esfera seja tangente a um plano α, que a base do cilindro equilátero esteja em α, e que a esfera e a anticlépsidra estejam em um mesmo semiespaço determinado por α, como ilustra a Figura 19 (DOLCE; POMPEO, 2013). Assim, qualquer plano β, secante à esfera, paralelo a α e distando h do centro da esfera e do vértice S da anticlépsidra, produz seções na esfera e na anticlépsidra.

Figura 19 - Esfera e anticlépsidra



Fonte: Adaptado de Benk (2017).

Da geometria plana, a área da seção da esfera é dada pela área do círculo de raio r:

$$A_{seção\ esférica} = \pi r^2.$$

Entretanto, na esfera da Figura 19 é possível identificar um triângulo retângulo, e usando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$R^2 = r^2 + h^2,$$

ou seja,

$$r^2 = R^2 - h^2.$$

Desse modo, a área da seção da esfera é dada por:

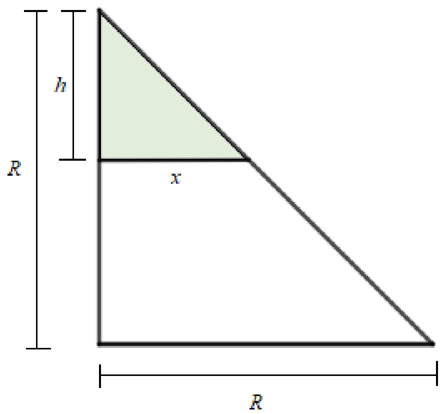
$$A_{seção\ da\ esfera} = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Já a área da seção da anticlépsidra é dada pela diferença da área do círculo maior de raio R e do menor de raio x.

$$A_{seção\ da\ anticlépsidra} = \pi R^2 - \pi x^2.$$

O valor de x pode ser determinado a partir da semelhança de triângulos ilustrada na Figura 20.

Figura 20 - Raio do círculo menor



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Da semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{h}{R} = \frac{x}{R} \Rightarrow x = h.$$

Portanto, o raio do círculo menor é h e, assim, a área da seção da anticlépsidra será:

$$\begin{aligned} A_{seção\ da\ anticlépsidra} &= \pi R^2 - \pi x^2 \\ &= \pi R^2 - \pi h^2 \end{aligned}$$

$$= \pi(R^2 - h^2).$$

Isso implica que

$$A_{seção\ esférica} = A_{seção\ da\ anticlépsidra} = \pi(R^2 - h^2).$$

Como as áreas das seções são iguais e a esfera e a anticlépsidra têm a mesma altura, pelo Princípio de Cavalieri, elas têm volumes iguais.

$$V_{esfera} = V_{anticlépsidra}.$$

Contudo, note que o volume da anticlépsidra pode ser dado por meio do volume do cilindro e dos dois cones da situação discutida na Figura 18. Ou seja,

$$V_{anticlépsidra} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$$

$$= (\pi R^2)2R - 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 R\right) = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$= \pi R^3\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Como $V_{esfera} = V_{anticlépsidra}$, então o volume da esfera é dado por

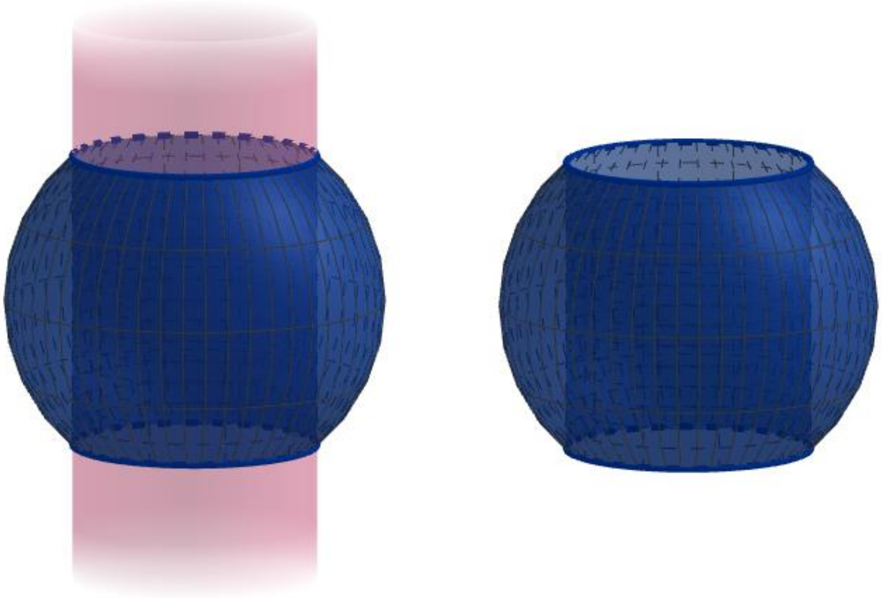
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Portanto, para determinação do volume da esfera foi necessário o uso da anticlépsidra, um sólido que surgiu a partir da junção de dois cones limitados por um cilindro de mesmo raio que estes. Isso demandou um trabalho mais elaborado de interpretação para encontrar o volume desejado, envolvendo, inclusive, a semelhança de triângulos.

3.5 CÁLCULO DO VOLUME DO ANEL DE GUARDANAPO

Todos os resultados apresentados até na seção anterior estão associados a sólidos geométricos comuns estudados em matemática. Entretanto, o Princípio de Cavalieri pode ser útil também para o cálculo de volumes de sólidos não usuais, como o anel de guardanapo, que é o sólido que resta de uma esfera R quando dela é retirado um cilindro infinito de raio $r < R$ (UDESC, 2019), conforme ilustrado na Figura 21. O sólido recebe esse nome pois a sua forma se aproxima do utensílio de cozinha que tem esse nome e é usado como porta-guardanapo (DEVLIN, 2008).

Figura 21 - Anel de guardanapo

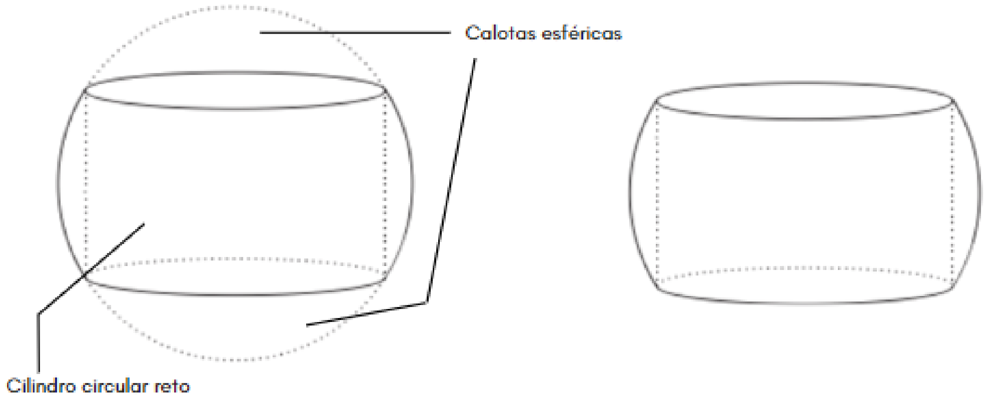


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

O volume do anel de guardanapo é igual ao volume da esfera menos o volume do cilindro circular reto de raio r e altura definida pela interseção com a esfera menos duas vezes o volume da calota esférica (formalmente chamada de segmento esférico de uma base), como ilustrado na Figura 22. Ou seja:

$$V_{anel\ de\ guardanapo} = V_{esfera} - V_{cilindro} - 2V_{calota}.$$

Figura 22 - Volume do anel por meio das calotas esféricas e do cilindro circular reto

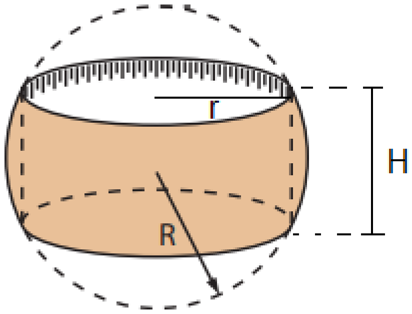


Fonte: Adaptado de UDESC (2019).

Considerando o anel de guardanapo da Figura 23, seja R o raio da esfera e r o raio do cilindro que o originou. Então, o volume da esfera e o volume do cilindro são dados, respectivamente, por

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \ \text{ e } \ V_{cilindro} = \pi r^2 H.$$

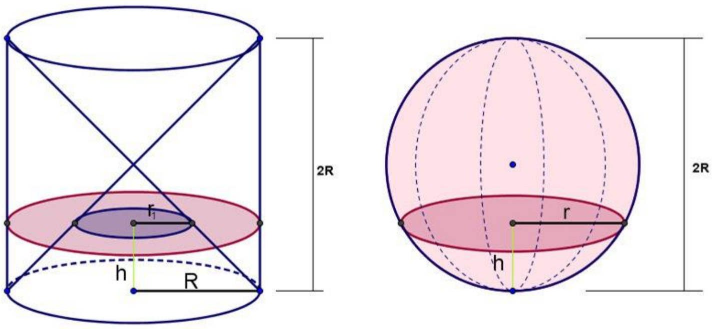
Figura 23 – Volume do anel de guardanapo



Fonte: Adaptado Dolce e Pompeo (2013).

Como a calota é uma parte da esfera, para calcular o seu volume pode-se usar a seção correspondente da anticlépsidra. Considere a calota obtida da esfera de raio R e com círculo da base de raio r, como a da parte pontilhada na Figura 23. Para calcular o volume dessa calota usaremos a parte correspondente da anticlépsidra, como ilustrado na Figura 24, ou seja, o volume da calota corresponde à diferença entre o volume do cilindro de altura h e raio R e o volume do tronco de cone que tem altura h, base maior com raio R, base menor com raio $r_1 = R - h$ (resultado que segue da semelhança de triângulos, ilustrada na Figura 20).

Figura 24 - Calota da esfera e seção da anticlépsidra



Fonte: Adaptado de Benk et al. (2016).

Logo, usando a fórmula do volume do cilindro e do tronco do cone, tem-se

$$\begin{aligned} V_{calota} &= \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2] \\ &= \frac{\pi h}{3}[3R^2 - R^2 - R^2 + Rh - (R^2 - 2Rh + h^2)] \\ &= \frac{\pi h}{3}(3Rh - h^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi h^2}{3}(3R - h).$$

Daí, sabendo o volume do cilindro e da calota esférica, consegue-se determinar o volume do anel de guardanapo. Considerando o anel de guardanapo como na Figura 23, tem-se

$$\begin{aligned} V_{anel\ de\ guardanapo} &= V_{esfera} - V_{cilindro} - 2V_{calota} \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 H - 2 \cdot \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) \\ &= \pi\left(\frac{4R^3 - 3r^2H - 6Rh^2 + 2h^3}{3}\right). \end{aligned}$$

Substituindo $h = R - \frac{H}{2}$ e $r^2 = R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2$, obtém-se

$$V_{anel\ de\ guardanapo} = \frac{\pi}{3} \cdot \left[4R^3 - 3\left(R^2 - \frac{H^2}{4}\right) \cdot H - 6R \cdot \left(R - \frac{H}{2}\right)^2 + 2\left(R - \frac{H}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left[4R^3 - 3R^2H + \frac{3H^3}{4} - 6R\left(R^2 - RH + \frac{H^2}{4}\right) + 2\left(R^3 - \frac{3R^2H}{2} + \frac{3RH^2}{4} - \frac{H^3}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \left[4R^3 - 3R^2H + \frac{3H^3}{4} - 6R^3 + 6R^2H - \frac{3RH^2}{2} + 2R^3 - 3R^2H + \frac{3RH^2}{2} - \frac{H^3}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{H^3}{2}.$$

Portanto,

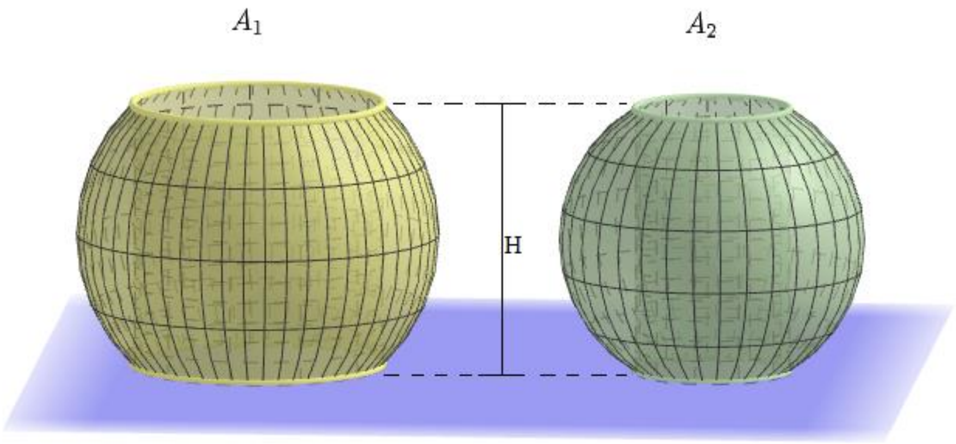
$$V_{anel\ de\ guardanapo} = \frac{\pi H^3}{6}.$$

Observa-se que o volume do anel de guardanapo não depende do raio da esfera e nem do raio do cilindro que foi retirado da esfera, apenas da altura desse cilindro. Assim, anéis de guardanapos com mesma altura, mesmo que originados de esferas diferentes terão um mesmo volume. Esse fato também pode ser observado pelo Princípio de Cavalieri, bastando mostrar que as áreas das seções de anéis de guardanapos que possuem a mesma altura são iguais.

Sejam A_1 e A_2 os anéis de guardanapo de altura iguais a H, obtidos de esferas com raios R e r, respectivamente, ilustrados na Figura 25. Sendo r_1 e r_2 os raios dos cilindros que foram tirados das esferas para originar os anéis A_1 e A_2, respectivamente, tem-se que

$$r_1^2 = R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad r_2^2 = r^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2.$$

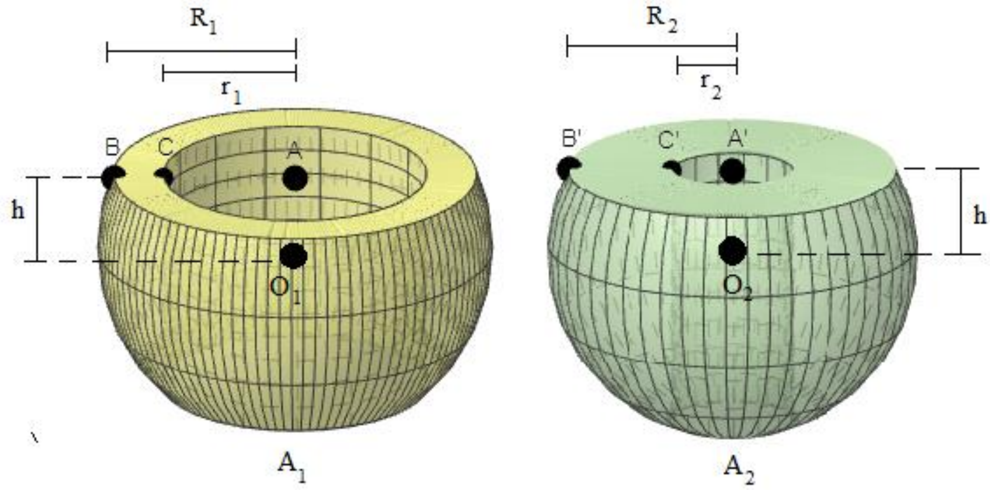
Figura 25 - Anéis de guardanapo com mesma altura



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Considere um plano α, secante aos anéis A_1 e A_2, a uma altura h do centro, O_1 e O_2, das esferas que originaram os anéis, como na Figura 26, e sejam C_1 e C_2 as áreas das coroas circulares resultantes das seções nos anéis.

Figura 26 - Igualdade de volume entre anéis de guardanapo



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Sendo R_1 e R_2 os raios das circunferências externas das coroas circulares das seções dos anéis A_1 e A_2, respectivamente, então, as áreas C_1 e C_2 são dadas por

$$C_1 = \pi {R_1}^2 - \pi {r_1}^2 \text{ e } C_2 = \pi {R_2}^2 - \pi {r_2}^2.$$

Na Figura 26 temos os triângulos retângulos ABO_1e $A'B'O_2$, dos quais tem-se:

$${R_1}^2 = R^2 - h^2 \text{ e } {R_2}^2 = r^2 - h^2.$$

Assim, substituindo os valores de r_1^2, R_1^2, r_2^2 e R_2^2 em C_1 e C_2, obtém-se:

$$C_1 = \pi\left[R^2 - h^2 - \left(R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)\right] = \pi\left(\frac{H^2}{4} - h^2\right) = C_2.$$

Como $C_1 = C_2$, então, pelo Princípio de Cavalieri, A_1 e A_2 têm o mesmo volume.

Dessa forma, encerro os resultados sobre volumes de alguns sólidos. No próximo capítulo irei apresentar os recursos didáticos utilizados no presente trabalho.

4 RECURSOS DIDÁTICOS

Neste capítulo, apresentarei os recursos, tais como o software GeoGebra, o material concreto e a impressão 3D, adotados para a proposta do presente trabalho. Nesse caso, a impressão 3D é a base para a confecção dos sólidos geométricos utilizados.

4.1 MATERIAL CONCRETO

Desde o século XIX, o pedagogo Johann Heinrich Pestalozzi já defendia a necessidade de educação “começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações” (SANTOS; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013, p. 6). A médica e educadora, Maria Montessori, também foi uma das principais responsáveis por desenvolver materiais concretos para o ensino de matemática através das experiências que realizava, sendo um de seus feitos, o material dourado, utilizado até os dias de hoje (FIORENTINI; MIORIM, 1990). E mais recentemente, de acordo com Santos, Oliveira e Oliveira (2013), o psicopedagogo Piaget defendeu que as crianças deveriam manipular e representar objetos físicos, e acessar cartazes e figuras por exemplo, já que assim poderiam estabelecer relações entre conceitos abstratos e representações físicas.

De acordo com Fiorentini e Miorim (1990), essa valorização da manipulação de materiais concretos aliada aos problemas de ensino-aprendizagem enfrentados pelos professores e alunos contribuíram para que o material concreto se tornasse uma fórmula mágica para a solução dessa situação.

Cada material tem suas próprias características, tendo, por trás de sua idealização, uma perspectiva educacional e matemática que estrutura a forma e o momento em que é utilizado no processo de ensino-aprendizagem. Aliás, essa alternativa de ensino pode contribuir para um aprender não mecanizado, pois exige raciocínio e a compreensão do aluno, e pode tornar o aprendizado ainda mais significativo quando dada a oportunidade do aluno construir o próprio material concreto (FIORENTINI; MIORIM, 1990).

Contudo, conforme observado por Santos, Oliveira e Oliveira (2013), é preciso que o professor compreenda que as noções matemáticas são construídas na cabeça do estudante, e não estão contidas no material concreto; assim ele serve como um suporte para a construção do raciocínio a partir da manipulação. Além disso, o material poderá contribuir para o aprendizado desde que seja utilizado adequadamente, o que exige um bom planejamento da atividade e acompanhamento na sua execução. Nesse sentido, é preciso também dar liberdade para que o aluno desenvolva familiaridade com o material concreto, fazendo suas próprias descobertas. É interessante que, após isso, o professor busque intervir pedagogicamente, com questionamentos e discussões. Sendo assim

> É importante destacar que a utilização do material concreto por si só, não garante aprendizagem, é fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização (SANTOS; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2013, p. 11).

Nesse contexto, como uma alternativa para a produção de materiais concretos para serem utilizados nas aulas de matemática, apresentarei a impressão 3D na próxima seção, que surge como um recurso tecnológico que pode apresentar potencialidades na sua utilização.

4.2 IMPRESSÃO 3D

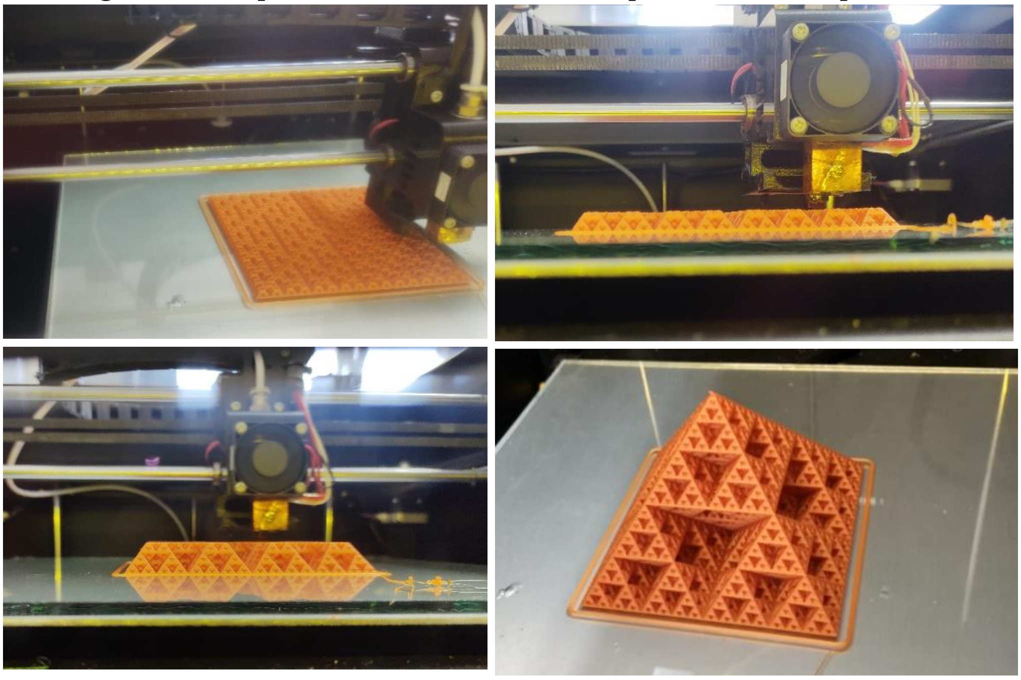
Desde os anos 80 vem sendo estudadas e desenvolvidas máquinas capazes de produzir objetos tridimensionais. Essas máquinas, conhecidas atualmente como impressoras 3D, foram inicialmente criadas para a manufatura rápida e eram voltadas para aplicações industriais (PINHEIRO et al., 2018). Entretanto, após diversos aprimoramentos, nos anos 2000, as impressoras 3D começaram a aparecer no mercado com preços mais acessíveis, principalmente após o fim dos direitos autorias das patentes (EVANGELISTA; OLIVEIRA, 2021), o que viabilizou sua utilização doméstica.

De acordo com Pinheiro et al. (2018), o funcionamento das impressoras 3D é semelhante ao das impressoras comuns, e o que as diferencia é o material ejetado e o motor, visto que há um terceiro eixo de movimento que precisa ser controlado durante a produção do objeto. Para a confecção, é necessária a elaboração de sua versão tridimensional no computador por meio de softwares, denominados *Computer Aided Design* (CAD), que pode ser obtida pela criação do objeto 3D ou o escaneamento do item a ser produzido. Assim, “a impressora ligada ao computador que possui o software utiliza um dispositivo mecânico para dispor e unir minúsculas partículas de um ou mais materiais em finas camadas” (PINHEIRO et al., 2018, p. 4). Através do empilhamento de camadas forma-se o objeto desejado, que pode ser oco ou não.

> Os três tipos de impressoras 3D mais comuns são as que funcionam por fusão e deposição (*Fused Deposition Modeling – FDM*), as de estereolitografia (*Stereo Lithography Apparatus – SLA*) e as que funcionam com sinterização seletiva a *laser* (*Selective Laser Sintering – SLS*) (PINHEIRO et al., 2018, p.4).

De autoria de Scott Crump, o tipo FDM realiza a produção de objetos camada por camada. O processo consiste no uso de um filamento termoplástico aquecido que é injetado através de um pequeno diâmetro circular e inserido na bandeja de baixo para cima (EVANGELISTA; OLIVEIRA, 2021), conforme mostrado na Figura 27. A popularização dessa tecnologia deu-se a partir da motivação de um professor da Universidade de Bath em construir um equipamento menor e mais barato.

Figura 27 - Impressão em camadas de uma pirâmide de Sierpinski



Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D - UDESC[9] (2022).

Já o tipo de impressora SLA é um aprimoramento da anterior, uma vez que faz o uso de *laser* para endurecer a resina líquida. Conforme Morandini e Vechio (2020), a SLA foi apresentada por Charles Hull, em 1983, e seu funcionamento baseia-se na produção de objetos camada por camada através do canhão a *laser* que fica na superfície de um tanque, envolvido por fotopolímero líquido. Assim, a impressora deposita o fotopolímero seguindo o modelo do objeto elaborado no software.

As impressoras SLS também fazem o uso de *laser*, porém, nesse caso, o *laser* é de dióxido de carbono, o que permite a fundição de partículas menores do material em pó

[9] Laboratório de Ensino onde são desenvolvidos materiais para o ensino de Matemática usando as ferramentas de impressão 3D e corte a laser para sua a fabricação.

para a produção de novos objetos (MORANDINI; VECHIO, 2020). O pó utilizado pode ser qualquer tipo de matéria-prima que possa ser transformada em pó, como o plástico ou metal (PINHEIRO et al., 2018), e é determinado dependendo da finalidade do objeto produzido.

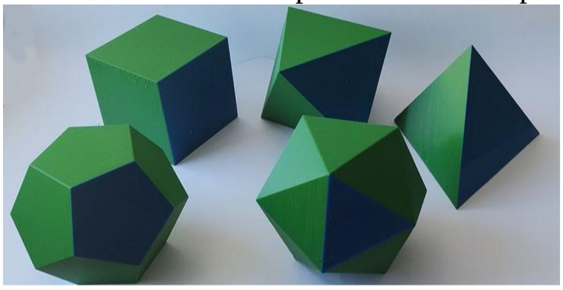
Devido à possibilidade de conceber um objeto, estabelecida sua altura, largura e profundidade através do software, projetando até mesmo pequenos moldes, a impressora 3D tornou-se uma tecnologia expansiva não somente na indústria, como inicialmente idealizada, mas também para a área da educação, da medicina, do setor automotivo e aeroespacial (MORANDINI; VECHIO, 2020).

Em particular, no âmbito educacional, os modelos didáticos e materiais manipuláveis cada vez mais têm sido adotados para dar forma ao conteúdo com o intuito de torná-lo mais compreensível e ilustrável. Nesse sentido, a impressora 3D é uma ferramenta que pode potencializar a produção desses modelos, uma vez que pode transformar os conceitos de tridimensionalidade e de modelagem (TEORODO; LOPES, 2014). Além disso, segundo Basniak e Liziero (2017, p. 7) é “a oportunidade de concretizar modelos elaborados virtualmente, dando a possibilidade da manipulação de objetos que antes só poderiam ser visualizados pelo computador”.

Diante disso, para a utilização de materiais pedagógicos produzidos pela impressora 3D, primeiramente, o professor precisa conhecer as possibilidades disponibilizadas pela tecnologia, buscando conhecer quais artefatos pode produzir e como pode personalizá-los, escolhendo tamanho e cores, por exemplo. Desse modo, estará munido de informações para adotar novas abordagens de ensino. Para usufruir disso, o docente não precisa necessariamente conhecer como a impressora trabalha se for apenas utilizar os materiais produzidos, desde que tenha uma pessoa que possa desenvolvê-los na forma computacional (BASNIAK; LIZIERO, 2017).

A Figura 28 e a Figura 29 mostram alguns exemplos de modelos didáticos, produzidos através de impressão 3D, que podem auxiliar no ensino e compreensão de conceitos matemáticos do Ensino Básico ao Ensino Superior. A primeira figura mostra os poliedros de Platão, usualmente estudados no EM, enquanto a segunda figura apresenta a garrafa de Klein, criada pelo matemático Félix Klein, que é estudada em cursos do Ensino Superior e em pós-graduações.

Figura 28 - Poliedros de Platão produzidos na Impressora 3D



Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D - UDESC (2022).

Figura 29 - Garrafa de Klein produzidos na Impressora 3D

Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D - UDESC (2022).

Além disso, os materiais concretos que foram utilizados no presente trabalho, também foram produzidos com a utilização da impressão 3D. Alguns deles receberam uma versão virtual através do software GeoGebra, que será o tema da próxima seção.

4.3 SOFTWARE GEOGEBRA

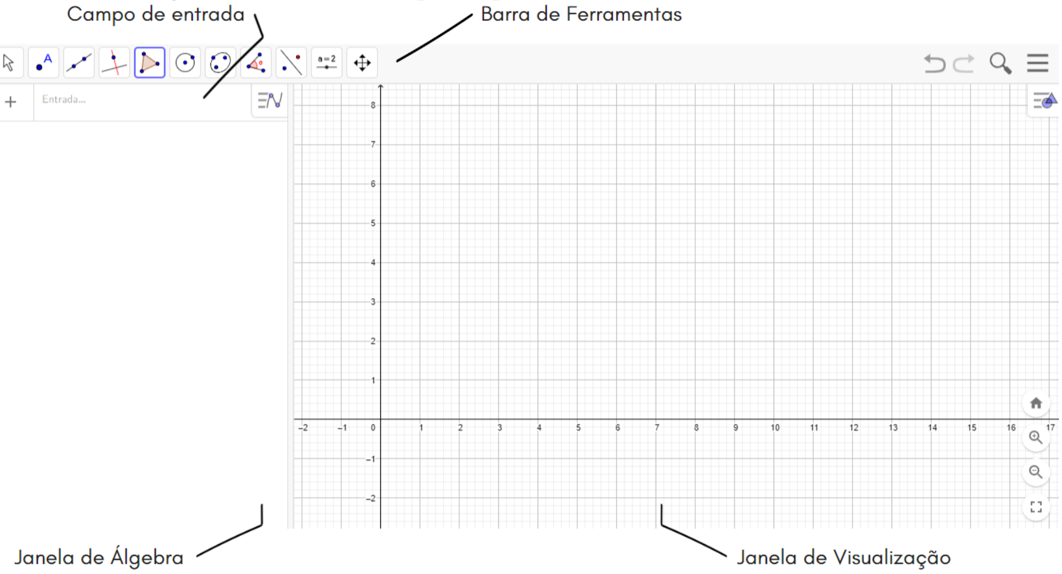
Criado por Markus Hohenwarter, o software GeoGebra é um software dinâmico de matemática que pode ser utilizado em todos os níveis de educação. As ferramentas disponibilizadas contemplam as áreas de geometria, probabilidade, estatística e cálculo, e ainda, permitem a construção de gráficos e tabelas, por exemplo. Segundo Nascimento (2012), o GeoGebra é uma plataforma gratuita disponível em quase todos os idiomas, inclusive em português. É escrito em linguagem Java e configura uma multiplataforma, pois pode ser instalado em computadores Windows, Linux e Mac OS.

Do ponto de vista didático, como o software permite diferentes representações de um mesmo objeto matemático, visualizado de forma algébrica, gráfica e numérica simultaneamente, o aluno pode realizar atividades de exploração e descobertas por conta própria, ou o professor pode utilizá-lo como um meio de criação de materiais didáticos (PREINER, 2008). Além disso, ao propor atividades, o docente pode acompanhar o progresso de seus estudantes em tempo real através do GeoGebra Tarefa. Assim, a plataforma é capaz de oferecer desde atividades com demonstrações até avaliações online.

Todavia, Araújo e Nóbriga (2010) ressaltam que, apesar da ampla funcionalidade, para que realmente haja aprendizagem por meio das atividades no GeoGebra é preciso que o estudante seja estimulado a raciocinar, refletir, testar, conjecturar e justificar. Para que isso se concretize, o docente precisa compreender a função da ferramenta e como deve utilizá-la para propor aulas com o GeoGebra.

Em relação à interface do software (Figura 30), com base na sua versão clássica online, o estudante consegue acessar funções tanto pela barra de ferramentas quanto pelo campo de entrada. Ao acionar uma função, o usuário consegue visualizar seu resultado na janela de visualização. Na barra de ferramentas, ao clicar em cada ícone é possível visualizar as funções disponíveis, como a de criar um polígono ou inserir um texto.

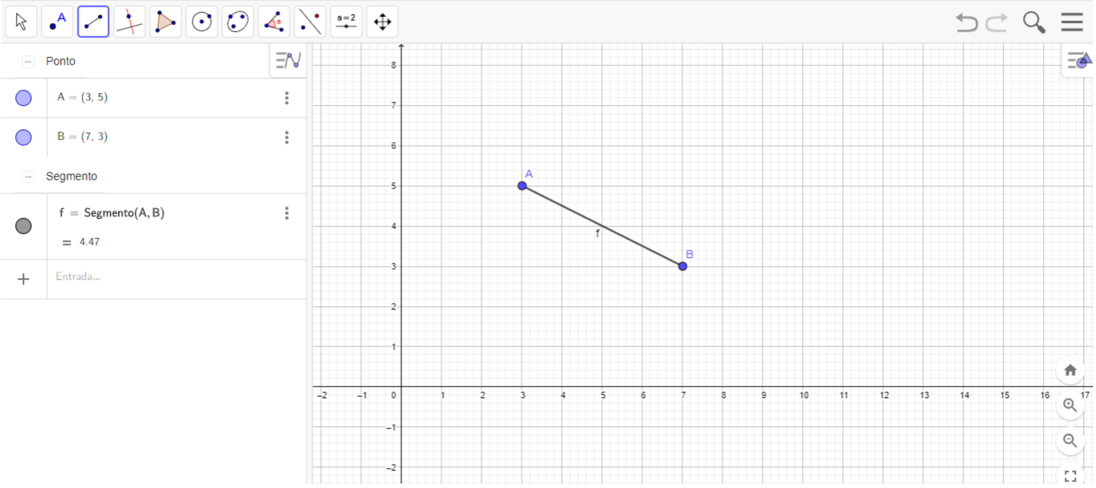
Figura 30 – Interface principal do GeoGebra clássico online



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Um exemplo prático também é a criação de um segmento, mostrado na Figura 31. Enquanto a janela de álgebra apresenta as coordenadas dos pontos criados, e o nome do segmento e seu comprimento, a janela de visualização mostra os pontos e o segmento criado. Ao posicionar o cursor em cima do ponto ou do segmento, por exemplo, e em seguida, clicar no botão direito do mouse, é possível acessar as configurações e fazer alterações nas propriedades desses elementos, como nome, cor, estilo, entre outros.

Figura 31 - Criação de um segmento no GeoGebra

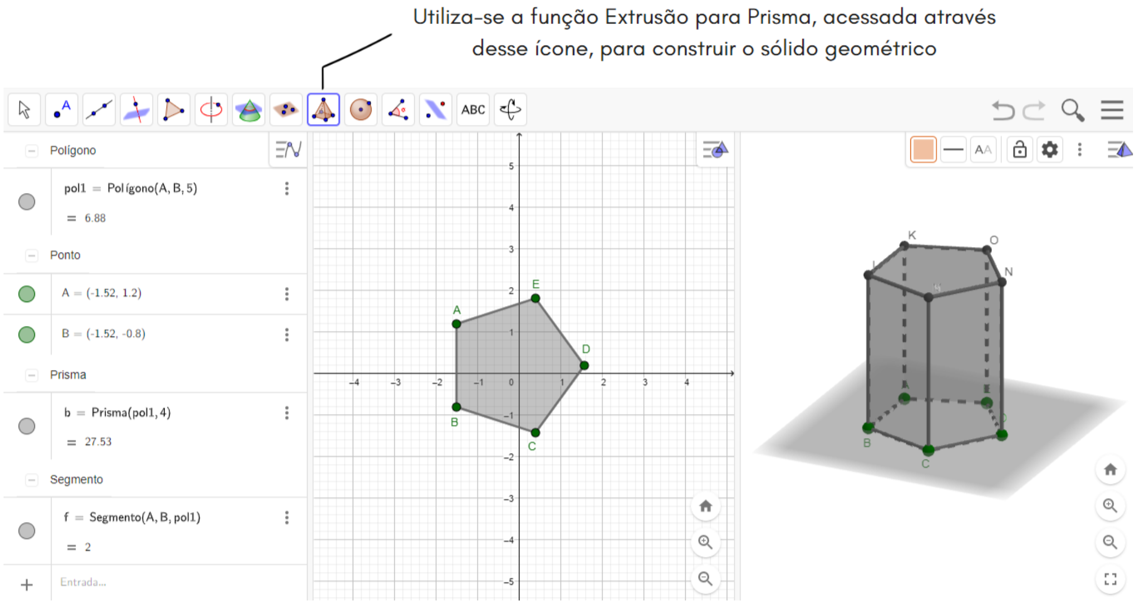


Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Além da janela de álgebra e de visualização, o GeoGebra também permite a visualização simultânea ou individual das janelas de cálculo simbólico, de planilha, calculadora de probabilidade, e de visualização 3D. Ou seja, há diferentes janelas para representações específicas que o usuário deseja. Tal como, ao criar um pentágono, utilizando a função polígono regular, podemos observá-lo e alterar suas características na janela de visualização, e acessar as informações de seus elementos na janela de álgebra. Com a janela de visualização 3D sendo exibida, pode-se também construir um sólido geométrico cuja base é o pentágono anterior, com auxílio da função extrusão de um prisma. A Figura 32 apresenta essa situação.

Devido a essas funcionalidades, o GeoGebra pode ser configurado como uma ferramenta de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), uma vez que é a "implementação computacional da 'geometria tradicional', aquela usando as tecnologias régua, compasso e esquadro (TRCE)" (NASCIMENTO, 2012, p. 128). Ainda segundo Nascimento (2012), comparando a GDI e a TRCE, a primeira oferece a possibilidade de alterar objetos preservando sua construção e propriedades originais, permitindo a construção de inúmeros testes e tornando o computador um laboratório, ao contrário da TRCE, que a partir de uma única construção possibilita apenas um teste.

Figura 32 - Construção de um sólido geométrico no GeoGebra



Fonte: Elaborado pela autora (2023).

Entretanto, é válido mencionar que a inserção da tecnologia por si só não é capaz de gerar conhecimentos. Conforme Teodoro e Lopes (2013, p. 2)

> utilizar tecnologia não significa aprendizagem, pois a qualidade, o planejamento, a didática e os métodos de ensino devem alicerçar essa atividade. Prender a atenção do aluno não implica a absorção do conhecimento. Desse modo, tanto a qualificação docente quanto a adequação do ambiente e das ferramentas são indispensáveis.

Sendo assim, no presente trabalho, o GeoGebra foi utilizado para a elaboração de aplicativos dinâmicos focados na comparação de volumes entre sólidos geométricos, possibilitando a construção de sólidos e planos, e a determinação de medidas de volumes e áreas. A partir dessas e outras ferramentas, ao acessar o aplicativo, o estudante tem a oportunidade de alterar determinadas medidas e visualizar, como consequência, os resultados numéricos e geométricos de forma imediata, além de poder identificar as condições para que o Princípio de Cavalieri seja atendido, que foi o foco das atividades propostas.

5 A DESCRIÇÃO DO ESTUDO

Esta pesquisa está vinculada a um projeto de iniciação científica (IC) inserido no projeto de pesquisa intitulado Objetos de Aprendizagem e Materiais Concretos: Uma Integração Possível, vinculado ao Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), e coordenado pela professora Elisandra Bar de Figueiredo. Esse projeto tem por objetivo o desenvolvimento de materiais concretos através da tecnologia de impressão 3D e corte a laser, de aplicativos dinâmicos no GeoGebra, e de propostas de atividades para o uso desses materiais no ensino de matemática. A utilização desses recursos tem como propósito melhorar os processos de ensino e aprendizagem de matemática, uma vez que a intepretação pode ser feita através da percepção tátil ou da simulação virtual com respostas visuais imediatas, que podem despertar o interesse pela aprendizagem. Além disso, essa pesquisa está relacionada com a abordagem metodológica da MEAAMaRP, estudada no projeto de pesquisa denominado Resolução e Formulação de Problemas na Formação de Professores, do qual, as orientadoras deste trabalho participam.

Sendo assim, nesse trabalho de conclusão de curso relato os estudos oriundos da IC que teve como foco a elaboração de sequências de atividades para o estudo do Princípio de Cavalieri por meio da MEAAMaRP com o uso de materiais concretos e aplicativos dinâmicos do GeoGebra.

Para a elaboração dessas sequências de atividades foram realizadas pesquisas em artigos, livros, dissertações e teses voltados à Educação Matemática, com destaque para o uso de materiais concretos e aplicativos no GeoGebra, e na abordagem da MEAAMaRP no ensino de matemática.

A investigação caracterizou-se como qualitativa, visto que a fonte de dados é o ambiente natural onde o investigador é o principal instrumento, que analisa os dados recolhidos em toda sua riqueza, respeitando a forma como foram registrados (BOGDAN; BIKLEN, 1994). E, ainda, é de natureza exploratória, proporcionando “maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses” (GIL, 2022, p. 42). Nesse sentido, esteve vinculado ao estudo de perspectivas, potencialidades e limitações dos materiais concretos e dos aplicativos dinâmicos utilizados, e das consequências de seu uso no ensino de matemática.

Com base nisso, a sequência de atividades elaborada nessa pesquisa será apresentada em três versões. A versão 1 (Apêndice A), refere-se a primeira sequência elaborada, e foi aplicada em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática, cujo relato de aplicação está no Capítulo 6 e, também, em Colaço, Figueiredo e Azevedo (2023). A versão 2 (Apêndice B) refere-se a reformulação de questões da versão 1 em função da sua aplicação e inclui uma atividade sobre volumes com o anel de guardanapo. Por último, a versão 3 (Apêndice C) é uma proposta mais simples da sequência, sem questões demonstrativas. As versões 1 e 2 têm como foco a aplicação prática professores em formação. A versão 3 tem como proposta ampliar esse público, e contemplar alunos da Educação Básica.

Todas as versões da sequência de atividades têm por objetivo o ensino do cálculo de volumes de sólidos geométricos por meio do Princípio de Cavalieri com o uso de materiais concretos e aplicativos no GeoGebra e têm como abordagem metodológica para a aplicação das atividades propostas a MEAAMaRP (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021).

A primeira versão foi adaptada do trabalho de Cunha (2019), sendo composta por seis momentos que foram estruturados a partir do roteiro da metodologia adotada (Quadro 1). As atividades contemplam, entre os materiais concretos, prismas e pirâmides de base quadrada e hexagonal, cilindro, cone e a pirâmide de base triangular. Enquanto isso, no caso dos aplicativos no GeoGebra, foi disponibilizado um aplicativo dinâmico que permite o estudo e comparação de um cone e de uma pirâmide de base quadrada a partir de dados fornecidos pelo software, tais como as áreas das bases e seções; alturas; volumes; e as razões entre alturas e áreas de seções.

Quadro 1 - Momentos da sequência de atividades.

Momento 1	Proposição de uma pesquisa sobre a vida e contribuições de Cavalieri.
Momento 2	Organização da sala e breve apresentação sobre a MEAAMaRP.
Momento 3	Resolução de cinco problemas envolvendo material concreto e aplicativos do GeoGebra.
Momento 4	Compartilhamento e discussão dos resultados obtidos nos Momentos 2 e 3.
Momento 5	Formalização usando o Princípio de Cavalieri.
Momento 6	Proposição de uma atividade de FP para o cálculo do volume da esfera, através de uma anticlepsidra.

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

A versão 2 da sequência de atividades tem o propósito de aplicar o Princípio de Cavalieri em um sólido diferente daqueles que são usualmente estudados: o anel de guardanapo. Desse modo, será proposto o estudo do volume de anéis de guardanapo a partir do Princípio de Cavalieri, adotando também o uso de material concreto e de aplicativos dinâmicos no GeoGebra. Essa nova atividade trata-se de uma continuidade da sequência proposta na versão 1, e está associada à décima etapa do roteiro da MEAAMaRP. Além disso, essa versão 2 da sequência contém as atividades desenvolvidas na versão 1, mas com perguntas reformuladas após os resultados obtidos na aplicação.

E, por último, a versão 3 é a simplificação da sequência de atividades da versão 2, uma vez que são retiradas as atividades demonstrativas. O intuito é que a atividade possa contemplar estudantes da Educação Básica, que ainda não têm contato com a demonstração formal de resultados matemáticos.

No próximo capítulo apresentarei os resultados da aplicação da primeira versão da sequência, e no Capítulo 7 as alterações propostas para as versões 2 e 3.

6 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Neste capítulo será feito o relato da aplicação da versão 1 da sequência de atividades para o ensino do Princípio de Cavalieri em uma turma de Licenciatura em Matemática. Esse relato também foi descrito em Colaço, Figueiredo e Azevedo (2023).

6.1 CONTEXTO DE APLICAÇÃO

No ano de 2022 foi realizada a experimentação da primeira versão da sequência de atividades, que está no Apêndice A, em uma turma de cinco alunos disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática I (LEM I), do curso de Licenciatura em Matemática da UDESC.

A escolha da disciplina para a aplicação se deu em função do seu caráter, que visa trabalhar com artefatos para o ensino de geometria e discute metodologias e práticas de ensino. Nesse sentido, conforme Turrioni e Perez (2009, p. 59), a disciplina abre espaço para proporcionar aos licenciandos de matemática um conhecimento que valoriza a "necessidade de uma atualização permanente em função das mudanças que se produzem, fazendo-os criadores de estratégias e métodos de intervenção, cooperação, análise, reflexão e construção de um estilo rigoroso e investigativo". Assim, ainda segundo esses autores, o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) representa uma das alternativas para desenvolver essas competências nos licenciandos. Além disso, Santos e Gualandi (2016), afirmam que o LEM também visa o contato com tendências em Educação Matemática, pois para que a utilização dos materiais seja efetiva na prática, o professor em formação também precisa aprender a utilizar os materiais adequadamente, afinal mais importante que acessá-los é saber utilizá-los.

Para a aplicação, todos os participantes assinaram os termos de consentimento para participação da pesquisa (Apêndice D) e de autorização para uso posterior dos dados das atividades realizadas e da transcrição de áudios (Apêndice E). Sendo assim, a turma foi dividida, sendo formados dois grupos, um com dois acadêmicos (que será denominado G1, formado pelos alunos indicados por A1 e A2) e outro com três acadêmicos (G2, formado pelos alunos A3, A4 e A5). A aplicação teve acompanhamento de três pesquisadoras, eu (P1), as docentes Elisandra Bar de Figueiredo (P2) e Eliane Bihuna de Azevedo (P3), e a professora regente da disciplina. Porém, eu estive presente somente em parte da aplicação devido aos horários das disciplinas que estava matriculada coincidirem com o da turma de LEM I.

A sequência foi previamente apresentada, discutida e alguns problemas foram reescritos com a professora regente da turma. Com uma semana de antecedência da aplicação, a professora regente propôs para os alunos a atividade da pesquisa sobre Bonventura Cavalieri (momento 1). Os momentos 2 e 3 foram realizados em três aulas faixa de 50 minutos, e os momentos 4 e 5 foram desenvolvidos em uma aula de 50 minutos, dois dias depois. No momento 6 os alunos fizeram numa aula posterior, e os resultados foram discutidos com a professora da disciplina. Esse momento foi sem a participação das pesquisadoras, devido a indisponibilidade de horário, mas elas tiveram acesso aos dados pela professora.

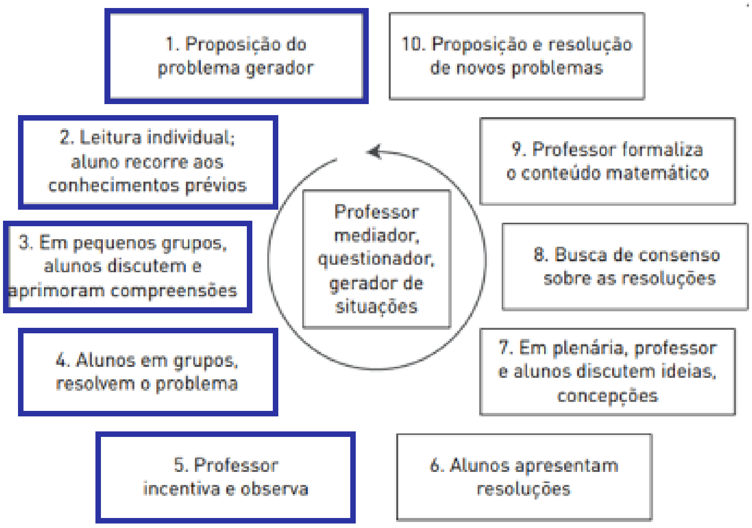
6.2 APLICAÇÃO

Nesta seção, farei o relato da aplicação da sequência de atividades a partir das experiências e discussões realizadas nas etapas da MEAAMaRP. Além disso, ao final, apresentarei as conclusões das pesquisadoras em relação aos resultados da aplicação.

6.2.1 Da proposição à resolução de problemas

O relato de experiência da presente seção corresponde as cinco primeiras etapas do roteiro da MEAAMaRP, destacadas na Figura 33, que teve duração de três horas aula.

Figura 33 – Cinco primeiras etapas do roteiro da MEAAMaRP



Fonte: Adaptado de Allevato e Onuchic (2021).

Convém destacar que antes de iniciar a aplicação da sequência de atividades, P3 fez uma breve explanação sobre o andamento de uma aula mediada pela MEAAMaRP, tendo como referência o roteiro de dez etapas proposto por Allevato e Onuchic (2021). Durante a fala, P3 colocou que, na MEAAMaRP, o problema é o ponto de partida para a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos. Dessa forma, o objetivo era que os participantes tivessem conhecimento da dinâmica que seria adotada nas aulas, principalmente porque nenhum dos alunos tinha feito de fato atividades mediadas pela metodologia proposta, e essa havia sido apenas mencionada pela professora regente.

Em seguida, deu-se início à sequência de atividades. As pesquisadoras e a professora da turma distribuíram para as equipes os enunciados dos problemas e os materiais concretos que faziam parte das simulações propostas nos problemas geradores 1 e 2. Para o problema 1 (Quadro 2), cada equipe recebeu um kit de sólidos que continha prismas e pirâmides de base quadrangular e hexagonal, um cilindro e um cone (Figura 34), embalagens com fragmentos de arroz e instrumentos de medida. Os materiais do kit foram modelados no software FreeCAD[10] e produzidos por impressão 3D no Laboratório FAB3D - UDESC. O objetivo, primeiramente, era comparar através da simulação com fragmentos de arroz o volume desses sólidos e, posteriormente, fazer medições para calcular o valor numérico dos seus volumes. Todos os sólidos tinham a mesma área da base, mas duas alturas diferentes, sendo que a altura do artefato menor é igual a um terço da altura do maior.

Quadro 2 - Problema gerador 1

1- Simule o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz.

i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?
b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?
c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meça os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2.

Quadro 1 – Medidas do Cilindro e dos Prismas

	Prisma quadrangular		Prisma hexagonal		Cilindro	
	Menor	Maior	Menor	Maior	Menor	Maior
Aresta da base						
Altura						
Área da base						
Volume						

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

Quadro 2 – Medidas do Cone e das Pirâmides

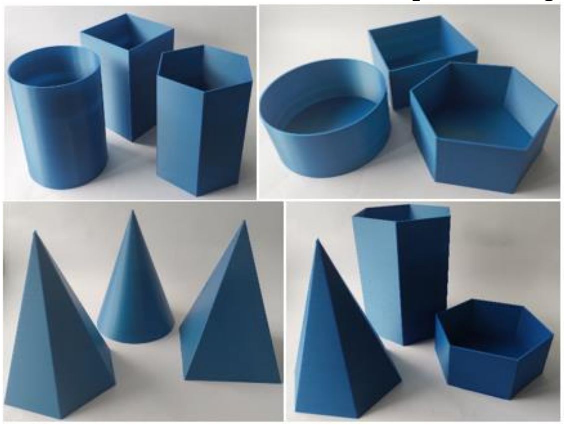
	Cone	Pirâmide Quadrangular	Pirâmide hexagonal
Aresta/raio da base			

[10] Software CAD de código aberto que utilizamos para modelagem 3D, disponível em: https://www.freecadweb.org/.

Altura			
Área da base			
Volume			
O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?			

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023)

Figura 34 - Kit de material concreto do problema gerador 1



Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D - UDESC (2022).

Para resolver esse problema os grupos começaram de maneiras diferentes. G1 começou fazendo as medidas para preencher os quadros do problema gerador 1, item (ii) (Figura 35a), enquanto G2 iniciou com as simulações através dos fragmentos de arroz (Figura 35b).

Figura 35 - Simulações do problema gerador 1

a) G1

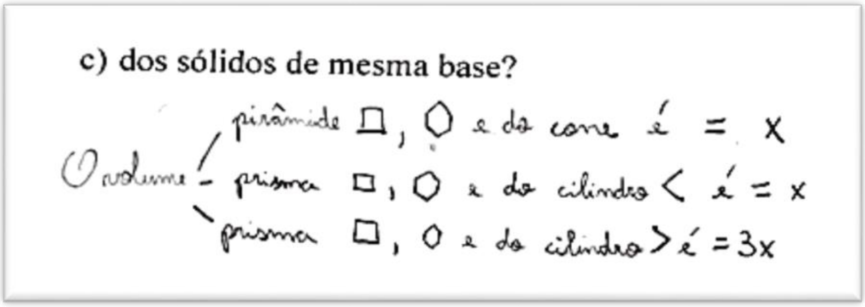
b) G2

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

A resolução das questões do problema gerador 1 levou um tempo a mais do que o previsto, pois os grupos fizeram as medidas das alturas, raios e arestas das bases de todos os materiais. Como os kits formados tinham artefatos com apenas três bases (quadrado, hexágono e círculo) diferentes supôs-se que os alunos fariam cada uma dessas medições apenas uma vez e, ainda, que considerariam que é visualmente perceptível que todos os artefatos maiores possuíam a mesma altura se comparados entre si, e que o mesmo ocorria com os artefatos menores.

Para obter as conclusões dessa questão, G1 foi mais objetivo, pois não se preocupou com os pequenos erros obtidos. Esse grupo concluiu que os prismas e o cilindro de mesma altura tinham o mesmo volume, e que as pirâmides e o cone tinham um terço do volume dos prismas de altura maior, e mesmo volume dos prismas e cilindro de altura menor, como pode-se observar na Figura 36.

Figura 36 - Conclusões de G1 sobre o problema gerador 1



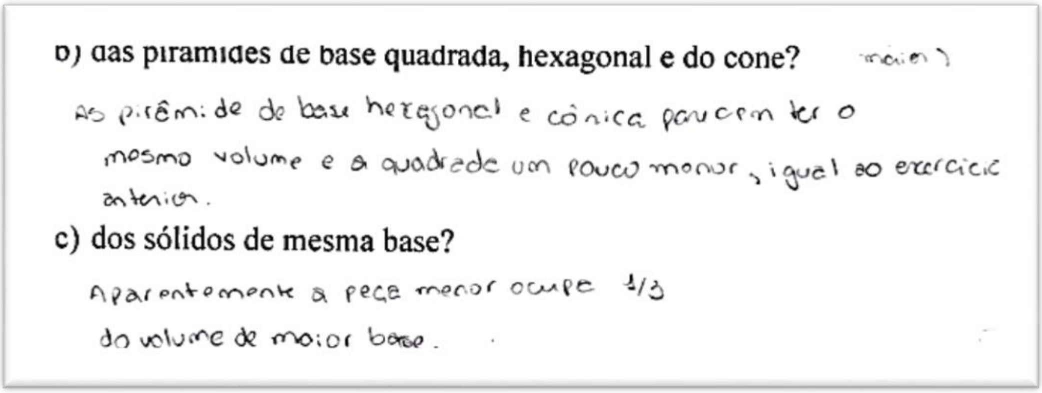
Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

Por outro lado, G2 apresentou dúvidas sobre as aproximações, como pode-se observar no diálogo entre os alunos A3 e A4:

> A3: O que tu acha, eu não vi como ficou no quadrado.
> A4: No quadrado ele ficava certinho, a gente pode ter como padrão.
> A3: Acho que esse aqui também fica tipo quase certinho se separar certinho. Porque a gente tem que pensar que tipo essas frestinhas não foram completas por inteiro. Acho que esses dois são bem parecidos.
> A4: A que deu diferença foi a de base quadrada, que pareceu que ficou um volume menor, daí aqui pareceu que tinha um volume menor, qual que sobrou desse aqui? [...] Aparentemente, o hexagonal e o circular ficaram com volume igual, e deu uma diferença pequena no de base quadrada.

Nessa situação, as pesquisadoras e a professora regente mediaram sugerindo ao grupo que poderiam trabalhar com aproximações. Porém, nas respostas, G2 deixou registrada a sua dúvida (Figura 37).

Figura 37 - Conclusões de G2 sobre o problema gerador 1


b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone? maior)

As pirâmide de base hexagonal e cônica parecem ter o mesmo volume e a quadrada um pouco menor, igual ao exercicio anterior.

c) dos sólidos de mesma base?

Aparentemente a peça menor ocupa 1/3 do volume da maior base.

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

Para o problema gerador 2, apresentado no Quadro 3, foram disponibilizados um kit de materiais concretos e um aplicativo do GeoGebra. O kit (Figura 38a) era composto por uma pirâmide quadrangular e um cone de mesma altura, áreas da base iguais e seções produzidas por um plano paralelo à base numa mesma altura. O aplicativo apresentava os mesmos objetos do kit, e incluía a possibilidade de simular dinamicamente várias seções em alturas diferentes (Figura 38b).

Quadro 3 - Problema gerador 2 e problema 3

2 – Explore o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base e o aplicativo do GeoGebra disponível do link: www.geogebra.org/m/dpykks9y.

i) Meça os elementos do material concreto e preencha os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

	Cone	Pirâmide
Aresta/raio da base		
Altura total		
Área da base		
Aresta/raio da seção		
Altura da seção		
Área da seção		
Volume Total		

O que você pode concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) O que vocês podem concluir com a simulação do aplicativo?

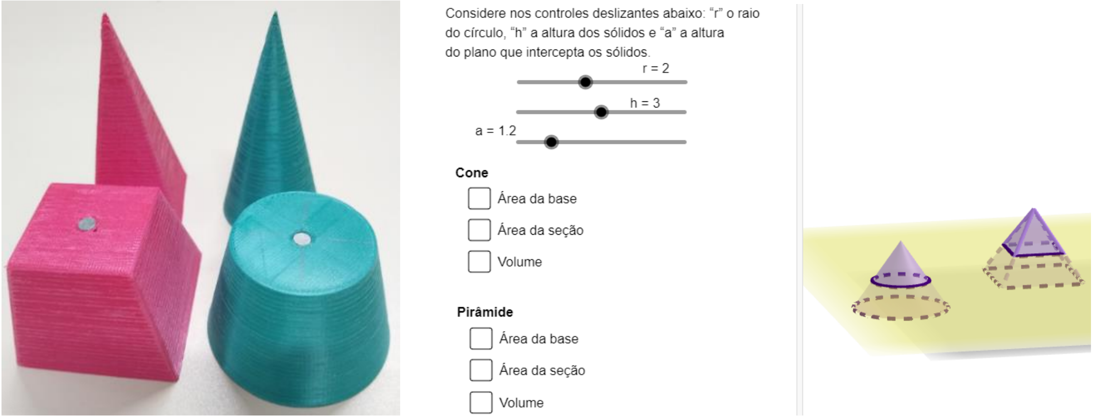
iii) Vocês observaram alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

3 - Com base no que vocês observaram nos problemas 1 e 2, vocês conhecem algum resultado matemático que generalize esses dados? Expliquem.

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

Figura 38 - Ferramentas para o problema gerador 2

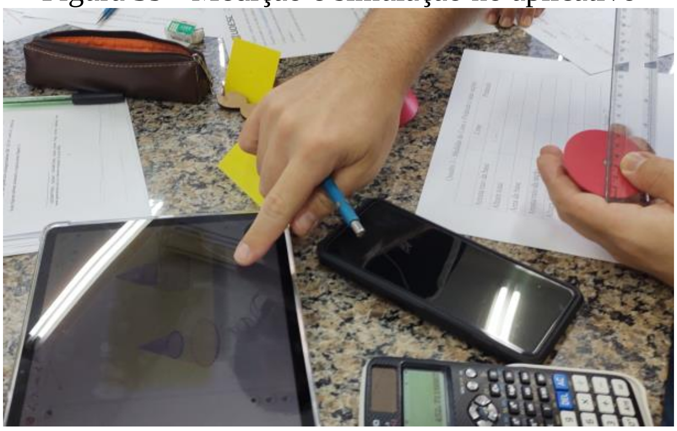
a) Kit de material concreto b) Aplicativo no GeoGebra



Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

Esse problema foi resolvido rapidamente pelos dois grupos, pois o número de medições a serem feitas era menor. Ambos os grupos fizeram as medidas e comparavam os resultados obtidos nos aplicativos, como podemos observar na Figura 39.

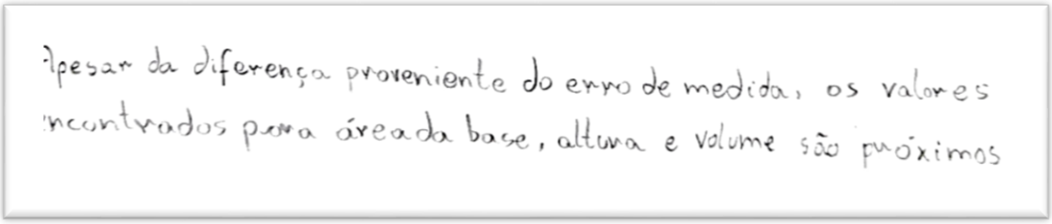
Figura 39 - Medição e simulação no aplicativo



Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

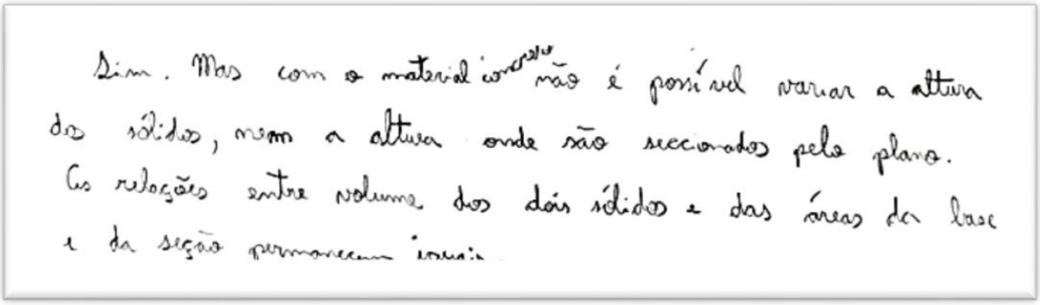
No registro das respostas, G2 ainda mostrou desconfiança em relação às aproximações, e destacou esse ponto na sua folha de resoluções (Figura 40). G1, por sua vez, tece comparações entre trabalhar com o material concreto e o aplicativo, ressaltando que no primeiro não há como fazer variações nas alturas dos sólidos e das seções, como se observa na Figura 41.

Figura 40 - Resolução problema gerador 2 (iii)


Apesar da diferença proveniente do erro de medida, os valores encontrados para área da base, altura e volume são próximos

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

Figura 41 - Resolução problema gerador 2 (iii) por G1


Sim. Mas com o material usado não é possível variar a altura dos sólidos, nem a altura onde são seccionados pelo plano. As relações entre volume dos dois sólidos e das áreas da base e da seção permanecem iguais.

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

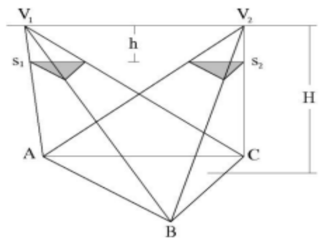
O problema 3 (Quadro 3) objetivava que os grupos observassem os resultados obtidos nos problemas anteriores e percebessem que estavam usando uma aplicação do Princípio de Cavalieri, porém nenhum deles chegou a essa conclusão. G1 destacou como resultado matemático a utilização da fórmula de cálculo de volume de pirâmides ou cones, enquanto G2 ficou preso nos valores aproximados que obteve, concluindo que não poderia obter uma generalização para as atividades. Em contrapartida, esse grupo apresenta a proposta de utilizar água em vez do arroz para obter uma melhor aproximação, pois assim não sobrariam "brechas" como ocorrem com os grãos de arroz, conforme pode-se observar no diálogo entre os alunos:

> A3: É que o nosso deu diferente, mas era para ter dado igual [sobre os valores da tabela], mas se tivesse a mesma altura e a mesma área da base ele ia ter o mesmo volume. Dá pra gente concluir, só que aqui não foi a conclusão que a gente chegou [...] pelos nossos resultados não dá para generalizar nada, mas é porque a gente foi medindo na mão, mas daí era pra ter dado todos esses valores aqui todos iguais.
> A4: Se fosse com água, teria dado mais certinho [...] porque dependendo do arroz, o ar, ele ia ficar entre os grãozinhos de arroz.
> A5: O arroz fica uns espacinhos, a água teria preenchido totalmente.

O problema 4, apresentado no Quadro 4, trazia um resultado de geometria espacial, referente as razões de semelhança num tetraedro quando seccionado por um plano paralelo a base, que os grupos deveriam usar para responder questões que generalizam a relação entre a área da base e a área da seção de tetraedros com mesma altura e área da base.

Quadro 4 - Problemas 4 e 5

4 - Suponha duas pirâmides de base triangular ABC e altura H, sendo que seus vértices são V_1 e V_2. Um plano paralelo à base ABC e que dista h dos vértices produz seções S_1 e S_2 de áreas A_1 e A_2 nas pirâmides de vértice V_1 e V_2, respectivamente[11].



Usando o seguinte Teorema:

> Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos:
> • As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
> • A seção e a base são triângulos semelhantes.
> • A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice. (DOLCE; POMPEO, 2013[12]).

Determine e explique:
a) a relação de A_1 com A_2 e cada uma delas com a área do triângulo ABC;
b) a relação entre os volumes dessas duas pirâmides triangulares originais ($ABCV_1$ e $ABCV_2$);
c) a relação entre o volume de duas pirâmides triangulares que possuem bases de áreas iguais e alturas iguais.

5 - Observe e analise o material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. O que vocês podem afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

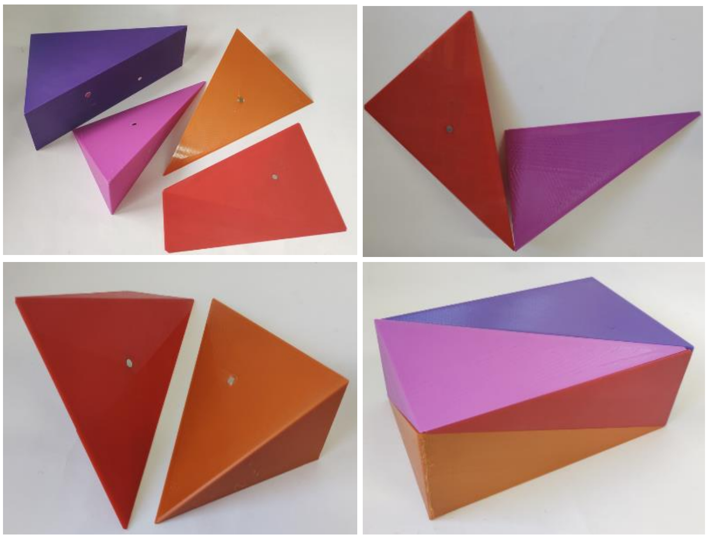
O enunciado desse problema gerou muitas dúvidas devido ao teorema que precisava ser usado. Durante um tempo, os grupos tentaram provar o teorema, pois confundiram o fato de no teorema ser mencionado apenas um tetraedro, enquanto na situação e na figura (contida no enunciado do problema 4) havia dois tetraedros, além do enunciado fazer referência ora ao tetraedro e ora à pirâmide triangular. A professora regente e as pesquisadoras foram mediando esses questionamentos, sugerindo que fosse utilizado novamente o aplicativo (do problema gerador 2) para observar o que acontecia na pirâmide. Porém, nesse momento, percebemos a necessidade de um aplicativo com

[11] PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 26 jan. 2023.
[12] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

mais informações sobre as medidas das arestas em relação a seção. Por fim, os dois grupos conseguiram concluir o problema.

O problema 5 (Quadro 4) tinha como objetivo ajudar os alunos a perceberem, pelo uso de material concreto, que um prisma triangular poderia ser decomposto em três tetraedros de mesmo volume, observando que dois a dois eles tinham a mesma base e a mesma altura. O material concreto, ilustrado na Figura 42, é composto por um prisma triangular e três tetraedros de mesmo volume que compõem esse prisma retangular.

Figura 42 - Divisão do paralelepípedo



Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D, 2022.

Esse problema foi resolvido por G2 durante a aula, mas G1 não teve tempo e levou o material para casa para terminar de resolvê-lo. Ambos os grupos concluíram que os três tetraedros tinham o mesmo volume, embora, na percepção das pesquisadoras, a conclusão não tenha sido feita com base na manipulação do material concreto. Esse ponto ficou evidente na plenária, que abordaremos na próxima seção.

6.2.2 Da plenária à proposição e resolução de novos problemas

Nessa seção será feito o relato das discussões provenientes das últimas cinco etapas do roteiro da MEAAMaRP, que não estão destacadas na Figura 33. As etapas da apresentação dos alunos até a formalização tiveram duração de uma hora aula e, a última etapa, os estudantes fizeram parte extraclasse e parte na semana seguinte, apenas com a participação da professora regente.

O segundo dia da aplicação foi iniciado com a plenária, que foi conduzida por P2. O fato de ter apenas cinco estudantes na turma e da aula ser num laboratório que tem mesas grandes, propiciou uma discussão de forma oral. Além disso, se eventualmente fosse necessário visualizar o que a equipe escreveu/interpretou para melhor entendimento da solução, poder-se-ia ver a folha de respostas do grupo, tendo também disponível uma lousa na sala para o registro de alguma informação essencial para a discussão dos resultados e uma televisão com internet para acessar os aplicativos do GeoGebra em tempo real.

Ao apresentarem suas conclusões sobre o problema gerador 1, G2 destacou que ficou bastante inseguro em tirar conclusões por causa dos resultados aproximados. Esse grupo também sugeriu que o enunciado estipule uma tolerância de erro nas aproximações. Durante a apresentação de suas conclusões, perceberam que um erro havia sido cometido nas medições em virtude ora usarem a medida interna ora a externa, como podemos observar na fala de A3:

> Os materiais que a gente usou pra medir, tudo bem a gente tá usando a régua, mas a gente não sabe exatamente onde está o diâmetro da circunferência [...] as vezes era pra ter usado a parte interna e a gente tá considerando a externa, então já vai mudar um pouquinho. Porque quando eu estava usando o paquímetro, eu peguei a parte de dentro do paquímetro e coloquei por dentro daí pra medir aí essa bordinha lateral ela não pega, só que aí com a régua eu considerei essa bordinha lateral, aí tipo já dava 2 mm de diferença, e aí querendo ou não vai impactar que justamente um deu 163 cm³ e outro deu 166 cm³, é bem pequeno mas pode ser que essa variação de 2 mm pode ter influenciado nisso.

Apesar dos valores aproximados, chegou-se ao consenso que se tinham volumes iguais e que os materiais estavam relacionados entre si.

No problema gerador 2, as equipes destacaram que fizeram as medidas dos materiais concretos, chegando às conclusões. Nesse momento, P2 questionou os alunos sobre qual ferramenta (entre o aplicativo e os materiais concretos) consideraram melhor para visualização. Os estudantes A2 e A4 responderam que foi o aplicativo, por permitir a simulação de várias alturas e já mostrar o resultado das áreas das seções. A5 ressaltou que o material concreto foi importante para perceber o que estava acontecendo e entender melhor o que o aplicativo estava ilustrando. Vemos isso no diálogo:

> A2: Eu achei o aplicativo.

> A4: Nesse caso, como é para variar é interessante a gente vai alterando e observando os valores [complementando a resposta de A2].
> A2: O aplicativo é mais rico.
> A5: Para mim, óbvio que o aplicativo ajuda, mas não sei se sou eu, mas já bati na tela, movimentei tudo errado, eu tenho muita dificuldade nessas coisas, sou bem desastrada, então ter uma peça física me ajuda a visualizar como realmente seria a forma. Tipo, aqui realmente seria assim. Ah tá, e aqui no aplicativo funciona assim. Aí vendo ali [o físico] eu consigo entender o que está acontecendo. Pra mim fica mais fácil. Talvez se tivesse só o aplicativo, eu teria entendido, mas não seria a mesma coisa.
> A4: Acho que a combinação dos dois [material concreto e aplicativo] você consegue ver bem.

No problema 3, o único resultado que G1 destacou foi a fórmula do cálculo de volumes de cones e pirâmides, e G2 argumentou que não se sentiu confortável em estabelecer um resultado, por causa das aproximações: “A5: A gente colocou que em condições ideais essas áreas seriam todas iguais, e aí essa fórmula seria tudo igual para elas, porque se não faz diferença o polígono sendo a área igual e a altura, então o volume seria o mesmo”. Nesse momento a professora regente destacou que as estratégias das duas equipes foram determinantes para as conclusões:

> Eu achei interessante que vocês meio que não se conformavam. Não é que não se conformavam, mas vocês ficaram bem incomodados com a questão da aproximação [se referindo a G2]. Em nenhum momento vocês pegaram e disseram ‘ah, mas isso é quase igual’. Não, vocês fizeram as contas e vocês diziam ‘não é igual, não é igual’ e ficaram naquela do número, do ‘não é igual’. E eu acho que eles já não ... [se referindo a G1] já teve essa questão lá no começo o A2 falando: ‘mas isso é praticamente a mesma coisa’. O que para eles [G2] era um erro grande, para eles [G1] não era um erro tão grande, era só ‘é quase a mesma coisa’. Então isso foi influenciando nas conclusões. (Professora regente).

Os dois grupos concordaram com essa análise da professora, e A5 reforça que realmente a questão da aproximação fez com que eles não assumissem que existiria uma generalização.

No problema 4, A5 começa destacando que teve muitas dúvidas com a intepretação, mas seguiu o seguinte raciocínio:

> A relação entre a área A_1 e A_2 para mim é que elas seriam iguais, porque elas faziam parte duas pirâmides que tinham a mesma altura e a mesma base, e aí essas duas areazinhas eram formadas por um plano paralelo a essa base. E aí a gente tinhas essas condições ali que ele dava [se

> referindo ao teorema do enunciado do problema], que essas arestas laterais e altura iam ficar divididas pela mesma razão então a gente tinha uma proporcionalidade ali, e a seção e a base eram triângulos semelhantes. Com isso esses dois triângulos eram semelhantes a base, então eles eram semelhantes entre si. Então, na minha cabeça juntando tudo ali eles eram iguais

A aluna seguiu contando as relações que tinha escrito. Para ficar mais claro o que estava sendo explicado, P2 pediu para A5 escrever na lousa a relação que tinha conseguido visualizar (Figura 43).

Figura 43 - Registro no quadro do item (a) do problema 4

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

A aluna destaca que tinha conseguido fazer a comparação para apenas uma das razões $\frac{A_1}{A}$. Depois dela ter escrito a relação na lousa, seguiu o diálogo entre a pesquisadora P2 e a aluna do G2:

> - P2: E o que acontece com A_2?
> - A5: Vai acontecer a mesma coisa, eu acho.
> - P2: Então escreve o A_2 lá.
> - A5: A área vai ser a mesma ... então ...
> - P2: E aí você tira sua dúvida?
> - A5: Sim.
> - P2: Sim, a área é a mesma por conta desta relação.
>
> [...]
>
> - A5: É, portanto que eu nem pensei naquilo ali [referindo-se à conclusão que chegou com as fórmulas no quadro] porque eu estava pensando em olhar e pensar alguma coisa, então eu pensei no semelhante e não sei o que, mas não tinha nem pensado em usar a fórmula pra concluir.

Pela fala de A1 do G1, eles chegaram à mesma conclusão, destacando que a formulação desse problema estava bem confusa

> Eu achei que tinham umas coisas que pareciam pra confundir mesmo. As vezes parece assim que, quando eu lia essas informações, eu via que eram proporcionais, que ia dar outra coisa, mas parecia que dizia outra coisa, era um detalhe simples, mas parecia que queria que explicasse outra coisa bem mais aprofundada. (fala de A1)

A P2 fez colocações destacando que percebeu durante a aplicação que o enunciado ficou confuso, principalmente, por apresentar no enunciado um teorema e uma figura que traziam situações diferentes. E ainda, a professora regente acrescentou que houve uma quebra de estilo de problemas. Os primeiros foram experimentais e o quarto totalmente teórico e formal. P2 ressaltou que essa colocação é muito importante para a revisão e melhoria dos enunciados, evidenciando a necessidade da elaboração de outro aplicativo no GeoGebra para ilustrar a situação que acontece no enunciado do teorema. A pesquisadora acrescenta ainda que a intenção de colocar o teorema no enunciado do problema era para ajudar aos alunos a recordarem essas relações de semelhança, sem precisar provar o resultado de forma teórica, mas que essa formulação será revista para futuras aplicações.

Por fim, na explanação do problema 5, os dois grupos citaram que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma com a mesma base, por isso os três tetraedros, que compunham o material, tinham o mesmo volume. Porém, ao serem questionados como eles tinham observado isso, não conseguiram posicionar os tetraedros de forma a concluir o resultado, e também não expuseram cálculos. Então, P2 os instiga a tentarem, mas os alunos têm bastante dificuldade, conforme o diálogo:

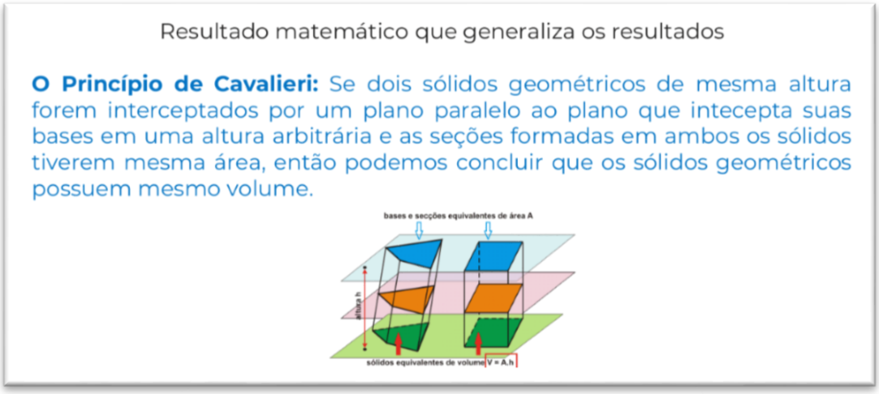
> P2: O que vocês concluíram desses três tetraedros ou pirâmides triangulares?
> A2: Que tem a mesma base, então a área da base é igual, também tem a mesma altura, então se são 3 o volume é 1/3 do volume total.
> P2 [para o A2]: As três têm a mesma base?
> P2 [para o G2]: E vocês?
> A5: A gente colocou que o volume das três são iguais pois elas ocupam o mesmo espaço dentro do prisma.
> P2 [para A5]: Como assim ocupam o mesmo espaço?
> A2: Por que o volume delas é igual?
> [Risadas...]
> P2: Mas eu quero saber por que o volume das três é igual? Você [para A2] falou que as três têm a mesma base.
> A2: Uhum.
> P2: Então, elas têm as três a mesma base?
> A2: Não.

Eles percebem que as bases são de mesma área; ficam por um tempo tentando encontrar três bases iguais e três alturas iguais, porém sem sucesso (que de fato não há). Assim, P2 os instiga a comparar os tetraedros dois a dois e com isso conseguem entender como pode ser percebida a equivalência dos volumes dos três tetraedros.

Ao término do compartilhamento e busca do consenso, P2 deu início à formalização. Para isso, resgatou os resultados dos problemas geradores 1 e 2, chamando atenção para os resultados obtidos: volumes iguais mesmo tendo bases diferentes, porém com a mesma área, no caso dos prismas e cilindros; áreas das bases iguais às áreas das seções paralelas às bases, no problema gerador 2. Com essas informações, a pesquisadora, chamou atenção para as características dos sólidos envolvidos nesses problemas: "eu tenho sólidos que têm a mesma área da base, a mesma altura e todas as áreas das seções iguais. No aplicativo vocês viram que, conforme vocês vão subindo e descendo, todas as áreas são iguais, não só num corte específico." Com isso, se estendeu uma conversa sobre a definição de sólidos que teriam essas características e quais não teriam, resgatando a definição e exemplos de superfícies cilíndricas. Para conseguir chegar no resultado matemático, P2 questiona os alunos sobre a pesquisa que tinham feito sobre Cavalieri, e eles relembraram dos indivisíveis, mas não conseguiram relacionar com os problemas que tinham sido aplicados, como percebemos na fala de A1 de G1 "Sobre as partes dos planos acho, um plano seccionando um sólido, vai ter as áreas que vão ser proporcionais, não o volume, não lembro [...] vai ter altura, e o volume também". Com isso, P2 explica que o resultado que generaliza os resultados percebidos nos problemas 1 e 2 é o Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, conforme a Figura 44.

A pesquisadora exemplifica o princípio com os sólidos que foram abordados nos problemas, resgata a definição de volume de um cubo e de um paralelepípedo, e coloca que, a partir desse volume conhecido e do Princípio de Cavalieri, sabe-se o volume de qualquer cilindro (e prisma). De forma análoga, comparando pirâmides e cones, destacou que o teorema no enunciado do problema 4 é que garante as hipóteses do Princípio de Cavalieri para essa categoria de sólidos. Por fim, o problema 5, garante que o volume de um tetraedro é um terço do volume do prisma triangular de mesma base, e resgatando o problema 4, esse resultado é válido para qualquer pirâmide e cone.

Figura 44 - Princípio de Cavalieri



Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

Para finalizar a formalização, P2 falou brevemente sobre o que é preciso para usar o Princípio de Cavalieri, destacando que apesar de ser muito útil, não é um resultado simples de ser usado, pois, para determinar o volume de um sólido desconhecido precisamos de um outro sólido que possua as mesmas medidas de área para cada seção horizontal e a mesma altura que o sólido do qual desejamos calcular o volume. Há inúmeros sólidos existentes, mas encontrar um que possua tais características não é um trabalho fácil, principalmente no que se refere a corpos redondos. Para resolver esse problema temos as Somas de Riemann e o Cálculo de Integral, que inclusive é uma das ferramentas para se demonstrar o Princípio de Cavalieri.

Como fechamento da aplicação, foi deixada como atividade extraclasse, para entrega na aula posterior, a elaboração de um problema matemático usando o Princípio de Cavalieri, o material concreto composto por calotas de esfera e a anticlépsidra (Figura 45) e o aplicativo disponível no link https://www.geogebra.org/m/TbUDpCCt.

Figura 45 - Material concreto para o volume da esfera

Fonte: Acervo do Laboratório FAB3D, 2022.

A professora regente acabou deixando os alunos trabalharem na formulação dos problemas durante as três aulas da semana posterior à aplicação. Não houve a participação das pesquisadoras, portanto há apenas o relato da professora e as atividades que foram elaboradas.

Segundo a professora, apenas três alunos participaram da elaboração: A1, A2 e A5, e eles trabalharam todos juntos e propuseram dois problemas. A princípio, os alunos ficaram trabalhando sozinhos, mas a professora percebeu que eles não estavam conseguindo interpretar o material e o aplicativo, então ela auxiliou nesse momento para chegarem a uma conexão com o Princípio de Cavalieri.

Nos dois problemas propostos (Figura 46) é notável a preocupação com uma situação contextualizada, porém não há efetivo uso do material concreto e do aplicativo. A professora relatou que foram os alunos que decidiram elaborar problemas contextualizados, não foi uma orientação dela. Os problemas foram apresentados e discutidos com a professora, sendo feitas algumas correções do enunciado para melhor interpretação.

Os problemas formulados foram criativos, mas a necessidade que os alunos sentiram em propor algo contextualizado tirou o foco da atividade proposta. Analisando os procedimentos da formulação de problemas da Figura 3, nota-se que faltou a etapa 6, de rever o objetivo (usar o material concreto e aplicativo), e então retornar ao enunciado ou voltar para a etapa de formulação.

Figura 46 - Problemas elaborados pelos alunos

O princípio de Cavalieri nos diz que, dados dois sólidos A e B de mesma altura e áreas da base iguais, que estão contidos no mesmo plano β, terão o mesmo volume se qualquer plano ɵ, paralelo a β, determinar duas seções transversais com áreas iguais. A partir dele vimos em sala que, se tomarmos uma anticlepsidra e uma esfera assentadas em um mesmo plano horizontal, os seus volumes serão iguais. Sabendo disso, considere as questões abaixo:

1. Maria possuía uma ampulheta formada por cones de raio e altura iguais a 4cm. Certo dia o gato de Maria quebrou sua ampulheta e ela transferiu a areia para um pote com formato de esfera. Considerando que Maria foi capaz de recuperar toda a areia da ampulheta, calcule a porcentagem do volume da esfera ocupada pela areia da ampulheta se:

   a) Um cone tem todo o seu volume preenchido por areia.

   b) Um cone tem ¾ do seu volume preenchido por areia. Considere a fórmula do tronco de cone como: $V = \frac{\pi h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$.

2. Pedro estava em uma festa com uma taça de Martini como a ilustrada abaixo. em determinado momento, Pedro esbarrou com a taça em uma mesa quebrando a base que deixava a taça em pé. Para não perder o Martini, Pedro rapidamente pegou um potinho de sobremesa como o da figura. Considerando que a taça estava cheia até a borda com 100ml de Martini, considerando a taça como um cone de raio *x* e altura *y*, e o potinho de sobremesa como sendo a metade de uma esfera de raio *x* e altura *y*, assinale a resposta que corresponde ao volume do potinho:

   a) 100ml
   b) 150ml
   c) 200ml
   d) ½ *e*(100)ml
   e) 250ml

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

6.2.3 Considerações finais da aplicação

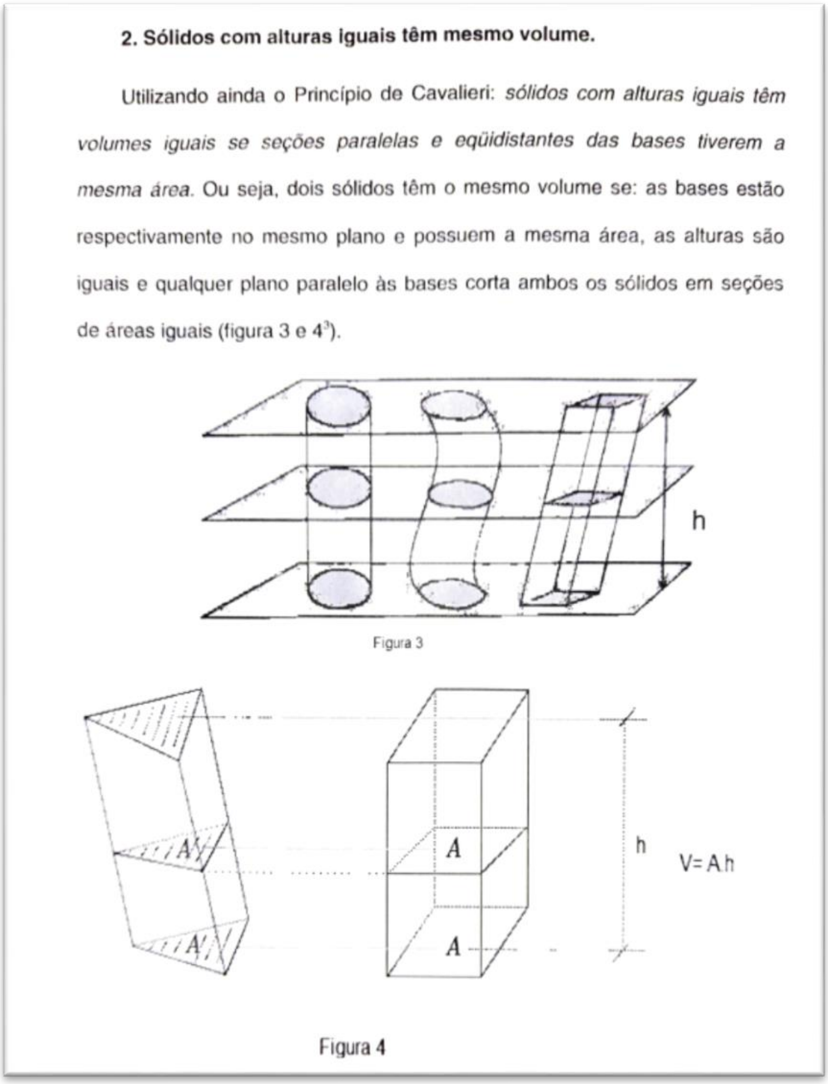
Com essa prática, os licenciandos tiveram a oportunidade de estudar o Princípio de Cavalieri com uso de material concreto e de aplicativos desenvolvidos no GeoGebra 3D de forma mais intuitiva, evitando, dessa forma, a reprodução automática de fórmulas sem um significado conceitual (LEMKE; SIPLE; FIGUEIREDO, 2016). Além disso, os estudantes tiveram um papel ativo durante todo o processo, enquanto as pesquisadoras e a professora regente o papel de mediadoras, como esperado pelo uso da MEAAMaRP.

A discussão das resoluções feita pelos grupos foi um momento rico, em que se tornou evidente o processo de avaliação que os próprios estudantes fizeram sobre a sua resolução. Como exemplo desse momento, pode-se citar a discussão do problema 3, em que os estudantes observaram que existia diferença entre o valor obtido pelos volumes, que estava sendo causada ao tomar as medidas dos artefatos considerando ora medida externa ora medida interna; e o apontamento de uma possível forma de obter um resultado mais preciso, que seria ao invés de utilizar os fragmentos de arroz usar água, pois assim não haveria brechas, como as que existem entre os grãos de arroz. Um segundo momento que considerou-se importante para a aprendizado dos estudantes foi da discussão dos resultados, em que P2 fez uma mediação que resultou na conclusão almejada com a atividade proposta. Mais especificamente, o momento em que A5 escreveu na lousa a sua conclusão obtida para apenas uma das proporções (Figura 43), com a mediação da docente, a discente conseguiu expandir as suas considerações.

Ao analisar a atividade de pesquisa (momento 1), que foi entregue para as pesquisadoras, percebeu-se que alguns alunos tinham informações bem completas, com exemplos ilustrativos do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volumes, como é possível observar no recorte apresentado na Figura 47. Porém, isso não foi suficiente para perceberem a relação dos problemas com o princípio. Ainda foi possível perceber, durante a plenária e formalização, uma lacuna dos alunos em relação a esse tema.

Diante disso, considera-se que a aplicação gerou novos conhecimentos para os alunos que, no final, conseguiram perceber como o Princípio de Cavalieri precisa ser usado e o uso dos materiais concretos e aplicativos dinâmicos geraram experiências que contribuíram para o aprendizado. Durante a plenária alguns alunos declararam preferência por um ou por outro, mas o consenso foi que um complementou o outro. No momento da formalização, exploramos como esse resultado pode ser utilizado no cálculo de volumes de variados sólidos e sugerimos algumas possibilidades de aplicações deste princípio também no Ensino Básico. Por fim, para as pesquisadoras, a MEAAMaRP fez os alunos discutirem e participarem ativamente de todo o processo de ensino-aprendizagem-avaliação, sendo uma experiência muito importante com que os estudantes tiveram enquanto professores em formação.

Figura 47 - Registros da pesquisa sobre Cavalieri



2. Sólidos com alturas iguais têm mesmo volume.

Utilizando ainda o Princípio de Cavalieri: *sólidos com alturas iguais têm volumes iguais se seções paralelas e eqüidistantes das bases tiverem a mesma área*. Ou seja, dois sólidos têm o mesmo volume se: as bases estão respectivamente no mesmo plano e possuem a mesma área, as alturas são iguais e qualquer plano paralelo às bases corta ambos os sólidos em seções de áreas iguais (figura 3 e 4[3]).

Figura 3

Figura 4

Fonte: Colaço, Figueiredo, Azevedo (2023).

6.3 AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PELOS PARTICIPANTES

Nessa seção, irei apresentar os dados coletados por meio de um questionário sobre as concepções dos alunos participantes acerca da sequência de atividades para explorar volumes pelo Princípio de Cavalieri, e da experiência com a RP e FP nessa aplicação. O inquérito foi respondido por quatro estudantes, entre os cinco que participaram da aplicação, e está no Apêndice F. Por serem poucos alunos, destacamos que a resposta de um aluno tem uma correspondência de 25% do total.

O questionário é composto por nove questões, sendo oito fechadas e uma aberta. As questões fechadas foram respondidas de acordo com a Escala Likert de cinco pontos, na qual os sujeitos questionados emitem seu grau de concordância à um conjunto de afirmações em relação ao tema em questão (JÚNIOR; COSTA, 2014). Nesse caso, os cinco pontos considerados na escala adotada foram: discordo totalmente (DT), discordo (D), indiferente (I), concordo (C) e concordo totalmente (CT).

A primeira questão tinha o intuito de identificar como se deu o envolvimento do aluno nas ações necessárias para o desenvolvimento da atividade. A Tabela 1 apresenta as perspectivas dos alunos a esse respeito.

Tabela 1 - Respostas em relação à experiência desenvolvida na sequência de atividades

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Simulei o volume dos sólidos usando o material concreto e água.	0	0	3	75	0	0	1	25	0	0
Participei da medição dos sólidos geométricos	0	0	0	0	0	0	1	25	3	75
Simulei resultados nos aplicativos do Geogebra	0	0	0	0	1	25	1	25	2	50
As simulações e a medição incentivaram a troca de ideias com meu(s) colega(s)	0	0	0	0	1	25	2	50	1	25
As simulações me ajudaram a perceber a utilidade do Princípio de Cavalieri.	0	0	0	0	1	25	3	75	0	0
Tive dificuldade em desenvolver as simulações e medições.	0	0	1	25	1	25	2	50	0	0

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Os dados da Tabela 1 indicam que 75% dos estudantes discordam que simularam o volume dos sólidos utilizando o material concreto e água, enquanto 100% concordou que realizaram a medição dos sólidos geométricos. Essas duas informações se contradizem, pois os sólidos geométricos medidos tratam-se do material concreto fornecido para a atividade, e na primeira afirmação, uma porcentagem significativa discordou. Diante disso, infere-se que esse resultado foi devido à avaliação dos alunos ter sido feita na primeira afirmação considerando, principalmente, a utilização da água na simulação, que de fato não ocorreu, pois foi substituída pelo fragmento de arroz. A ideia inicial era usar água, mas na simulação antes da aplicação o experimento com água apresentou problemas, por isso foi feita a troca por fragmento de arroz, porém esse ponto não foi corrigido no questionário. Assim, a menção do material concreto na afirmação pareceu não ter ganhado tanta relevância nas respostas. Em relação à simulação nos aplicativos do GeoGebra, 75% indicaram ter realizado. Assim, em relação à simulação nos aplicativos e no material concreto, 75% dos alunos responderam que essas incentivaram tanto a troca de ideias com os colegas quanto ao entendimento da utilidade do Princípio de Cavalieri. Apesar dessas contribuições, a Tabela 1 indica que cerca 50%

dos alunos tiveram dificuldades em realizar as simulações, enquanto os outros afirmaram ser indiferente ou discordaram da afirmação.

A segunda questão tinha o intuito de identificar se os alunos já haviam tido contato com o Princípio de Cavalieri, e em caso positivo, de que forma esse ocorreu. Na Tabela 2, os dados indicaram que 75% da turma havia tido contato com esse resultado matemático antes da experiência desenvolvida.

Tabela 2 - Respostas em relação ao Princípio de Cavalieri

Afirmação	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Conheci o Princípio de Cavalieri antes da experiência desenvolvida	1	25	0	0	0	0	3	75	0	0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

Esses alunos que já tinham tido contato com o resultado matemático responderam às afirmações da Tabela 3. Os dados dessa tabela mostram que apenas 33,3% concordam que esse contato anterior com o Princípio de Cavalieri foi baseado, inicialmente, na explicação do professor e posterior resolução de exercícios individualmente ou em grupo, enquanto 66,7% afirmaram indiferença. Além disso, 66,7% discordam que houve simulações com material concreto ou uso de softwares para a explicação do conteúdo. Em relação à proposição de atividades em grupos para posterior formalização do conteúdo, e à abordagem de fatos históricos para relacionar o conteúdo, as respostas foram bastante dispersas. No primeiro caso, apenas 33,3% concordam, e no segundo caso, 66,7% discordam, e o restante afirmou indiferença ou discordância.

Tabela 3 - Respostas dos alunos que já tinham tido contato com o Princípio de Cavalieri

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
O professor primeiro explicava o conteúdo, apresentava exemplos e em seguida dava exercícios e/ou problemas para serem feitos em sala de aula de forma individual ou em grupo.	0	0,0	0	0,0	2	66,7	1	33,3	0	0,0
O professor propôs simulações com material concreto para explicar o conteúdo.	2	66,7	0	0,0	0	0,0	0	0,0	1	33,3
O professor utilizava softwares durante a aula para apresentar o conteúdo.	2	66,7	0	0,0	0	0,0	0	0,0	1	33,3
O professor primeiro deixava os alunos trabalharem em grupo para depois corrigir as questões e formalizar o conteúdo.	1	33,3	0	0,0	1	33,3	1	33,3	0	0,0

O professor trouxe fatos históricos para relacionar o conteúdo.	1	33,3	1	33,3	1	33,3	0	0,0	0	0,0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

O terceiro item do questionário estava relacionado ao uso da MEAAMaRP na sequência de atividades. A Tabela 4 revela que 75% dos alunos nem concordaram e nem discordaram sobre ter tido o primeiro contato com a metodologia da RP na experiência proposta. No que se refere propriamente à metodologia, 50% concordaram que essa foi adequada para trabalhar o conteúdo de volumes e o Princípio de Cavalieri; e ainda, apenas 25% consideraram que essa permitiu participação mais ativa e comprometida nas aulas, enquanto 25% discordaram e 50% demonstraram indiferença. Nesse sentido, ao comparar com as respostas do item um do questionário, nota-se que apesar de ocorrerem simulações e medições em uma parte significativa das atividades, na avaliação os alunos não consideraram que esse processo exigiu mais participação deles. Por meio desse resultado parece que os alunos não entenderam que enquanto resolviam os problemas também estavam, progressivamente, aprendendo um conteúdo.

Além disso, 75% dos alunos concordaram tanto que a resolução de problemas ocorreu de forma mais crítica, sem o uso de fórmulas ou métodos específicos, devido à compreensão dos conteúdos envolvidos, quanto também que tiveram mais oportunidades de construir e replanejar estratégias, construindo conhecimentos importantes para si. Essa última informação mostra que os alunos foram capazes de reconhecer que tiveram autonomia para tirar outras conclusões matemáticas a partir das atividades.

Tabela 4 - Respostas em relação à MEAAMaRP

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Esse foi meu primeiro contato com a metodologia de RP.	0	0	1	25	3	75	0	0	0	0
Você considera que a metodologia RP foi adequada para explicar o conteúdo de volumes pelo Princípio de Cavalieri.	0	0	0	0	2	50	2	50	0	0
Julga que as aulas em que a metodologia de RP foi inserida permitiram que você participasse mais ativamente das aulas e, consequentemente, se tornasse mais comprometido com a sua aprendizagem.	0	0	1	25	2	50	0	0	1	25

A sua compreensão dos conteúdos envolvidos permitiu que você resolvesse exercícios de forma mais crítica e não apenas por aplicação mecânica de regras/fórmulas.	0	0	1	25	0	0	2	50	1	25
Você teve mais oportunidade de construir estratégias, replanejar e, com isso, construir conhecimentos importantes por si mesmo	0	0	0	0	1	25	3	75	0	0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

A quarta questão do inquérito visava identificar a opinião dos alunos sobre atividades para serem trabalhadas em grupo durante as aulas. Pelos dados apresentados na Tabela 5, percebe-se que foi unânime a concordância de que as atividades permitiram mais compartilhamento de ideias com os colegas, e também de que esse momento promoveu uma oportunidade de aprendizagem uns com os outros através das discussões. No entanto, esse último posicionamento dos alunos é contraditório, primeiro porque em uma das respostas do item três do inquérito, a minoria reconheceu que a RP promove maior participação; e segundo, em razão dos discentes não terem percebido que estavam aprendendo um conteúdo enquanto resolviam os problemas. Em relação à opinião sobre tempo reservado para atividades ser suficiente, foi divergente na turma, 50% discordaram dessa afirmação, enquanto 25% concordaram, e o restante mostrou indiferença. Nesse caso, infere-se que essa discordância pode ter ocorrido devido a necessidade de alguma atividade ser finalizada em casa por algum dos grupos.

Tabela 5 - Respostas em relação às atividades realizadas em grupo

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Permitiram que você expusesse suas ideias e as compartilhasse com seus colegas.	0	0	0	0	0	0	4	100	0	0
Você teve a oportunidade de aprender com seus colegas durante as discussões em grupos.	0	0	0	0	0	0	2	50	2	50
O tempo reservado para a realização de atividades em grupo foi suficiente.	1	25	1	25	1	25	1	25	0	0

Fonte: Dados da Pesquisa (2022).

O quinto item do questionário estava associado aos recursos utilizados na sequência de atividades. A Tabela 6 mostra que, por unanimidade, houve concordância em relação a adequação dos recursos didáticos adotados para a formalização. Esse resultado converge com as opiniões expostas pelos alunos, sendo algumas, inclusive, transcritas na seção anterior, pois o acesso a diferentes materiais, virtuais ou concretos, por exemplo, permitiu que os próprios alunos identificassem e usassem aquele que lhes permitia melhor interpretação e compreensão do conteúdo.

Tabela 6 - Respostas em relação aos recursos utilizados na sequência de atividades

Afirmação	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Os recursos didáticos (tais como, quadro e giz, Datashow, softwares gráficos, materiais manipuláveis...) utilizados para a formalização dos conteúdos foram adequados.	0	0	0	0	0	0	3	75	1	25

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A Tabela 7 apresenta os dados coletados nas respostas do quinto item do inquérito, que visava identificar a concordância dos alunos sobre as dificuldades em trabalhar com a MEAAMaRP. Nesse sentido, 50% dos discentes discordam que preferem realizar atividades sozinhos, enquanto os outros 50% mostram indiferença ou concordância. E, de forma unânime, discordaram que não tinham afinidade com os demais colegas para desenvolver trabalhos em grupo. Essas informações demonstram que, apesar de 50% da turma ter favorecido a atividade individual ou demonstrou indiferença na primeira afirmação, todos os alunos não demonstraram problemas de afinidade em realizar atividades com os demais colegas, o que viabiliza a realização de mais atividades em grupo. Em relação ao ambiente silencioso para a realização de atividades, apenas 25 concordaram com essa necessidade, ao contrário dos demais que mostraram indiferença. E a última afirmação, referente ao hábito dos alunos terem aulas tradicionais, com trabalhos extraclasses e sem discussões, revelou uma divergência na turma. Isso porque, metade dos alunos discordaram e a outra metade concordou com a afirmação. Esse dado mostra que, possivelmente, os alunos podem ter tido aulas tradicionais em que tinham tempo para realizar as atividades em sala ou tinham oportunidade de discutir sobre o assunto, ou também, tiveram oportunidade de ter aulas não tradicionais.

Tabela 7 - Respostas em relação às dificuldades em trabalhar com a MEAAMaRP

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Você prefere realizar as atividades sozinho.	0	0	2	50	1	25	1	25	0	0
Você não tinha muita afinidade com os demais colegas para desenvolver trabalhos em grupos.	2	50	2	50	0	0	0	0	0	0
Você precisa de silêncio para pensar sobre as atividades propostas.	0	0	0	0,0	3	75	0	0	1	25

Você sempre esteve acostumado com aulas tradicionais em que os trabalhos (quando têm) são realizados em horários extraclasse sem haver a discussão das atividades propostas em sala.	0	0	2	50	0	0	2	50	0	0

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O sétimo item do questionário estava relacionado à percepção dos alunos acerca da importância da FP. De acordo com os dados apresentados no Tabela 8 foi unânime a concordância de que a FP desafia a pensar. Em contrapartida, 75% consideraram indiferente a afirmação de que a FP incentiva a criatividade. Esse resultado é divergente se comparado aos problemas formulados pelos alunos e ao processo de desenvolvimento desses, pois, como relatado pela docente regente da turma, os alunos se preocuparam em propor problemas contextualizados, e, portanto, precisaram utilizar a criatividade para encontrar uma temática e estruturá-la em um problema que utilizasse o Princípio de Cavalieri. Já em relação a afirmação de que a FP deve fazer parte da aprendizagem de todos os conteúdos matemáticos, 75% dos alunos discordaram. E referente a preparação da FP para responder questões do cotidiano, 50% dos alunos concordaram.

Tabela 8 - Respostas em relação à importância da FP

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
A FP desafia a pensar.	0	0	0	0	0	0	3	75	1	25
A FP incentiva a criatividade.	0	0	0	0	3	75	0	0	1	25
A FP deve fazer parte da aprendizagem de todos os conteúdos matemáticos.	0	0	3	75	1	25	0	0	0	0
A FP me prepara para responder a situações do cotidiano.	0	0	0	0	2	25	2	25	0	0

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A última questão fechada do questionário almejava identificar a opinião dos discentes a respeito da MEAAMaRP utilizada na sequência de atividades. A Tabela 9 apresenta o resultado dos dados coletados, os quais indicam que 75% dos alunos gostaram da metodologia de RP, e 75% afirmaram terem gostado devido ao maior dinamismo das aulas. Contudo, essa última informação diverge com um dos resultados do terceiro item do inquérito, em que a maioria dos alunos discordou que a RP promove maior participação. Portanto, percebe-se que os alunos não conseguiram associar o dinamismo nas atividades propostas com a necessidade de uma participação mais ativa no desenvolvimento dessas. E ainda, 75% concordaram que a metodologia deveria ser utilizada para o ensino de outros conteúdos. Em relação ao aluno se tornar mais autônomo em seus estudos, 50% concordaram, 25% consideram indiferente e 25% discordam; porém, foi unânime a concordância de que o aluno torna-se mais participativo nas aulas. Além disso, 50% concordaram com a afirmação que o professor não deve propor exercícios para que o aluno tente resolver sem que ele tenha explicado o conteúdo anteriormente. Entretanto, esse resultado é divergente às opiniões sobre a metodologia dadas anteriormente, afinal uma das principais características da MEAAMaRP é que o problema seja o ponto de partida para a construção de novos conhecimentos. E por último, 50% dos discentes concordaram que o aluno passa a questionar mais quando é utilizada a metodologia da RP. Contudo, essa informação também não entra em concordância com a unanimidade apresentada em relação à participação ativa dos alunos, uma vez que ao se tornar mais questionador, o estudante deixa de ser um agente totalmente passivo.

Tabela 9 - Opinião em relação à MEAAMaRP utilizada na sequência de atividades

Afirmações	DT		D		I		C		CT	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Não gostei da metodologia de RP, pois prefiro aulas tradicionais em que o professor explicar o conteúdo e resolve exercícios no quadro.	1	25	2	50	1	25	0	0	0	0
A metodologia de RP deveria ser utilizada para o ensino de mais conteúdos.	0	0	0	0	1	25	1	25	2	50
Gosto da metodologia de RP porque as aulas são mais dinâmicas.	0	0	0	0	1	25	2	50	1	25
O aluno passa a ter mais autonomia em seus estudos.	0	0	1	25	1	25	1	25	1	25
O professor permite que o aluno torne-se mais participativo nas aulas.	0	0	0	0	0	0	3	75	1	25
Acho que o professor não deve propor exercícios para que o aluno tente resolver sem que ele tenha explicado o conteúdo antes.	1	25	1	25	0	0	2	50	0	0
O aluno passa a questionar mais nas aulas	0	0	0	0	2	50	1	25	1	25

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

O último item do questionário, a questão aberta, tinha o objetivo de abrir espaço para o aluno expor sua opinião, fazer sugestões, críticas e comentários sobre a metodologia utilizada, as atividades realizadas, as dificuldades encontradas e outras questões que julgasse relevante. Entre os quatro alunos que responderam o questionário, somente dois expuseram comentários, com aspectos positivos e negativos, sendo estes últimos encontrados com maior frequência.

Os aspectos negativos foram indicados pelos dois estudantes. Uma menção que teve recorrência em ambos foi o cansaço. Um dos alunos citou que o excesso de atividades tornou as aulas cansativas, e como consequência, o fez perder o foco com facilidade (Figura 48). Por outro lado, o outro aluno considerou que as atividades propostas foram muito parecidas, e por isso tornou a dinâmica mais cansativa (Figura 49). Ainda, nesse comentário, o aluno indicou que a sequência não precisava ter tantos direcionamentos.

Figura 48 - Opinião de um estudante sobre a sequência de atividades

O excesso de atividades fez com que as aulas se tornassem bem cansativas e fosse fácil perder o foco.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Figura 49 - Opinião de um estudante sobre a sequência de atividades

Muitas atividades parecidas fez com que a dinâmica se tornasse um pouco cansativa.

A sequência de resolução poderia ser livre sem tanto direcionamento.

O arroz é uma boa opção, melhor ainda arroz com feijão. Mas como material para encher os sólidos talvez não seria a melhor opção, os grãos não se "assentam" facilmente ou em pouco tempo. Talvez um outro grão de tamanho menor e formato esférico seria melhor para essa etapa.

Fonte: Dados da pesquisa (2022).

E por último, o aspecto parcialmente positivo, mencionado por apenas um dos estudantes (Figura 49), citou que a utilização do arroz é uma boa opção, mas sugere que talvez o uso de grãos não seja a melhor opção, pois eles não têm a capacidade de se assentar. Apesar disso, propõe que se forem usados grãos, utilizar outros menores e de formato esférico.

Diante dos comentários feitos pelos discentes, torna-se evidente a insatisfação dos alunos no que se refere a quantidade de atividades, seja pela característica de serem semelhantes ou não. Sobre esse aspecto de semelhança, uma hipótese para essa indicação é que como a maioria das questões envolvia o Princípio de Cavalieri, ou seja, geralmente, a conclusão final era de igualdade de volumes ao comparar dois ou mais sólidos. Possivelmente, esses resultados de igualdade podem ter gerado a sensação de que as questões eram repetitivas, apesar de adotarem para resolução ora material concreto, ora aplicativo ou resoluções teóricas. Além disso, quando a atividade foi elaborada, não se imaginava que os alunos fariam todas as medições visto que era fácil de comparar os materiais concretos e perceber que vários tinham a mesma base e a mesma altura, com isso precisariam fazer bem menos medidas e cálculos.

Além disso, a indicação de que o uso de grãos não é a melhor opção para a atividade de simulação era esperada, afinal durante o desenvolvimento das atividades, e sobretudo, na plenária, muito se discutiu sobre a influência dos espaços “livres” deixados pelos grãos. Sem contar que, para um dos grupos, essa questão que envolvia aproximações foi de tamanha importância, que não os permitiu concluir a igualdade de volumes entre os sólidos.

Portanto, o questionário aplicado revelou que a metodologia de RP foi bem aceita pela maioria dos alunos, e que esses conseguiram identificar as principais características e potencialidades que a RP pode proporcionar, pois concordaram com a maioria das afirmações positivas acerca de metodologia.

Além disso, em relação aos recursos didáticos utilizados e as funções atribuídas a eles ao longo da sequência de atividades, os estudantes conseguiram reconhecer as vantagens e desvantagens no uso de cada recurso. E, de certo modo, as perspectivas apresentadas por eles levaram em conta também os recursos que promoviam mais facilidade de aprendizagem individual.

Em relação à FP, nota-se que os alunos não conseguiram identificar com clareza uma das principais características dessa prática: a criatividade. Entretanto, conseguiram perceber que, apesar de não ser uma atividade usual, o ato de formular problemas tem contribuições na autonomia do aluno, pois exige ainda mais a capacidade de pensar, desenvolvendo o raciocínio lógico.

Diante disso, a partir dos dados coletados no questionário, nota-se que não ficaram totalmente claras, para os estudantes, as características da MEAAMeRP. Porém, eles perceberam que o aluno passa a ser mais ativo no processo de aprendizagem, entrando em concordância com as potencialidades dessa descritas na literatura.

7 REFORMULAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Neste capítulo apresentarei as alterações que foram sugeridas e que as pesquisadoras sentiram necessidade de fazer na sequência após a aplicação descrita no capítulo 6. Tais mudanças deram origem a versão 2 e 3.

7.1 VERSÃO DOIS DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nessa seção, apresentarei a versão 2 da sequência de atividades (Apêndice B), que possui adaptações e reformulações da versão 1, compreendendo desde a melhoria dos enunciados das questões até a inserção de novas atividades.

A primeira modificação refere-se a retirada da pesquisa inicial sobre Bonaventura Cavalieri, que inicialmente seria proposta aos alunos dias antes da aplicação da sequência. Essa retirada deu-se por dois motivos. O primeiro por percebermos, na primeira aplicação, que embora as pesquisas feitas tenham sido completas, apresentando o Princípio de Cavalieri, não foram suficientes para que os alunos associassem os resultados das atividades experimentais da sequência ao princípio. E segundo, a mudança deve-se pela própria proposta da MEAAMaRP, que visa a construção de um novo conteúdo matemático, considerado o mais adequado para a resolução do problema gerador envolvido, mas que ainda é desconhecido pelos alunos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021), afinal o problema deve possibilitar construí-lo por meio de outros conhecimentos prévios.

Outra alteração realizada está associada à explanação inicial feita pela docente sobre a MEAAMaRP, a impressão 3D e o FAB3D antes de iniciar a aplicação, em que propomos que seja enfatizado que as respostas nas atividades experimentais podem ser consideradas com aproximações. Isso porque, na aplicação, a ausência desse aviso impediu que um dos grupos participantes pudesse obter as conclusões matemáticas esperadas.

Além disso, o enunciado do problema 1 da sequência foi alterado, sobretudo, em razão dos apontamentos feitos pelos alunos na aplicação, de que as atividades foram repetitivas. Sendo assim, inserimos no item (ii) do problema 1 uma frase (em destaque no Quadro 5) de modo a induzir a comparação visual das alturas e bases dos sólidos sem realizar medições, com o objetivo de também otimizar o preenchimento das medidas nos quadros. Quanto aos demais itens dessa questão, não houve alterações.

Quadro 5 – Item (ii) do problema gerador 1

1- Simule o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz.

i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?
b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?
c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meçam os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2. **Caso percebam, sem realizar as medições, que alguns materiais possuem mesma base e/ou mesma altura, vocês poderão utilizar essa constatação para otimizar o tempo no preenchimento dos valores nos quadros.**

Quadro 1 – Medidas do Cilindro e dos Prismas

	Prisma quadrangular		Prisma hexagonal		Cilindro	
	Menor	Maior	Menor	Maior	Menor	Maior
Aresta da base						
Altura						
Área da base						
Volume						

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

Quadro 2 – Medidas do Cone e das Pirâmides

	Cone	Pirâmide Quadrangular	Pirâmide hexagonal
Aresta/raio da base			
Altura			
Área da base			
Volume			

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?

Fonte: Autora (2023).

No problema gerador 2 alguns enunciados também foram reorganizados. No texto inicial (Quadro 6), optamos por orientar, inicialmente, apenas o uso do material concreto necessário para o preenchimento da tabela do item (i), sem indicar ainda o uso do aplicativo do GeoGebra, conforme ocorria na versão 1 da sequência. Assim, o aplicativo passou a ser mencionado no item (ii) (Quadro 6) do problema. Desse modo, a proposta é que, primeiro o aluno observe possíveis igualdades e/ou diferenças nas medidas feitas com o material concreto, e posteriormente, perceba, no aplicativo, que embora os valores de raios e alturas sejam alterados, as relações identificadas no item (i) permanecem válidas. Ademais, a tabela no item (i) e o enunciado do item (iii) permaneceram inalterados.

Quadro 6 – Enunciado e item (ii) do problema gerador 2

2 – Explorem o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base.

i) Meçam os elementos do material concreto e preencham os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

	Cone	Pirâmide
Aresta/raio da base		
Altura total		

Área da base		
Aresta/raio da seção		
Altura da seção		
Área da seção		
Volume Total		

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) **Explorem o aplicativo do Geogebra: www.geogebra.org/m/u2bah2xj (observem que há várias perguntas para guiar a experiência).** A partir das simulações realizadas, o que vocês podem concluir?

iii) Vocês observaram se existe alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

3 - Com base no que vocês observaram nas atividades 1 e 2, vocês conseguem pensar em um resultado que pode ser válido para se trabalhar com volumes? Expliquem.

Fonte: Autora (2023).

Além disso, foi feita a inserção de uma nova questão, o problema 4 (Quadro 7), para o estudo da proporcionalidade entre alturas, arestas e áreas de dois tetraedros quaisquer, o que envolveu a elaboração de um novo aplicativo no GeoGebra para o estudo dessas relações. No item (a), que propõe o uso desse aplicativo ilustrado na Figura 50, o objetivo é que ao manipular a altura do tetraedro menor que se originou do tetraedro maior, perceba-se que existe uma relação entre alturas, arestas e áreas, e que essas se mantêm embora os valores sejam alterados. A intenção é que por meio disso o aluno identifique as relações de proporcionalidade existentes no tetraedro, que serão úteis no item (b) do problema.

Quadro 7 – Novo problema 4

4. a) Explorem o aplicativo: https://www.geogebra.org/m/esffe6wk e respondam as perguntas a seguir.
i) Observem o valor obtido na relação das alturas das pirâmides, e na proporcionalidade entre as arestas da pirâmide maior e menor. O que se pode inferir ao comparar esses valores?
ii) Existe alguma relação entre os triângulos ΔABC e ΔEFG? Expliquem.
iii) Existe alguma relação entre a razão obtida na relação das alturas e a razão das áreas da seção (ΔEFG) e da base (ΔABC) da pirâmide menor e maior? Caso afirmativo, qual é a relação observada?

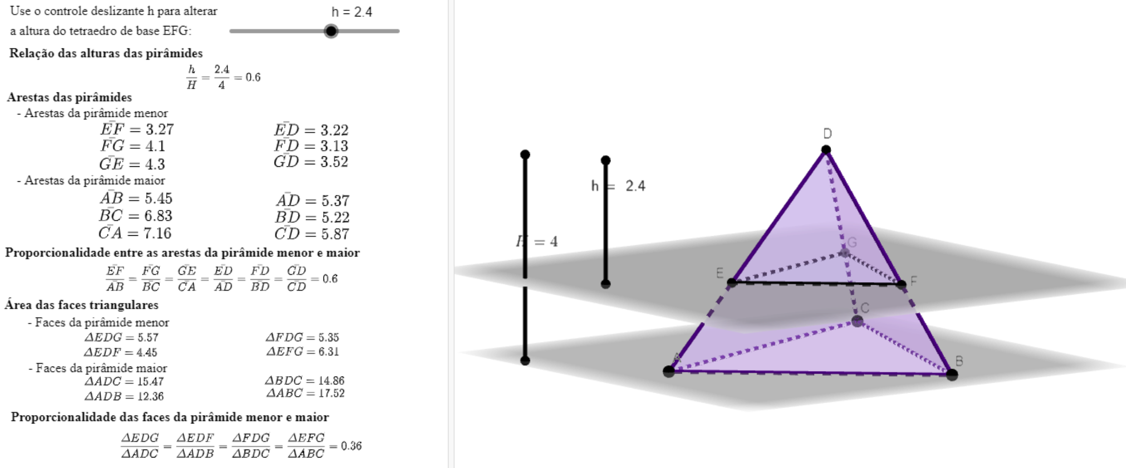
b) O seguinte resultado é um Teorema importante de geometria:

> Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos que:
> • As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
> • A seção e a base são triângulos semelhantes.
> • A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão das alturas dos tetraedros. (DOLCE; POMPEO, 2013).

No aplicativo, escolham alguns valores para h para fazer simulações e observar o que acontece com as razões das alturas, das arestas e das áreas das faces. Após fazer essa observação, retorne ao teorema para investigar se os resultados da simulação e do teorema são os mesmos. Justifique a sua resposta.

Fonte: Autora (2023).

Figura 50 – Relações no tetraedro



Fonte: Autora[13] (2023).

Nesse item, por sua vez, foi resgatado o teorema que foi apresentado no problema 4 (Quadro 4) da versão 1 da sequência, associado também às relações no tetraedro. Essa modificação deu-se em razão do aplicativo inserido no novo problema 4 trazer relações que auxiliam na compreensão do que é proposto pelo teorema, e principalmente, por apresentá-las de forma visual e dinâmica, diminuindo a abstração do modo formal e teórico que havia sido apresentado o teorema na versão 1 da sequência.

Como consequência disso, a questão 4 da versão 1 (Quadro 4) passou a ser a questão 5 da versão 2 da sequência, e não possui mais o teorema. Até porque, esse último tornou complexa e confusa a questão durante a aplicação. Sendo assim, a inserção do novo problema 4 e a realocação do teorema nesse último foi motivada justamente pelas dificuldades relatadas pelos alunos. Espera-se que, na versão 2 da sequência, a partir de um estudo mais aprofundado e cauteloso do tetraedro proposto no problema 4, os alunos sejam capazes de interpretar com mais facilidade as relações no problema 5.

A questão da decomposição de um prisma triangular (Quadro 4) da versão 1 da sequência também teve seu enunciado modificado para melhor orientar o aluno a interpretar e concluir o resultado esperado, visto que houve dificuldade na identificação das alturas e bases dos tetraedros. Assim, esse passou a ser o problema 6 da versão 2 da sequência (Quadro 8).

[13] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/esffe6wk

Quadro 8 - Problema 6

6 – Observe e analise o material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. Identifique e compare as bases e as alturas dos tetraedros. O que vocês podem afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

Fonte: Autora (2023).

Em suma, os problemas 4, 5 e 6 têm dois objetivos principais: verificar que a semelhança de triângulos permanece válida independente da altura que um tetraedro seja seccionado; e que ao tomar tetraedros distintos, desde que tenham a mesma área da base, pode-se concluir que o volume de cada um desses corresponde a um terço do volume de um prisma de base triangular.

Numa aplicação da sequência, ao serem finalizadas as resoluções dos seis problemas propostos, que compõem o problema gerador responsável pela construção do Princípio de Cavalieri, indicamos que o docente realize a plenária, conforme proposto a MEAAMaRP. Essa deve ser feita antes da proposição das demais atividades que fazem parte da última etapa do roteiro da metodologia, e que serão descritas no texto dessa seção em breve.

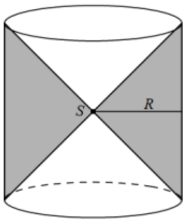
Na plenária, momento de discutir ideias e as soluções dos problemas, o docente deve incentivar os alunos a compartilharem e justificarem suas perspectivas, comparando diferentes soluções. Após debaterem sobre a solução de cada questão, os estudantes, junto ao docente, devem tentar chegar a um consenso sobre o resultado correto. Na sequência, o professor deve formalizar o conteúdo, confirmando assim as conjecturas obtidas no consenso. Para isso, disponibilizamos, no Apêndice G, um material em slides que possui os resultados de cada um dos seis problemas propostos na versão 2 da sequência de atividades. O material contém também a explanação inicial sobre a MEAAMaRP, que pode ser usada pelo docente no início da aplicação.

E por fim, foi reformulada a atividade do volume da esfera (Figura 45) e acrescentadas três novas propostas de atividades, que estão vinculadas a última etapa do roteiro da MEAAMaRP. É pertinente mencionar que, em uma possível aplicação, o docente poderá propor a atividade para ser desenvolvida em sala de aula ou extraclasse. Convém salientar que o professor poderá optar por não utilizar todas as quatro atividades propostas, assim como também poderá fazer modificações de forma a atender as especificidades de sua turma e do contexto que está inserido.

A atividade associada ao volume da esfera (Quadro 9) foi dividida em quatro itens. No enunciado principal, espera-se que o aluno compreenda como é formada uma anticlépsidra, percebendo sua relação com o cilindro e os cones, pois essa será necessária para o desenvolvimento dos demais itens da questão.

Quadro 9 – Problema esfera e anticlépsidra

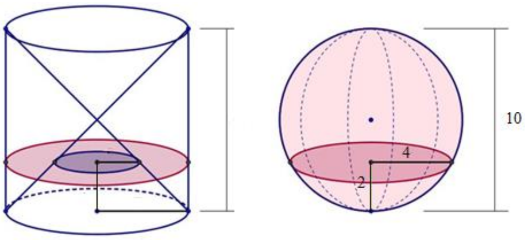
1. Uma anticlépsidra é o sólido obtido retirando-se de um cilindro dois cones, conectados pelo vértice, com bases nas bases do cilindro e altura igual a metade da altura do cilindro (veja a figura a seguir).



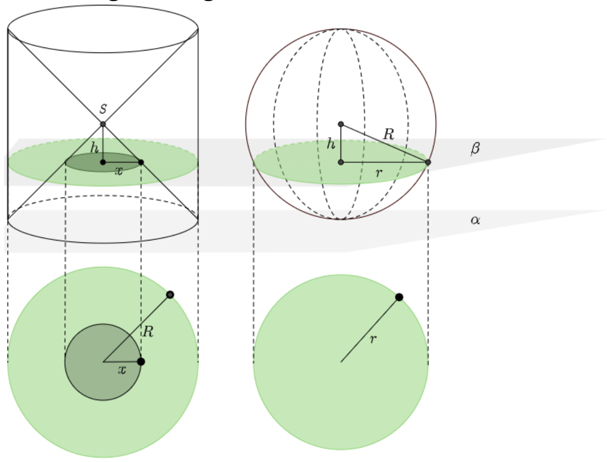
a) O material concreto (da esfera e da anticlépsidra) recebido para essa questão é composto por várias partes com as quais é possível montar uma esfera, uma anticlépsidra seções desses dois sólidos. O que vocês podem observar sobre a altura da esfera e da anticlépsidra? Ao comparar as seções desses sólidos o que pode ser constatado sobre a altura e sobre as áreas dessas seções?

b) No aplicativo https://www.geogebra.org/m/b7jfenux estão representadas uma esfera e uma anticlépsidra sendo possível manipular controles deslizantes que controlam o raio da esfera e a altura de um plano que seccionado esses dois objetos. Além disso, são propostas algumas reflexões (perguntas). O que vocês podem concluir ao manipular o aplicativo? Qual a relação entre a esfera e a anticlépsidra?

c) Considerando o material concreto e o aplicativo de que forma pode ser obtido o volume de uma calota esférica? Considerem a anticlépsidra ilustrada na figura a seguir ao lado esquerdo da esfera, determinem suas medidas e relacionem-na com a calota esférica de raio 4 cm e altura 2 cm.



d) Considere uma esfera e uma anticlépsidra de mesma altura, apoiadas numa mesma base e seccionadas por um mesmo plano, como na figura a seguir:



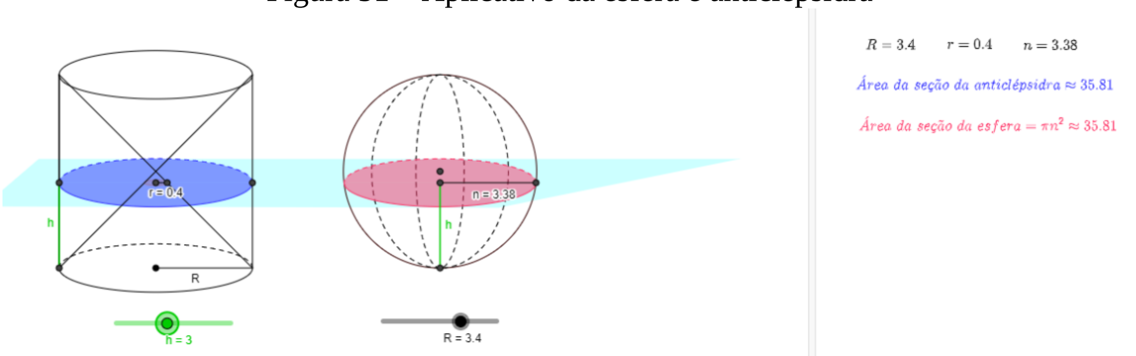
Expliquem como podem ser obtidos os raios do anel da seção da anticlépsidra e o raio do círculo da seção da esfera para determinar as áreas dessas seções a uma altura arbitrária h do plano em que ambas estão apoiadas.

Fonte: Autora (2023).

Diante disso, no item (a), espera-se que a partir do material concreto (Figura 45) os estudantes consigam identificar que as alturas da esfera e da anticlépsidra são iguais e, ainda, que ao serem cortadas por um plano a uma mesma altura, possuem seções de áreas iguais, considerando novamente as aproximações.

No item (b), propõe-se o uso do aplicativo do GeoGebra (Figura 51) para possibilitar a visualização da situação proposta no item (a) de modo dinâmico, pois através dos controles deslizantes e das indagações propostas no aplicativo, espera-se que o estudante perceba que as relações observadas no material concreto permanecem independente da altura do plano que secciona os sólidos. Com isso, o objetivo é que os estudantes identifiquem que as condições observadas atendem ao Princípio de Cavalieri, e por meio disso, concluam a igualdade de volumes.

Figura 51 – Aplicativo da esfera e anticlépsidra



Fonte: Autora[14] (2023).

Já no item (c) tem-se uma aplicação da conclusão obtida no item anterior, envolvendo um processo mais complexo de abstração, pois o intuito é que o discente identifique a relação da calota esférica com o cilindro e o tronco do cone que formam a anticlépsidra. Essa situação foi discutida na Figura 24 da Seção 3.5 deste trabalho.

E por último, no item (d) coloca-se em estudo como se obter as áreas das seções resultantes de um plano que secciona a esfera e anticlépsidra, que foi abordada na discussão acerca da Figura 19 e Figura 20 da Seção 3.4 do presente trabalho. Sendo assim, espera-se que os alunos consigam identificar as relações de semelhança de triângulos para a determinação das áreas solicitadas.

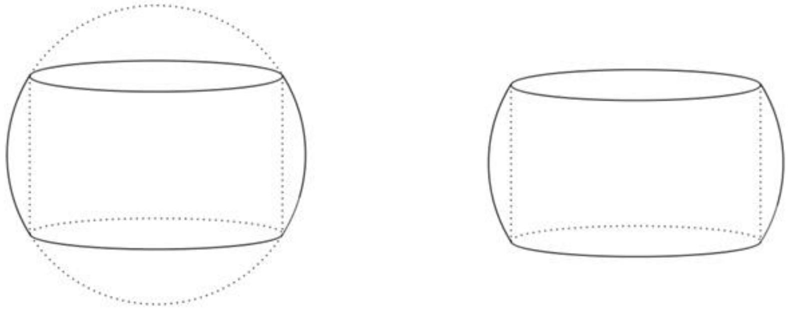
A segunda proposta de atividade (Quadro 10) refere-se ao principal diferencial da versão 2 da sequência se comparado a versão 1. Nessa situação, são propostos quatro itens

[14] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/b7jfenux

para o estudo do anel de guardanapo que envolvem a comparação das alturas, raios, seções e volumes de anéis de guardanapo.

Quadro 10 - Problema do anel de guardanapo

2. O anel de guardanapo é considerado o sólido que resta de uma esfera quando é retirado dela um cilindro circular reto, como ilustra a figura a seguir[15].



a) Para ficar mais claro esse sólido, observem alguns diferentes tamanhos de anéis de guardanapo no material concreto recebido. O que vocês podem perceber sobre os raios das esferas e dos cilindros que os originaram e sobre as suas alturas?

b) Explorem o aplicativo https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m para construir diferentes anéis de guardanapo, reflita sobre os questionamentos deixados no aplicativo. Que conclusões vocês chegaram?

c) Considerem dois anéis de guardanapo A_1 e A_2, sendo A_1 obtido pela retirada de um cilindro de raio 3 cm de uma esfera de raio 5 cm e A_2 obtido pela retirada de um cilindro de raio $\sqrt{20}$ cm de uma esfera de raio 6 cm. Utilizem o aplicativo https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m para fazer simulações e identificar relações entre esses anéis de guardanapo.

i) Determinem a altura desses anéis;
ii) Determinem área das seções desses anéis obtidas a uma mesma altura;
iii) Determinem o volume desses anéis.

d) Como pode ser calculado o volume de um anel de guardanapo?

Fonte: Autora (2023).

Embora no enunciado principal da atividade seja apresentado de que forma é obtido um anel de guardanapo com apoio de uma figura ilustrativa, o item (a) propõe o uso do material concreto (Figura 52) para auxiliar esse entendimento. Nesse item, o intuito é que, ao identificar a parte correspondente da esfera e do cilindro nos anéis de guardanapo, o aluno perceba que a altura dos anéis é igual, e que os raios da esfera e do cilindro que originam cada um desses são diferentes.

---

[15] UDESC, Universidade do Estado de Santa Catarina. **Caderno de Prova**: vestibular 2019.2. Vestibular 2019.2. 2019.

Figura 52 - Anéis de guardanapo em material concreto

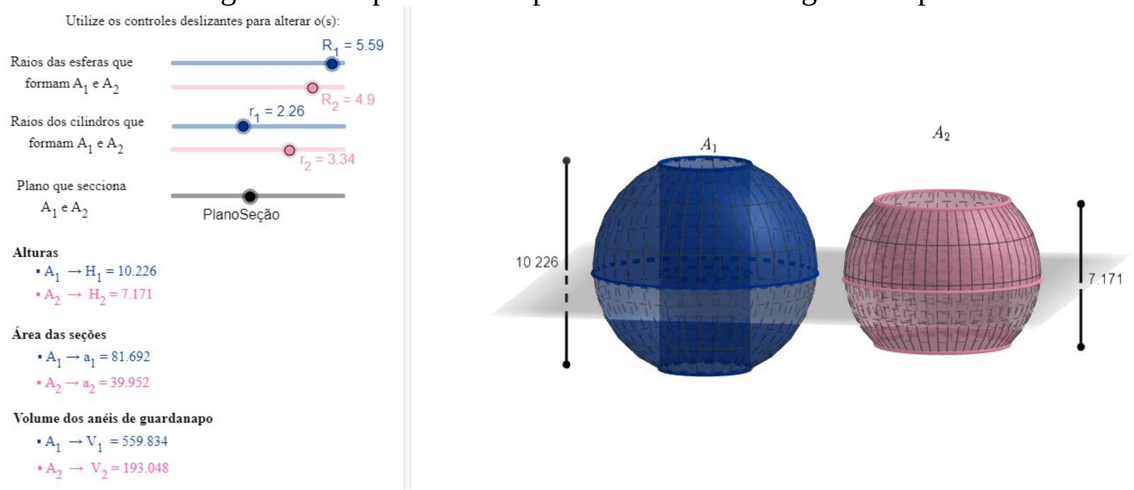
Fonte: Acervo do FAB3D (2023).

Já o item (b) indica o uso de um aplicativo no GeoGebra (Figura 53) para o estudo de dois anéis de guardanapo, possibilitando a alteração dos raios da esfera e do cilindro que formam cada anel, e também do plano que secciona esses sólidos. Junto ao aplicativo são propostas indagações que devem direcionar a identificação das condições para a aplicação do Princípio de Cavalieri nos anéis de guardanapo, tais como: o que pode-se observar em cada anel quando é movimentado somente o controle deslizante R_1, R_2, r_1 ou r_2; o que acontece com as áreas das seções e o volume dos anéis quando esses têm aproximadamente a mesma altura; o resultado matemático que garante as conclusões obtidas anteriormente; e, por fim, se é possível ter anéis de guardanapo distintos de mesmo volume. Esse último questionamento foi feito justamente para evitar que os alunos possam restringir a simulação de anéis de mesma altura a partir de dois anéis formados por esferas de raios iguais e por cilindros de raios iguais. E assim, seja possível perceber que o volume depende apenas da altura, e que mesmo que os anéis sejam formados por esferas e cilindros de diferentes raios, terão volumes iguais se suas alturas forem iguais.

No item (c) esse aplicativo continuará sendo utilizado, contudo a proposta é que, a partir de dados numéricos atribuídos aos anéis de guardanapo no enunciado seja obtido, pelo aplicativo, de forma aproximada, as alturas, as áreas das seções e o volume desses anéis.

E por último, no item (d) o objetivo é que o aluno desenvolva a interpretação por trás do volume apresentado no aplicativo, percebendo que é possível relacionar as fórmulas do volume da esfera, das calotas esféricas e do cilindro para a determinação do volume dos anéis, conforme discutido na Seção 3.5 deste trabalho.

Figura 53 – Aplicativo do problema do anel de guardanapo



Fonte: Autora[16] (2023).

A terceira proposta de atividade (Quadro 11), solicita a elaboração de um problema matemático usando o Princípio de Cavalieri, tendo uma imagem como elemento disparador e um aplicativo dinâmico no GeoGebra (Figura 54) para auxiliar no processo de elaboração do problema. O intuito é que os estudantes identifiquem que os sólidos geométricos das embalagens de molho de tomate da imagem são os mesmos do aplicativo do GeoGebra; que a partir das relações mostradas no aplicativo, consigam identificar as condições do Princípio de Cavalieri; e, assim, estruturarem um problema matemático conforme solicitado.

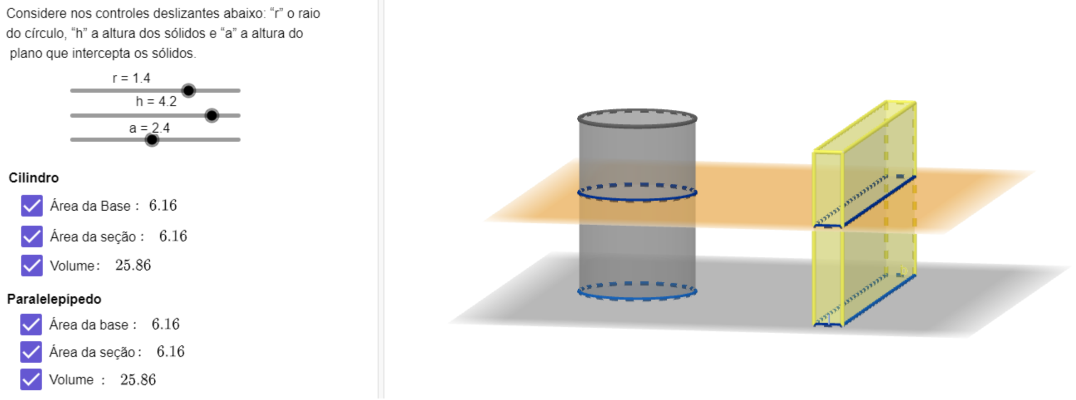
Quadro 11 – Problema do molho de tomate

Elabore um problema matemático usando a figura abaixo, de modo que a solução do problema criado empregue o Princípio de Cavalieri. Utilize o aplicativo do GeoGebra 3D https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu para auxiliar na elaboração e/ou resolução.

Fonte: Autora (2023).

[16] Disponível em https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m

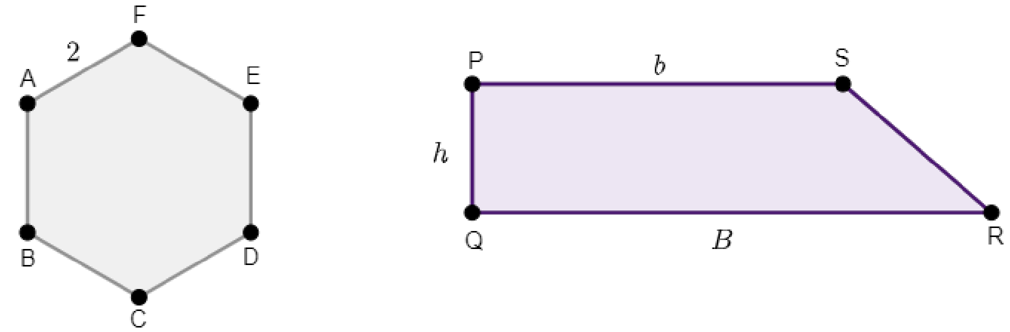
Figura 54 - Aplicativo do problema do molho de tomate



Fonte: Autora[17] (2023).

Na quarta e última proposta de atividade, o objetivo é que seja elaborado um problema matemático usando o Princípio de Cavalieri a partir do hexágono regular e do trapézio ilustrados na Figura 55. Para isso, espera-se que o aluno construa dois sólidos cujas bases são esses polígonos, e perceba que é necessário que as alturas dos sólidos sejam iguais, e as áreas dos polígonos também para que sejam atendidas as condições para o uso do princípio, exigindo assim a determinação de b, h e B no trapézio para que isso de fato ocorra.

Figura 55 – Problema dos polígonos



Fonte: Autora (2023).

As demais questões da versão 1 da sequência que não foram mencionadas na presente seção não receberam alterações. Portanto, a versão 2 da sequência de atividades é constituída por essas, pelas questões reformuladas e pelas novas atividades que complementam o estudo e aplicação do Princípio de Cavalieri. Inclusive, essa versão aprimorada foi simplificada, originando a versão 3 da sequência de atividades, que será apresentada na próxima seção.

[17] Disponível em https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu

7.2 VERSÃO TRÊS DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Nessa seção, irei apresentar a versão 3 da sequência de atividades (Apêndice C) que é uma simplificação da versão 2, sem questões demonstrativas. Isso porque, tem como público-alvo de aplicação estudantes do EM.

Os problemas 1, 2 e 3 dessa versão simplificada são os mesmos propostos da versão 2 da sequência. Optamos por manter essas atividades porque condizem com os conteúdos de geometria desenvolvidos desde o EF, e, portanto, os estudantes estarão munidos com os conhecimentos prévios para a resolução das atividades.

O problema 4 da versão 2 foi também foi retirado, pois apresentava o teorema associado às relações de proporcionalidade no tetraedro, e geralmente, os estudantes não estão adaptados a estudar conteúdos matemáticos através de um texto teórico e formal, característico de teoremas.

Além disso, o problema 5 proposto na versão 2 da sequência também foi retirado dessa nova versão, afinal para compreendê-lo seria necessário o teorema do item (b) do problema 4 que foi retirado.

Apesar dessas mudanças, sugerimos que o professor aplique os problemas 1, 2 e 3 com os estudantes, e entre com as etapas de plenária, consenso, e formalização, de acordo com o roteiro da MEAAMaRP. E, na formalização, utilize o aplicativo do tetraedro do problema 4 para que, junto com os alunos, percebam as relações existentes no sólido; e, em seguida, apresente o teorema, pois é necessário que os alunos também se acostumem a interpretar resultados matemáticos formais; e, por fim, discuta com auxílio do aplicativo o resultado ilustrado no problema 5.

E por fim, realizamos alterações nas propostas de atividades vinculadas à última etapa do roteiro da MEAAMaRP. Na primeira atividade, relacionada a esfera e a anticlépsidra, optamos por retirar o item (d), visto que ele exigiria um olhar matemático mais complexo, já que não utiliza dados numéricos, exigindo discussões apenas com variáveis, o que dificultaria a abstração na aplicação da semelhança de triângulos, por exemplo, que seria necessária para a solução.

Ademais, também foi retirada a segunda atividade, sobre o anel de guardanapo, devido à necessidade de uma percepção de geometria espacial mais elaborada e à comparação de vários elementos como a esfera, o cilindro e a calota da esfera, sendo necessário em alguns definir dimensões em função de outras, como a altura do cilindro que será retirado da esfera.

Já a terceira e quarta propostas foram mantidas, afinal, embora em ambas seja trabalhado com a elaboração de problemas, uma prática as vezes pouco usual para os estudantes, as propostas abordam o conteúdo de polígonos e sólidos geométricos já conhecidos. Com base nisso, espera-se que com esses conhecimentos prévios bem definidos, o desafio esteja em de fato entender e identificar as condições para aplicar o Princípio de Cavalieri, incentivando também o uso da criatividade na criação dos problemas, como o do molho de tomate, associado ao cotidiano.

Portanto, a versão 3 da sequência tem uma estrutura similar as outras versões, porém foi reformulada para ficar mais adequada ao público-alvo de aplicação.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentadas sequências de atividades para o estudo de volumes pelo Princípio de Cavalieri mediado pela MEAAMaRP, utilizando também o material concreto e aplicativos dinâmicos no software GeoGebra. Sendo assim, os objetivos almejados foram atingidos.

Por meio da experiência vivenciada pela turma do curso de Licenciatura em Matemática referente à primeira versão da sequência de atividades, os estudantes tiveram a oportunidade de estudar o Princípio de Cavalieri de forma experimental, visual e dinâmica. E durante todo esse processo, mantiveram-se ativos, enquanto as pesquisadoras e a professora regente atuaram como mediadoras, conforme proposto pela MEAAMaRP. Além disso, a plenária promoveu um momento rico, principalmente, pelos próprios alunos realizarem uma avaliação das resoluções elaboradas, o que refletiu também na indicação de sugestões para melhoria da sequência aplicada. Assim, consideramos que, embora os alunos tenham percebido somente no final que as atividades precisavam da aplicação Princípio de Cavalieri, a experiência gerou conhecimentos para os estudantes no que diz respeito a funcionalidade desse resultado matemático no cálculo de volumes, e às contribuições do material concreto e dos aplicativos no GeoGebra no processo de aprendizagem. Diante disso, consideramos que a experiência tratou-se de um momento significativo, sobretudo, por ter acontecido enquanto professores em formação.

Como resultado disso, as reformulações de enunciados e inserções de novas atividades deram origem à versão 2 da sequência de atividades, que, posteriormente, foi modificada para ser aplicada também aos estudantes do Ensino Básico, tornando-se a versão 3. Esse processo envolveu, ainda, a elaboração de novos aplicativos no GeoGebra para proporcionar um estudo mais detalhado de situações que não estavam sendo trabalhadas explicitamente, como as relações do tetraedro.

Diante disso, com as sequências de atividades reformuladas, tem-se a perspectiva de novas aplicações para uma turma do Ensino Médio e de outras disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática. Certamente, essas experiências irão prover novas perspectivas e reflexões acerca das sequências.

Pessoalmente, em virtude deste trabalho, tive a oportunidade de aprimorar meus conhecimentos em relação à geometria espacial por estudar o volume de sólidos geométricos pelo Princípio de Cavalieri, um resultado matemático com o qual até então possuía pouca familiaridade. Além disso, os estudos que realizei sobre a MEAAMaRP, desde os aprofundamentos teóricos até a participação de eventos acerca dessa temática, foram fundamentais para a construção de uma nova perspectiva, como futura professora, sobre o ensino de matemática, e principalmente, sobre o que de fato é a RP como metodologia. Os conhecimentos provenientes dessa experiência possibilitaram-me desenvolver sequências de atividades que fazem uso do material concreto e do GeoGebra 3D, que foram uma motivação complementar no processo de elaboração. Isso porque sempre tive grande apreço pelo aprendizado através de objetos palpáveis, ao mesmo tempo que a tecnologia tornou-se uma área de grande interesse no EM, quando pude desenvolver habilidades na área de programação, devido ao curso de informática que cursava de forma integrada. Realizar este trabalho foi de fato uma realização pessoal e profissional, pois consegui unir o material concreto e a tecnologia, como recursos significativos no ensino para mim, com uma metodologia de ensino antes desconhecida, e que transformou-se, particularmente, em uma das tendências matemáticas mais significativas e apreciadas.

Sendo assim, desde os aspectos teóricos às discussões desenvolvidas neste trabalho, espero que as sequências de atividades propostas possam inspirar e auxiliar docentes no desenvolvimento de seus trabalhos em sala de aula, proporcionando uma experiência mais significativa e compreensível do estudo de volumes aos estudantes.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o computador à resolução de problemas fechados**: análise de uma experiência. 2005. 370 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/102164.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; POSSAMAI, Janaína Poffo. Proposição de Problemas: possibilidades e relações com o trabalho através da resolução de problemas. **Com A Palavra O Professor**, Vitória da Conquista, v. 7, n. 18, p. 153-172, maio 2022.

ALTOÉ, Renan Oliveira. **Formulação de Problemas do Campo Conceitual Multiplicativo no Ensino Fundamental**: uma prática inserida na metodologia de resolução de problemas. 2017. 229 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

ALTOÉ, Renan Oliveira; FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira. Formulação de Problemas em Matemática: uma prática inserida na abordagem metodológica de resolução de problemas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12°, 2016, São Paulo. **Anais.** São Paulo: Sbem, 2016. p. 1-8. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4568_3378_ID.pdf. Acesso em: 10 fev. 2023.

ARAÚJO, Luís Cláudio Lopes de; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Exato, 2010.

BASNIAK, Maria Ivete; LIZIERO, André Rafael. A IMPRESSORA 3D E NOVAS PERSPECTIVAS PARA O ENSINO: possibilidades permeadas pelo uso de materiais concretos. **Revista Observatório**, *[S. l.]*, v. 3, n. 4, p. 445–466, 2017. Disponível em: https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/observatorio/article/view/3321. Acesso em: 27 fev. 2023.

BENK, Polyana.**O volume da esfera**: de Arquimedes ao cálculo diferencial e integral. 2017. 72 páginas. Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2017

BENK, Polyana; SILVA, Sérgio Marconi da; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; SIPLE, Ivanete Zuchi. O Princípio de Cavalieri: numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais. **II Colóquio Luso-Brasileiro de Educação**, v. 1, p. 685-696, 2016.

BOAVIDA, Ana Maria; PAIVA, Ana Luisa; CEBOLA, Graça; VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa. **A experiência matemática no Ensino Básico**: programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação, 2008. Disponível em: https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/5566/1/A_experiencia_matematica_no_ens_basico.pdf. Acesso em: 13 fev. 2023.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto, 1994.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: Mecseb, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclo do Ensino Fundamental - Matemática. Brasília: Mecsef, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 1999.

CALDATTO, Marlova; PAVANELLO, Regina. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, v. 24, n. 1, p. 103-128, 2015.

COLAÇO, Amanda Zanelato; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de; AZEVEDO, Eliane Bihuna de. O Princípio de Cavalieri por meio da Resolução de Problemas: uma experiência com formação de professores. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 27, p. 480-506, maio 2023. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/7316. Acesso em: 5 maio 2023.

CUNHA, Luiz Gustavo. **Cálculo de Volumes Usando o Princípio de Cavalieri Mediado por Materiais Concretos**. 2019. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de PósGraduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2019.

DEVLIN, Keith. The Napkin Ring Problem. **Mathematical Association os America**. Disponível em: https://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_04_08.html. Acesso em: 07 jul. 2023.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013. 472 p.

DUARTE, Edna Mataruco; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Formulação de Problemas no desenvolvimento de um Jogo Educacional Digital de Matemática. **Revista de Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 17, p. e020028, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id284. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/284. Acesso em: 13 fev. 2023.

EVANGELISTA, Fábio Lombardo; OLIVEIRA, Lincoln Moura de. Estudo das consequências da aplicação de impressoras 3D no ambiente escolar. **Physicae Organum**, Brasilia, v. 7, n. 1, p. 39-58, maio 2021.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**, tradução Higyno H. Domingues, Campinas: UNICAMP, 2011.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim Sbem-Sp**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 7. ed. Barueri: Atlas, 2022.

GOMES, Severino Carlos. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de trigonometria numa abordagem histórica**. 2011. 93 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/16072/1/SeverinoCG_DISSERT.pdf. Acesso em: 27 out. 2022.

HIEBERT, James; CARPENTER, Thomas P; FENNEMA, Elizabeth; FUSON, Karen; HUMAN, Piet; MURRAY, Hanlie; OLIVIER, Alwyn; WEARNE, Diana. Problem Solving as a Basis for Reform in Curriculum and Instruction: the case of mathematics. **Educational Researcher**, [S.L.], v. 25, n. 4, p. 12-21, maio 1996. American Educational Research Association (AERA).

JACINTO, Hélia. O GeoGebra na Resolução de Problemas: diferentes abordagens e suas potencialidades. **Tecnologias na Educação Matemática**, p. 60-63, 2014.

JÚNIOR, Severino Domingos da Silva; COSTA, Francisco José da. Mensuração e Escalas de Verificação: uma análise comparativa das escalas de likert e phrase completion. In: SEMINÁRIOS EM ADMINISTRAÇÃO - FEA - USP, 17., 2014, São Paulo. **Anais [...].** 2014. p. 1-16.

LEMKE, Raiane; SIPLE, Ivanete Zuchi; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. OAs PARA O ENSINO DE CÁLCULO: POTENCIALIDADES DE TECNOLOGIAS 3D. **RENOTE**, Porto Alegre, v. 14, n. 1, 2016. DOI: 10.22456/1679-1916.67355. Disponível em: https://www.seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/67355. Acesso em: 27 fev. 2023.

LIMA, Elon Lages de. **Medida e Forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009. 95 p.

LIMA, Elon Lages de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática no Ensino Médio**: volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. 308 p.

LULA, Kariton Pereira. **Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo de volumes e áreas**. 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

MACHADO, Luiza Lucia Mendes da Costa. **O Princípio de Cavalieri e suas aplicações**: áreas e volumes. 2021. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal Espírito Santo, Vitória, 2021. Disponível em: https://sappg.ufes.br/tese_drupal/tese_15388_Disserta%E7%E3o_Luiza_Lucia_%28Revisada%29.pdf. Acesso em: 26 jan. 2023.

MEDEIROS, Kátia Maria de; SANTOS, Antônio José Barboza dos. Uma Experiência Didáctica com a Formulação de Problemas Matemáticos. **Zetetiké**, Campinas, v. 15, n. 2, p. 87-118, jan. 2009. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8647027/13928. Acesso em: 31 mar. 2023.

MONTEIRO, Ivan Alves. **O desenvolvimento histórico do ensino de geometria no Brasil**. 2015. 30 f. Monografia (Especialização) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, São Paulo, 2015.

Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/o-desenvolvimento-historico--ivan-alves-monteiro.pdf. Acesso em: 16 fev. 2023.

MORAIS, Rosilda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 19-36.

MORANDINI, Moisés Miranda; VECHIO, Gustavo Henrique Del. Impressão 3D, tipos e possibilidades: uma revisão de suas características, processos, usos e tendências. **Revista Interface Tecnológica**, [S. l.], v. 17, n. 2, p. 67–77, 2020. DOI: 10.31510/infa.v17i2.866. Disponível em: https://revista.fatectq.edu.br/interfacetecnologica/article/view/866. Acesso em: 28 fev. 2023.

MOREIRA, Marco Antonio. Abandono da narrativa, ensino centrado no aluno e aprender a aprender criticamente. **Ensino, Saúde e Ambiente**, v. 4, n. 1, p. 2-17, abr. 2011. Disponível em: https://periodicos.uff.br/ensinosaudeambiente/article/view/21094/12568. Acesso em: 11 nov. 2022.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In: ACTAS DE LA CONFERÊNCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA, 2012, Uruguai. **Anais[...]**. Montevideo: 2012. p. 110-117. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf. Acesso em: 20 fev. 2023.

NCTM, National Council Of Teachers Of Mathmatics. **Principles and Standards for School Mathmatics**. Reston: Nctm, 2000. Disponível em: https://www.rainierchristian.org/NCTM_principles-and-standards-for-school-mathematics.pdf. Acesso em: 2 fev. 2023.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/72994. Acesso em: 09 jun. 2023.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. 2. ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. 216 p.

PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993.

PINHEIRO, Cristiano Max Pereira; MOTA, Gabriela Ehlers; STEINHAUS, Camilla; SOUZA, Mikaela de. Impressoras 3D: uma mudança na dinâmica do consumo. **Signos do Consumo**, [S.L.], v. 10, n. 1, p. 15, 15 jan. 2018.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. 203 p.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em:

http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 26 jan. 2023.

POSSAMAI, Janaína Poffo; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Elaboração/ Formulação/ Proposição de Problemas em Matemática: percepções a partir de pesquisas envolvendo práticas de ensino. **Educação Matemática Debate**, [S.L.], v. 6, n. 12, p. 1-28, 22 fev. 2022. Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES). http://dx.doi.org/10.46551/emd.v6n12a01. Acesso em: 09 jun. 2023.

PREINER, Judith. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers**: the Case of GeoGebra. (Dissertation in Mathematics Education Faculty of Natural Sciences). University of Salzburg, Salzburg, 2008.

RAMÍREZ, Miguel Cruz. A Mathematical Problem – Formulating Strategy. **International Journal For Mathematics Teaching And Learning**. p. 79-90. 7 dez. 2006. Disponível em: https://www.cimt.org.uk/journal/ramirez.pdf. Acesso em: 19 dez. 2022.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat**: revista eletrônica de educação matemática, [S.L.], v. 7, n. 2, p. 187-196, 13 dez. 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187. Acesso em: 14 abr. 2023.

SANTOS, Rejane Costa dos; GUALANDI, Jorge Henrique. Laboratório de Ensino de Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...].** São Paulo: Sbem, 2016. p. 1-12. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5490_2562_ID.pdf. Acesso em: 14 abr. 2023.

SANTOS, Anderson Oramisio; OLIVEIRA, Camila Rezende; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de. Material Concreto: uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos nas séries iniciais do ensino fundamental. **Itinerarius Reflectionis**, [S.L.], v. 9, n. 1, p. 1-14, 5 ago. 2013.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER JR, Frank K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, Paul R.; SHULTE, Albert P. **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SILVER, Edward. On Mathematical Problem Posing. **FLM Publishing Association**, v. 14, n. 1, p. 19-28, fev. 1994.

SPINILLO, Alina Galvão; LAUTERT, Sintria Labres; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; SANTOS, Ernani Martins dos; SILVA, Juliana Ferreira Gomes da. Formulação de Problemas Matemáticos de Estrutura Multiplicativa por Professores do Ensino Fundamental. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, [S.L.], v. 31, n. 59, p. 928-946, dez. 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/3xhJw53dwsVyk7wv6Hd84Cc/. Acesso em: 13 fev. 2023.

TEODORO, João Vitor; LOPES, José Marcos. Evolução e perspectivas da tecnologia em sala de aula e na formação docente. **Educação e Fronteiras**, Dourados, v. 3, n. 8, p. 91–104, 2014. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/educacao/article/view/3209. Acesso em: 27 fev. 2023.

TURRIONI, Ana Maria Silveira; PEREZ, Geraldo. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: LORENZATO, Sergio (org.). **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. p. 56-76.

UDESC, Universidade do Estado de Santa Catarina -. **Caderno de Prova**: vestibular 2019.2. Vestibular 2019.2. 2019. Disponível em: https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/8756/CADERNO_Matutino____2019_2_15595185798606_8756.pdf. Acesso em: 5 abr. 2023.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

APÊNDICE A - VERSÃO 1 DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Momento 1: Pesquisar sobre a vida e contribuições de Bonaventura Cavalieri, especialmente no campo da matemática.

Momento 2:

Apresentação e organização da sala:

i) Explanar rapidamente sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, os materiais da impressora 3D e do FAB3D.

ii) Dividir a turma em grupos de 2 ou 3 alunos e entregar para cada grupo os materiais feitos por impressão 3D e folhas A4 para as equipes registrarem as soluções.

Momento 3:

Problemas:

1. Simule o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz.

i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?

b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?

c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meça os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2.

Quadro 1 - Medidas do Cilindro e dos Prismas

	Prisma quadrangular		Prisma hexagonal		Cilindro	
	Menor	Maior	Menor	Maior	Menor	Maior
Aresta da base						
Altura						
Área da base						
Volume						

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

Quadro 2 - Medidas do Cone e das Pirâmides

	Cone	Pirâmide Quadrangular	Pirâmide hexagonal
Aresta/raio da base			
Altura			
Área da base			
Volume			

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?

2. Explore o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base e o aplicativo do Geogebra: www.geogebra.org/m/dpykks9y.

i) Meça os elementos do material concreto e preencha os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

	Cone	Pirâmide
Aresta/raio da base		
Altura total		
Área da base		
Aresta/raio da seção		
Altura da seção		
Área da seção		
Volume Total		

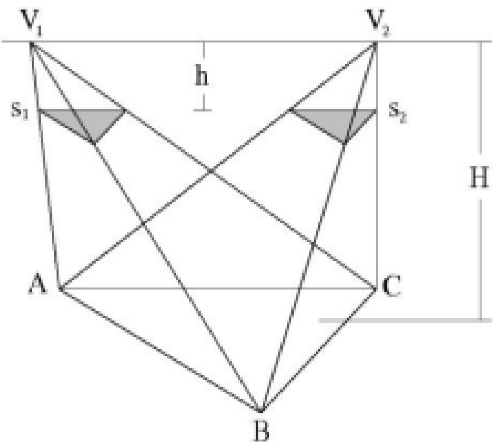
O que você pode concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) O que vocês podem concluir com a simulação do aplicativo?

iii) Vocês observaram alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

3. Com base no que vocês observaram nas Atividades 1 e 2, vocês conhecem algum resultado matemático que generalize esses dados? Expliquem.

4. Suponha duas pirâmides de base triangular ABC e altura H, sendo que seus vértices são V_1 e V_2. Um plano paralelo à base ABC e que dista h dos vértices produz seções S_1 e S_2 de áreas A_1 e A_2 nas pirâmides de vértice V_1 e V_2, respectivamente[18].



Usando o seguinte Teorema:

> Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos:
> - As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
> - A seção e a base são triângulos semelhantes.
> - A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice. (DOLCE; POMPEO, 2013[19]).

Determine e explique:

a) a relação de A_1 com A_2 e cada uma delas com a área do triângulo ABC;

b) a relação entre os volumes dessas duas pirâmides triangulares originais ($ABCV_1$ e $ABCV_2$);

c) a relação entre o volume de duas pirâmides triangulares que possuem bases de áreas iguais e alturas iguais.

5 - Observe e analise o material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. O que vocês podem afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

---

18 PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 26 jan. 2023.

19 DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

Momento 4: Compartilhamento de resultados pelas equipes e discussão (consenso).

Momento 5: Formalização do Princípio de Cavalieri, de modo a confirmar as suspeitas feitas pelos alunos sobre os volumes dos sólidos geométricos estudados no Momento 2. Nesse caso, sugere-se o uso do Geogebra 3D junto ao material concreto para verificar esse resultado matemático.

Momento 6 (Etapa de Formulação de Problemas): Propor a elaboração de um problema matemático usando o Princípio de Cavalieri, o material concreto e o aplicativo do GeoGebra 3D (https://www.geogebra.org/m/TbUDpCCt) da esfera e da anticlépsidra.

APÊNDICE B - VERSÃO 2 DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Momento 1:

Apresentação e organização da sala:

i) Explanar rapidamente sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, os materiais da impressora 3D e do FAB3D. Alertar que como algumas atividades serão experimentais, as respostas podem ser consideradas com aproximações.

ii) Dividir a turma em grupos de 4 alunos e entregar para cada grupo os materiais feitos por impressão 3D e folhas A4 para as equipes registrarem as soluções.

Momento 2:

Problemas:

1. Simulem o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz.

i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?
b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?
c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meçam os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2. Caso percebam, sem realizar as medições, que alguns materiais possuem mesma base e/ou mesma altura, vocês poderão utilizar essa constatação para otimizar o tempo no preenchimento dos valores nos quadros.

Quadro 1 - Medidas do Cilindro e dos Prismas

	Prisma quadrangular		Prisma hexagonal		Cilindro	
	Menor	Maior	Menor	Maior	Menor	Maior
Aresta/raio da base						
Altura						
Área da base						
Volume						

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

Quadro 2 - Medidas do Cone e das Pirâmides

	Cone	Pirâmide Quadrangular	Pirâmide hexagonal
Aresta/raio da base			
Altura			
Área da base			
Volume			

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?

2. Explorem o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base.

i) Meçam os elementos do material concreto e preencham os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

	Cone	Pirâmide
Aresta/raio da base		
Altura total		
Área da base		
Aresta/raio da seção		
Altura da seção		
Área da seção		
Volume Total		

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) Explorem o aplicativo do Geogebra: www.geogebra.org/m/u2bah2xj (observem que há várias perguntas para guiar a experiência). A partir das simulações realizadas, o que vocês podem concluir?

iii) Vocês observaram se existe alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

3. Com base no que vocês observaram nas Atividades 1 e 2, vocês conseguem pensar num resultado que pode ser válido para se trabalhar com volumes? Expliquem.

4. a) Explorem o aplicativo: https://www.geogebra.org/m/esffe6wk e respondam as perguntas a seguir.

i) Observem o valor obtido na relação das alturas das pirâmides, e na proporcionalidade entre as arestas da pirâmide maior e menor. O que se pode inferir ao comparar esses valores?

ii) Existe alguma relação entre os triângulos ΔABC e ΔEFG? Expliquem.

iii) Existe alguma relação entre a razão obtida na relação das alturas e a razão das áreas da seção (ΔEFG) e da base (ΔABC) da pirâmide menor e maior? Caso afirmativo, qual é a relação observada?

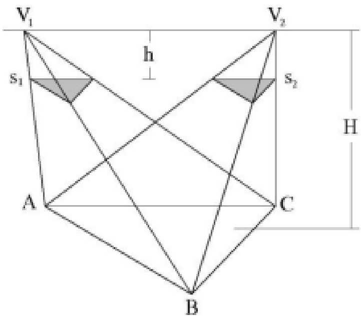
b) O seguinte resultado é um Teorema importante de geometria:

> Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos que:
> • As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
> • A seção e a base são triângulos semelhantes.
> • A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão das alturas dos tetraedros. (DOLCE; POMPEO, 2013[20]).

No aplicativo, escolham alguns valores para h para fazer simulações e observar o que acontece com as razões das alturas, das arestas e das áreas das faces. Após fazer essa observação, retorne ao teorema para investigar se os resultados da simulação e do teorema são os mesmos. Justifique a sua resposta.

[20] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**: geometria espacial, posição e métrica. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.

5. Suponha duas pirâmides de base triangular ABC e altura H, sendo que seus vértices são V_1 e V_2. Um plano paralelo à base ABC e que dista h dos vértices produz seções S_1 e S_2 de áreas A_1 e A_2 nas pirâmides de vértice V_1 e V_2, respectivamente, como na figura a seguir[21].



Usando o Teorema da questão anterior determine e explique:

a) a relação de S_1 com S_2 e cada uma delas com a área do triângulo ABC;
b) a relação entre os volumes das duas pirâmides triangulares originais ($ABCV_1$ e $ABCV_2$);
c) a relação entre o volume de duas pirâmides triangulares quaisquer que possuem bases de áreas iguais e alturas iguais.

6. Observem e analisem o material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros. Identifiquem e comparem as bases e as alturas dos tetraedros. O que vocês podem afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

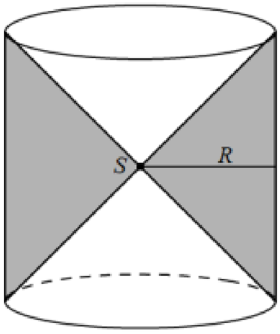
Momento 3: Compartilhamento de resultados pelas equipes e discussão (consenso).

Momento 4: Formalização do Princípio de Cavalieri, de modo a confirmar as suspeitas feitas pelos alunos sobre os volumes dos sólidos geométricos estudados no Momento 2. Nesse caso, sugere-se o uso do Geogebra 3D junto ao material concreto para verificar esse resultado matemático.

[21] PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em: http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 26 jan. 2023.

Momento 5 (Etapa de resolução de novos problemas e Formulação de Problemas):

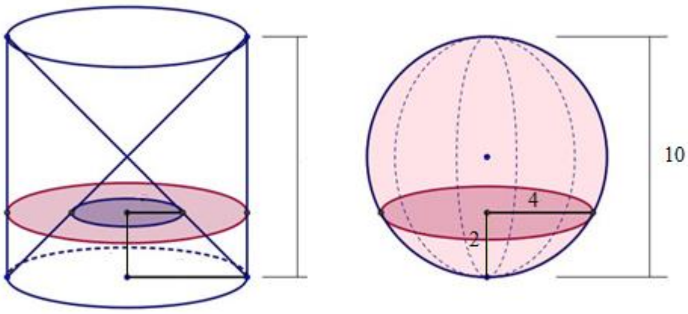
1. Uma anticlépsidra é o sólido obtido retirando-se de um cilindro dois cones, conectados pelo vértice, com bases nas bases do cilindro e altura igual a metade da altura do cilindro (vejam a figura a seguir).



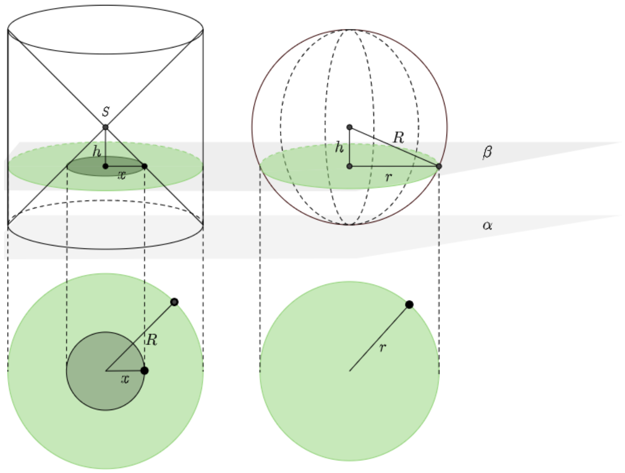
a) O material concreto (da esfera e da anticlépsidra) recebido para essa questão é composto por várias partes com as quais é possível montar uma esfera, uma anticlépsidra seções desses dois sólidos. O que vocês podem observar sobre a altura da esfera e da anticlépsidra? Ao comparar as seções desses sólidos o que pode ser constatado sobre a altura e sobre as áreas dessas seções?

b) No aplicativo https://www.geogebra.org/m/b7jfenux estão representadas uma esfera e uma anticlépsidra sendo possível manipular controles deslizantes que controlam o raio da esfera e a altura de um plano que seccionado esses dois objetos. Além disso, são propostas algumas reflexões (perguntas). O que vocês podem concluir ao manipular o aplicativo? Qual a relação entre a esfera e a anticlépsidra?

c) Considerando o material concreto e o aplicativo de que forma pode ser obtido o volume de uma calota esférica? Considerem a anticlépsidra ilustrada na figura a seguir ao lado esquerdo da esfera, determinem suas medidas e relacionem-na com a calota esférica de raio 4 cm e altura 2 cm.

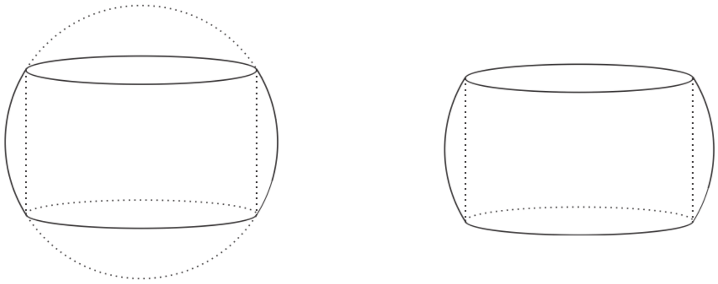


d) Considerem uma esfera e uma anticlépsidra de mesma altura, apoiadas numa mesma base e seccionadas por um mesmo plano, como na figura a seguir:



Expliquem como podem ser obtidos os raios do anel da seção da anticlépsidra e o raio do círculo da seção da esfera para determinar as áreas dessas seções a uma altura arbitrária h do plano em que ambas estão apoiadas.

2. O anel de guardanapo é considerado o sólido que resta de uma esfera quando é retirado dela um cilindro circular reto, como ilustra a figura a seguir[22].



a) Para ficar mais claro esse sólido, observem alguns diferentes tamanhos de anéis de guardanapo no material concreto recebido. O que vocês podem perceber sobre os raios das esferas e dos cilindros que os originaram e sobre as suas alturas?
b) Explorem o aplicativo https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m para construir diferentes anéis de guardanapo, reflita sobre os questionamentos deixados no aplicativo. Que conclusões vocês chegaram?
c) Considerem dois anéis de guardanapo A_1 e A_2, sendo A_1 obtido pela retirada

[22] UDESC, Universidade do Estado de Santa Catarina. **Caderno de Prova**: vestibular 2019.2. Vestibular 2019.2. 2019.

de um cilindro de raio 3 cm de uma esfera de raio 5 cm e A_2 obtido pela retirada de um cilindro de raio $\sqrt{20}$ cm de uma esfera de raio 6 cm. Utilizem o aplicativo https://www.geogebra.org/m/gbp9yw9m para fazer simulações e identificar relações entre esses anéis de guardanapo.

a) Determinem a altura desses anéis;

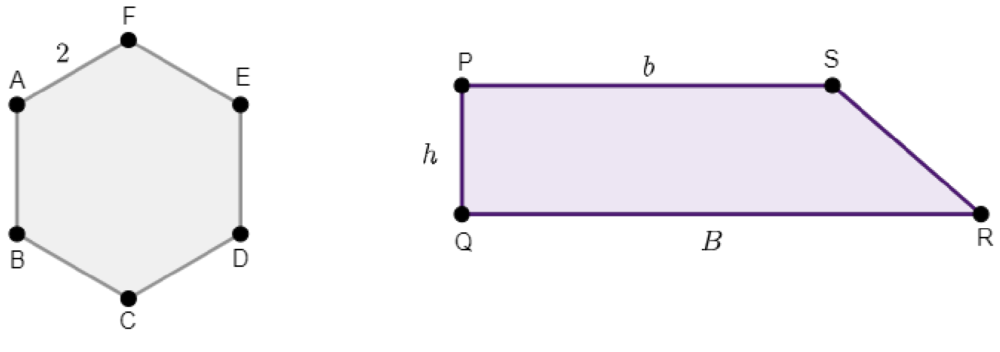
b) Determinem área das seções desses anéis obtidas a uma mesma altura;

c) Determinem o volume desses anéis.

d) Como pode ser calculado o volume de um anel de guardanapo?

3. Elabore um problema matemático usando a figura abaixo, de modo que a solução do problema criado empregue o Princípio de Cavalieri. Utilize o aplicativo do GeoGebra 3D https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu para auxiliar na elaboração e/ou resolução.

4. Suponham que o hexágono regular e o trapézio retângulo da figura a seguir possam ser a base de dois sólidos geométricos. Com base nisso, elaborem um problema matemático que envolva o Princípio de Cavalieri.



APÊNDICE C - VERSÃO 3 DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Momento 1:

Apresentação e organização da sala:

i) Explanar rapidamente sobre a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, os materiais da impressora 3D e do FAB3D. Alertar que como algumas atividades serão experimentais, as respostas podem ser consideradas com aproximações.

ii) Dividir a turma em grupos de 4 alunos e entregar para cada grupo os materiais feitos por impressão 3D e folhas A4 para as equipes registrarem as soluções.

Momento 2:

Problemas:

1. Simulem o volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones usando o material concreto e fragmentos de arroz.

i) Pela experimentação realizada, o que vocês observaram sobre os volumes:

a) dos prismas de base quadrada, hexagonal e do cilindro?
b) das pirâmides de base quadrada, hexagonal e do cone?
c) dos sólidos de mesma base?

ii) Meçam os materiais concretos recebidos e preencha os valores nos Quadros 1 e 2. Caso percebam, sem realizar as medições, que alguns materiais possuem mesma base e/ou mesma altura, vocês poderão utilizar essa constatação para otimizar o tempo no preenchimento dos valores nos quadros.

Quadro 1 - Medidas do Cilindro e dos Prismas

	Prisma quadrangular		Prisma hexagonal		Cilindro	
	Menor	Maior	Menor	Maior	Menor	Maior
Aresta/raio da base						
Altura						
Área da base						
Volume						

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 1?

Quadro 2 - Medidas do Cone e das Pirâmides

	Cone	Pirâmide Quadrangular	Pirâmide hexagonal
Aresta/raio da base			
Altura			
Área da base			
Volume			

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 2?

2. Explorem o material concreto que contém uma pirâmide e um cone seccionados por um plano paralelo a base.

i) Meçam os elementos do material concreto e preencham os valores no Quadro 3.

Quadro 3 - Medidas do Cone e Pirâmide e suas seções

	Cone	Pirâmide
Aresta/raio da base		
Altura total		
Área da base		
Aresta/raio da seção		
Altura da seção		
Área da seção		
Volume Total		

O que vocês podem concluir a partir das informações do Quadro 3?

ii) Explorem o aplicativo do Geogebra: www.geogebra.org/m/u2bah2xj (observem que há várias perguntas para guiar a experiência). A partir das simulações realizadas, o que vocês podem concluir?

iii) Vocês observaram se existe alguma relação entre os resultados encontrados pelo uso do material concreto e os resultados simulados no aplicativo do Geogebra? Expliquem.

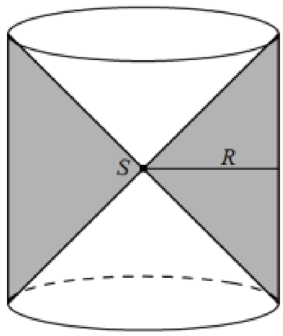
3. Com base no que vocês observaram nas Atividades 1 e 2, vocês conseguem pensar num resultado que pode ser válido para se trabalhar com volumes? Expliquem.

Momento 3: Compartilhamento de resultados pelas equipes e discussão (consenso).

Momento 4: Formalização do Princípio de Cavalieri, de modo a confirmar as suspeitas feitas pelos alunos sobre os volumes dos sólidos geométricos estudados no Momento 2. Nesse caso, sugere-se o uso do Geogebra 3D junto ao material concreto para verificar esse resultado matemático.

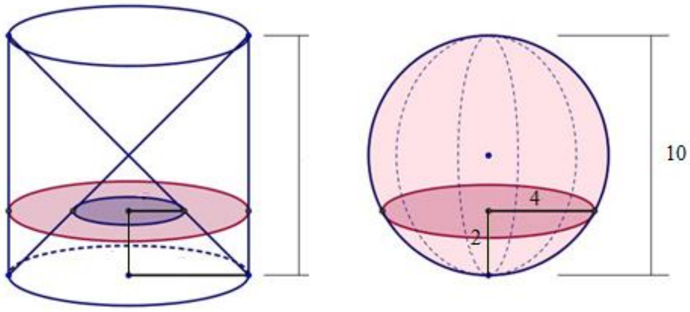
Momento 5 (Etapa de resolução de novos problemas e Formulação de Problemas):

1. Uma anticlépsidra é o sólido obtido retirando-se de um cilindro dois cones, conectados pelo vértice, com bases nas bases do cilindro e altura igual a metade da altura do cilindro (veja a figura a seguir).



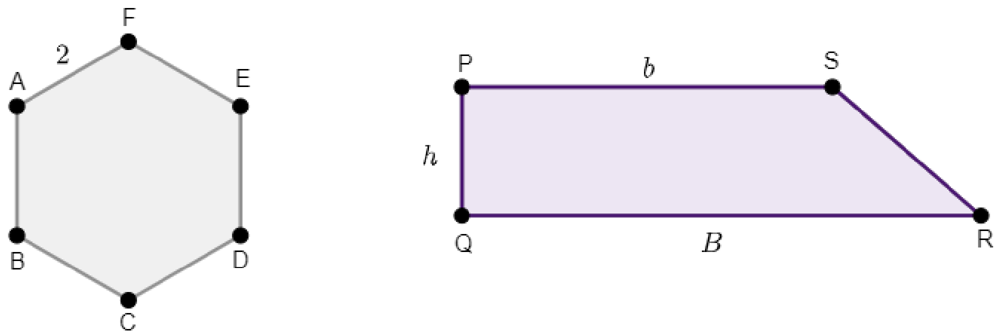
a) O material concreto (da esfera e da anticlépsidra) recebido para essa questão é composto por várias partes com as quais é possível montar uma esfera, uma anticlépsidra seções desses dois sólidos. O que vocês podem observar sobre a altura da esfera e da anticlépsidra? Ao comparar as seções desses sólidos o que pode ser constatado sobre a altura e sobre as áreas dessas seções?
b) No aplicativo https://www.geogebra.org/m/b7jfenux estão representadas uma esfera e uma anticlépsidra sendo possível manipular controles deslizantes que controlam o raio da esfera e a altura de um plano que seccionado esses dois objetos. Além disso, são propostas algumas reflexões (perguntas). O que vocês podem concluir ao manipular o aplicativo? Qual a relação entre a esfera e a anticlépsidra?
c) Considerando o material concreto e o aplicativo de que forma pode ser obtido o volume de uma calota esférica? Considerem a anticlépsidra ilustrada na figura a seguir ao lado esquerdo da esfera, determinem suas medidas e

relacionem-na com a calota esférica de raio 4 cm e altura 2 cm.



2. Elabore um problema matemático usando a figura abaixo, de modo que a solução do problema criado empregue o Princípio de Cavalieri. Utilize o aplicativo do GeoGebra 3D https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu para auxiliar na elaboração e/ou resolução.

3. Suponham que o hexágono regular e o trapézio retângulo da figura a seguir possam ser a base de dois sólidos geométricos. Com base nisso, elaborem um problema matemático que envolva o Princípio de Cavalieri.



APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar de uma pesquisa do Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC/CCT, intitulada: Objetos de Aprendizagem e Materiais Concretos: Uma Integração Possível, tendo como objetivo criar e aplicar sequências didáticas utilizando materiais concretos e virtuais e analisar seus resultados por uma abordagem qualitativa.

Você não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos serão mínimos, não são invasivos, havendo a possibilidade cansaço para responder as atividades. Para minimizar esses riscos as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula. A sua identidade será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão em benefício dos alunos uma vez que se procura melhorar as atividades de ensino e aprendizagem, tornando-as mais atrativas e que propiciem a construção da aprendizagem efetiva.

As pessoas que acompanharão os procedimentos serão os pesquisadores Amanda Zanelato Colaço, Elisandra Bar de Figueiredo e Eliane Bihuna de Azevedo.

Você poderá se retirar da pesquisa a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados para a produção de artigos técnicos e científicos, como as resoluções de atividades, uso de fotos, vídeos e transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula. A sua privacidade será mantida através da não-identificação do nome.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Nome do pesquisador responsável para contato: Elisandra Bar de Figueiredo

Contato: elisandra.figueiredo@udesc.br

Endereço: Sala D16. Rua Paulo Malschitzki, 200. Zona Industrial Norte, Joinville / SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a meu respeito serão sigilosos. Declaro que fui informado que posso me retirar do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso: ____

Assinatura _____________________Local: ________________Data: ____/____/___.

APÊNDICE E – TERMO DE CONSENTIMENTO GRAVAÇÃO DE ÁUDIO

TERMO DE CONSENTIMENTO

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa do Departamento de Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada: *Objetos de Aprendizagem e Materiais Concretos: Uma Integração Possível*, da acadêmica *Amanda Zanelato Colaço*, tendo como objetivo analisar as soluções apresentadas nas atividades do Cálculo de Volumes pelo Princípio de Cavalieri aplicadas nas aulas de Laboratório de Ensino de Matemática I, sob concordância da professora Debora Eloisa Nass Kieckhoefel professora dele(a), e também da direção da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos são mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder as atividades. Para minimizar estes riscos, as atividades serão realizadas em grupo em horário regular de aula.

A identidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os benefícios e vantagens em participar deste estudo serão teóricos e empíricos, pois permitirão conhecer e analisar os desafios encontrados nas estratégias de resolução de problemas das atividades do Cálculo de Volumes pelo Princípio de Cavalieri, podendo substanciar ações de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

As pessoas que estarão acompanhando os procedimentos serão a estudante de graduação Amanda Zanelato Colaço, e a professora orientadora Elisandra Bar de Figueiredo.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados de do(a) seu(ua) filho(a)/dependente, como as resolução das atividades e da transcrição de áudios que serão/foram realizados em sala de aula para a produção de artigos técnicos e científicos. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das transcrições dos áudios e resoluções das atividades do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Graduanda Amanda Zanelato Colaço
Telefone: (47) 999919102
Endereço: Rua Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville – SC

Professora Elisandra Bar de Figueiredo
Telefone: (47) 9619-4877
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campus Universitário Prof. Avelino Marcante,
Bairro Zona Industrial Norte - Joinville – SC

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. E ainda, fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome do aluno: ____

Nome do responsável por extenso:____

Assinatura _____________________Local: ________________ Data: ____/____/____ .

APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA VERSÃO 1 DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA EXPLORAR VOLUMES APLICADA NA DISCIPLINA DE LEM I

Prezado(a) Acadêmico(a): Este questionário tem como objetivo avaliar a sua opinião sobre a sequência de atividades para explorar volumes pelo Princípio de Cavalieri. Essa sequência é uma proposta vinculada ao Projeto de Pesquisa "Objetos de Aprendizagem e Materiais Concretos: Uma Integração Possível". Ao responder esse questionário você estará dando a oportunidade dos pesquisadores refletirem sobre as atividades diferenciadas que foram desenvolvidas em sala de aula mediadas pela metodologia de RP. Não há a necessidade de se identificar. Agradecemos a colaboração.

Nas afirmações seguintes, assinale com (X) no quadrado que se adequa mais à sua opinião, considerando a seguinte escala:

DT – Discordo Totalmente; D- Discordo. I – Indiferente; C – Concordo;

CT – Concordo Totalmente

1. Sobre a experiência desenvolvida.

	DT	D	I	C	CT
Simulei o volume dos sólidos usando o material concreto e água.					
Participei da medição dos sólidos geométricos					
Simulei resultados nos aplicativos do Geogebra					
As simulações e a medição incentivaram a troca de ideias com meu(s) colega(s)					
As simulações me ajudaram a perceber a utilidade do Princípio de Cavalieri.					
Tive dificuldade em desenvolver as simulações e medições.					

2. Sobre o Princípio de Cavalieri.

	DT	D	I	C	CT
Conheci o Princípio de Cavalieri antes da experiência desenvolvida.					

Em caso positivo para a pergunta anterior, em relação a forma de ensino com que você teve o primeiro contato com o Princípio de Cavalieri.

	DT	D	I	C	CT
O professor primeiro explicava o conteúdo, apresentava exemplos e em seguida dava exercícios e/ou problemas para serem feitos em sala de aula de forma individual ou em grupo.					
O professor propôs simulações com material concreto para explicar o conteúdo.					
O professor utilizava softwares durante a aula para apresentar o conteúdo.					
O professor primeiro deixava os alunos trabalharem em grupo para depois corrigir as questões e formalizar o conteúdo.					
O professor trouxe fatos históricos para relacionar o conteúdo.					

3. Com relação a metodologia de Resolução de Problemas (RP) usada nessa sequência de atividades.

	DT	D	I	C	CT
Esse foi meu primeiro contato com a metodologia de RP.					
Você considera que a metodologia RP foi adequada para explicar o conteúdo de volumes pelo Princípio de Cavalieri.					
Julga que as aulas em que a metodologia de RP foi inserida permitiram que você participasse mais ativamente das aulas e, consequentemente, se tornasse mais comprometido com a sua aprendizagem.					
A sua compreensão dos conteúdos envolvidos permitiu que você resolvesse exercícios de forma mais crítica e não apenas por aplicação mecânica de regras/fórmulas.					
Você teve mais oportunidade de construir estratégias, replanejar e, com isso, construir conhecimentos importantes por si mesmo					

4. Quanto às atividades propostas para serem trabalhadas em grupo durante as aulas.

	DT	D	I	C	CT
Permitiram que você expusesse suas ideias e as compartilhasse com seus colegas.					
Você teve a oportunidade de aprender com seus colegas durante as discussões em grupos.					
O tempo reservado para a realização de atividades em grupo foi suficiente.					

5. Com relação aos recursos utilizados na sequência de atividades.

	DT	D	I	C	CT
Os recursos didáticos (tais como, quadro e giz, Datashow, softwares gráficos, materiais manipuláveis...) utilizados para a formalização dos conteúdos foram adequados.					

6. Alguma(s) dificuldade(s) sentida(s) em trabalhar com a metodologia de RP foi(ram) porque:

	DT	D	I	C	CT
Você prefere realizar as atividades sozinho.					
Você não tinha muita afinidade com os demais colegas para desenvolver trabalhos em grupos.					
Você precisa de silêncio para pensar sobre as atividades propostas.					
Você sempre esteve acostumado com aulas tradicionais em que os trabalhos (quando têm) são realizados em horários extraclasse sem haver a discussão das atividades propostas em sala.					

7. Com relação às perspectivas sobre a importância da Formulação de Problemas (FP).

	DT	D	I	C	CT
A FP desafia a pensar.					
A FP incentiva a criatividade.					
A FP deve fazer parte da aprendizagem de todos os conteúdos matemáticos					
A FP me prepara para responder a situações do cotidiano.					

8. Sua opinião sobre à metodologia de RP utilizada na sequência de atividades.

	DT	D	I	C	CT
Não gostei da metodologia de RP, pois prefiro aulas tradicionais em que o professor explicar o conteúdo e resolve exercícios no quadro.					
A metodologia de RP deveria ser utilizada para o ensino de mais conteúdos.					
Gosto da metodologia de RP porque as aulas são mais dinâmicas.					
O aluno passa a ter mais autonomia em seus estudos.					
O professor permite que o aluno torne-se mais participativo nas aulas.					
Acho que o professor não deve propor exercícios para que o aluno tente resolver sem que ele tenha explicado o conteúdo antes.					
O aluno passa a questionar mais nas aulas					

No espaço abaixo e/ou no verso desta folha você pode deixar sua opinião, fazer sugestões, críticas ou comentários sobre a metodologia utilizada, as atividades realizadas, a(s) dificuldade(s) e/ou outras questões que julgar relevante.

APÊNDICE G – MATERIAL PARA PLENÁRIA

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PARA EXPLORAR VOLUMES

Projeto de Pesquisa

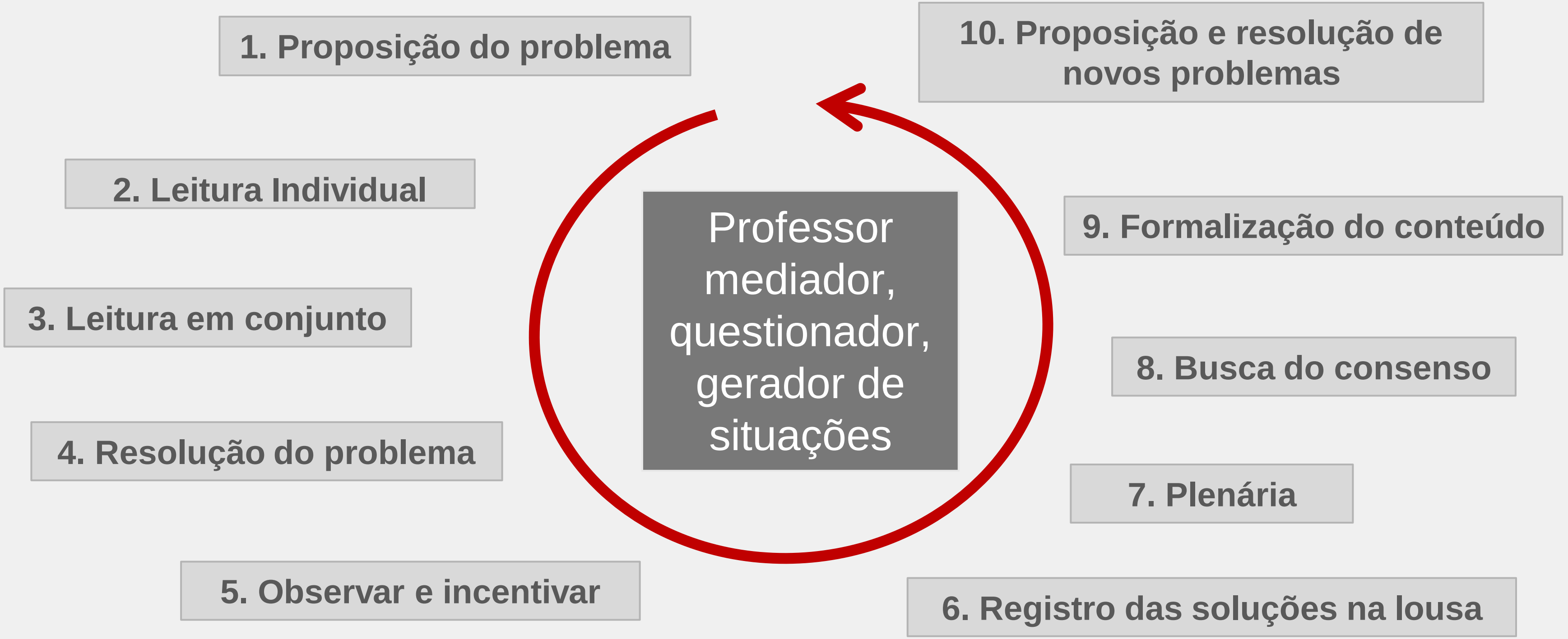
Objetos de Aprendizagem e Materiais Concretos: Uma integração possível

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação

- O problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p.47);
- O ensino e a aprendizagem ocorrem integrados em sala de aula, e a avaliação configura-se como uma oportunidade para aprender (ALLEVATO, ONUCHIC, 2021, p.46);
- Metodologia baseada em atividades organizadas em 10 etapas.

Etapas da Metodologia



Formalização

Atividade 1

Volume dos prismas, cilindros, pirâmides e cones abertos usando o material concreto e fragmentos de arroz.

i) Experimentação

ii) Medição

Conclusões:

- As áreas das bases de todos os materiais são iguais, temos prismas e cilindro de altura h e $\frac{h}{3}$ e pirâmides e cone com altura h;
- Os prismas e cilindro de mesma altura têm volume igual;
- As pirâmides e cone de altura h têm o mesmo volume que os prismas e cilindro de altura $\frac{h}{3}$, que é $\frac{1}{3}$ do volume dos prismas e cilindro de altura h.

Atividade 2

Volume da pirâmide e do cone usando o material concreto seccionado por um plano paralelo a base.

i) Medição

ii) Simulação no aplicativo https://www.geogebra.org/m/u2bah2xj

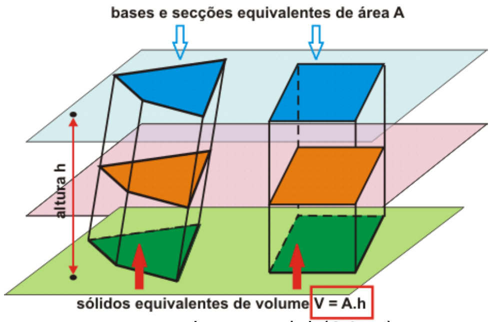
Conclusões:

- As áreas das bases são iguais;
- As áreas das seções são iguais;
- As alturas originais são iguais;
- As alturas das seções são iguais;
- Os volumes iguais.

Atividade 3

Resultado matemático que generaliza os resultados

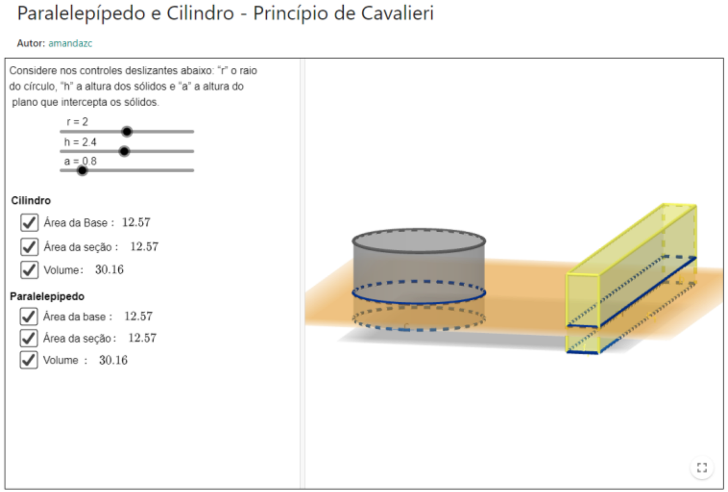
O Princípio de Cavalieri: Se dois sólidos geométricos de mesma altura forem interceptados por um plano paralelo ao plano que intecepta suas bases em uma altura arbitrária e as seções formadas em ambos os sólidos tiverem mesma área, então podemos concluir que os sólidos geométricos possuem mesmo volume.



Fonte: Feltes; Puhl (2017).

Atividade 3: Generalizações

Cilindro e paralelepípedo: https://www.geogebra.org/m/s7jewrqu

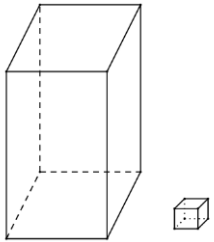


Qual a característica de cilindros e prismas?

- Todas as seções paralelas a base são a mesma figura.
- Portanto, todas tem a mesma área.
- Assim, pelo Princípio de Cavalieri, prismas e cilindros com a mesma área da base a mesma altura terão o mesmo volume.

Atividade 3: Generalizações

Definição: Considere um paralelepípedo retângulo com dimensões a, b e c. Comparando este paralelepípedo com o cubo de aresta 1, temos que esse cubo encaixa $a \cdot\ b \cdot\ c$ vezes no paralelepípedo, ou seja, o volume deste paralelepípedo é $V = abc$.



- Da definição de volume, segue que o volume do paralelepípedo reto retângulo é (Área da base) x (Altura).
- Dado qualquer figura plana com área A podemos encontrar um quadrado com a mesma área.
- Logo, dado qualquer cilindro (prisma) podemos encontrar um paralelepípedo reto retângulo com a mesma área da base e a mesma altura, ou seja, o mesmo volume.

Atividade 3: Generalizações

Portanto, o volume de qualquer cilindro (prisma) é (Área da base) x (Altura).

Atividade 3: Aplicativos

Cone e pirâmide: https://www.geogebra.org/m/u2bah2xj

Autor: amandazc

Considere nos controles deslizantes abaixo: "R" o raio do círculo da base, "H" a altura dos sólidos e "a" a altura do plano que intercepta os sólidos a partir da base. Considere "h" a altura dos sólidos menores.

R = 2.5

H = 8

a = 4

Cone

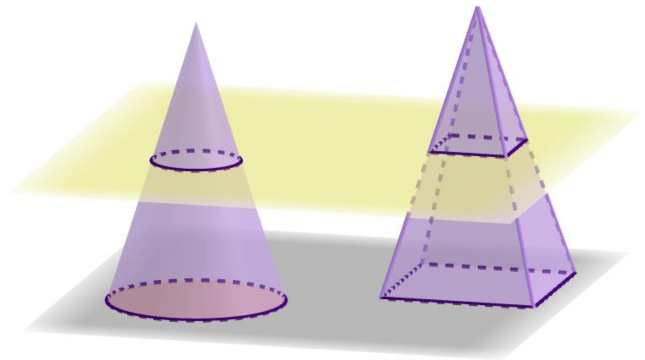
- Área da base: 19.63
- Área da seção: 4.91
- Volume : 52.36

Pirâmide

- Área da base : 19.63
- Área da seção : 4.91
- Volume : 52.36

Razões

$\frac{h}{H} = \frac{4}{8} = 0.5$ $\qquad \frac{Área - seção}{Área - base} = \frac{4.91}{19.63} = 0.25$



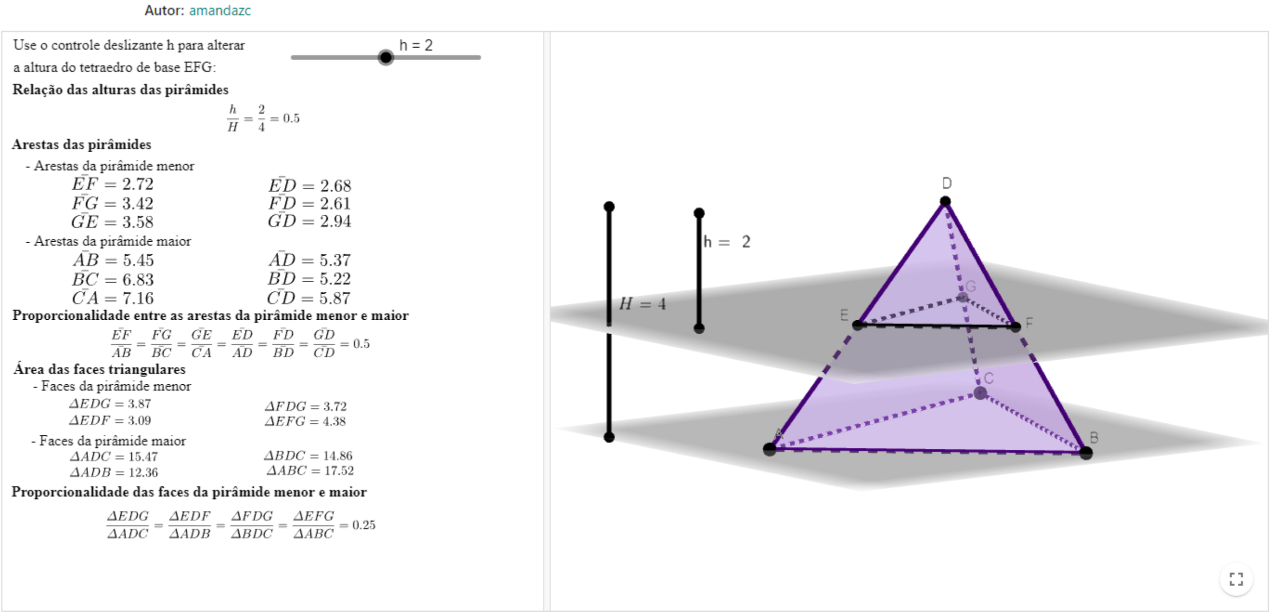
Portanto, todos os cones e pirâmides com mesma área da base, mesma altura e mesma área de seção na mesma altura têm o mesmo volume.

Atividade 4

4 – a) Observação do aplicativo: https://www.geogebra.org/m/esffe6wk

Conclusões comparando os dois tetraedros:

- Segmentos lineares proporcionais;
- Áreas das faces proporcionais;
- A proporção das áreas é o quadrado da dos segmentos lineares.



Atividade 4

O resultado:

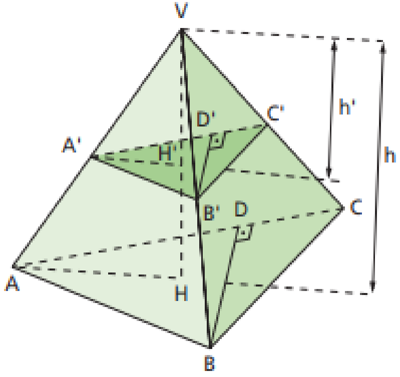
Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos:

- As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
- A seção e a base são triângulos semelhantes.
- A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice. (DOLCE; POMPEO, 2013).

As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.

De fato, as retas $\overleftrightarrow{A'H'}$ e $\overleftrightarrow{AH}$ são paralelas, pois são interseções de planos paralelos por um terceiro; logo, os triângulos VH'A' e VHA são semelhantes e portanto:

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$



(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 181)

A seção e a base são triângulos semelhantes.

De fato, os ângulos da seção ($\triangle A'B'C'$) e os ângulos da base ($\triangle ABC$), por terem lados respectivamente paralelos, são congruentes. Disso se conclui que a seção A'B'C' e a base ABC são triângulos semelhantes.

A razão de semelhança é $\frac{h'}{h}$, como segue:

$$\triangle VA'B' \sim \triangle VAB \Rightarrow \frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{h'}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}$$

Portanto, os triângulos A'B'C' e ABC são semelhantes, sendo $\frac{h'}{h}$ a razão de semelhança.

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 182)

Atividade 4

O resultado:

Quando seccionamos um tetraedro por um plano paralelo à base obtemos:

- As arestas laterais e a altura ficam divididas na mesma razão.
- A seção e a base são triângulos semelhantes.
- A razão entre às áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice. (DOLCE; POMPEO, 2013).

A razão entre as áreas da seção e da base é igual ao quadrado da razão de suas distâncias ao vértice.

De fato, sendo B'D' e BD duas respectivas alturas da seção e da base, vale:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{h'}{h}$$

Logo, $$\frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{\frac{1}{2}(A'C')}{\frac{1}{2}(AC)} \cdot \frac{(B'D')}{(BD)} = \frac{A'C'}{AC} \cdot \frac{B'D'}{BD} \Rightarrow$$

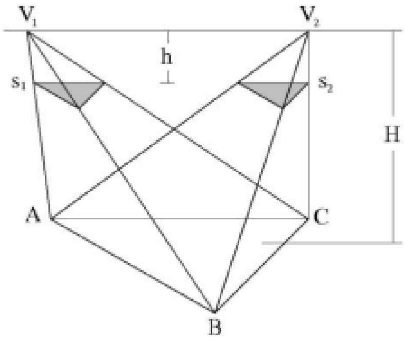
$$\Rightarrow \frac{\text{Área}(\triangle A'B'C')}{\text{Área}(\triangle ABC)} = \frac{h'}{h} \cdot \frac{h'}{h} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

(DOLCE; POMPEO, 2013, p. 182)

Atividade 5

Suponha duas pirâmides de base triangular ABC e altura H, sendo que seus vértices são V_1 e V_2. Um plano paralelo à base ABC e que dista h dos vértices produz seções S_1 e S_2 de áreas A_1 e A_2 nas pirâmides de vértice V_1 e V_2, respectivamente, como na Figura 1.

Pelo Teorema anterior, tem-se:



Fonte: PONTES, 2014.

Atividade 5

a) a relação de A_1 com A_2 e cada uma delas com a área do triângulo ABC:

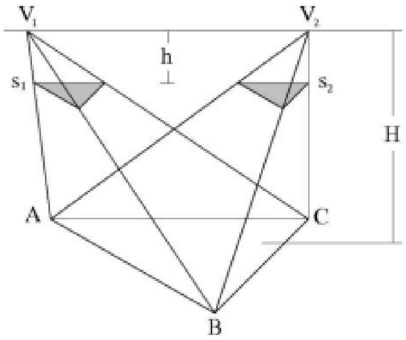
- Sendo $A = \text{área}(\Delta ABC)$, temos $\frac{A}{A_1} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$ e $\frac{A}{A_2} = \left(\frac{H}{h}\right)^2$;
- $A_1 = A_2$.

b) a relação entre os volumes dessas duas pirâmides triangulares originais ($ABCV_1$ e $ABCV_2$);

- Pelo Princípio de Cavalieri os volumes são iguais.

c) a relação entre o volume de duas pirâmides triangulares quaisquer que possuem bases de áreas iguais e alturas iguais:

- Pelo Princípio de Cavalieri os volumes são iguais.



Fonte: PONTES, 2014.

Atividade 6

Material concreto que apresenta a decomposição de um prisma triangular em três prismas triangulares.

O que podemos afirmar sobre o volume desses tetraedros? Expliquem.

- Duas a duas as pirâmides têm mesma base e mesma altura, consequentemente, pelos resultados vistos na Atividade 5, o mesmo volume;
- Pela propriedade transitiva, as três pirâmides têm o mesmo volume;
- O prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides que têm o mesmo volume, disso e do Princípio de Cavalieri segue a relação do volume de uma pirâmide ser um terço do volume do prisma de mesma base e mesma altura.
- Como todo prisma ou cilindro pode ser comparado ao um prisma de base quadrada e esse pode ser decomposto em dois prismas triangulares, o resultado vale para qualquer pirâmide e cone.

Conclusões

O que precisamos para usar o Princípio de Cavalieri?

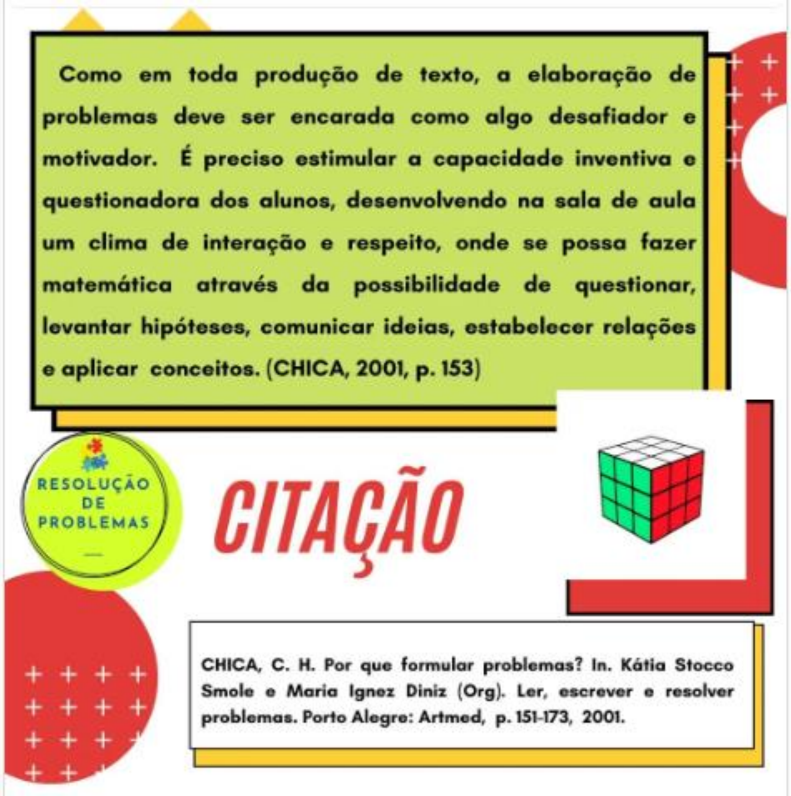
Precisamos de um outro sólido, que possua as mesmas medidas de área para cada seção horizontal e possua a mesma altura que o sólido do qual desejamos calcular o volume. Há inúmeros sólidos existentes, mas encontrar um que possua tais características não é um trabalho fácil, principalmente no que se refere a corpos redondos. Portanto, embora o Princípio de Cavalieri seja uma boa ferramenta, "Seu ponto fraco é que não se aplica ao cálculo de áreas de superfícies curvas. Esta deficiência, entretanto, é amplamente compensada por suas vantagens" (LIMA, 2006, p.107).

Conclusões

O que é usado para determinar volumes de sólidos em geral?

O Cálculo Diferencial e Integral que surgiu pouco tempo depois do Princípio de Cavalieri, definido e apresentado por Newton e Leibniz, e posteriormente aperfeiçoado por tantos outros, como Cauchy, superou essas limitações e, assim, tornou-se possível o cálculo de volume de diversos sólidos muito mais complexos, sem que fosse necessário a comparação entre sólidos. Tanto é que o próprio Princípio de Cavalieri pode ser demonstrado utilizando-se a integral (CUNHA, 2019, p. 68).

Resolução de novos problemas e Formulação de Problemas



Para acompanhar as novidades da Resolução de Problemas no Brasil indicamos o Instagram: @resproblemas.

Referências

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas?. In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI,Fabiane Cristina Hopner; JUSTULIN, Andresa Maria**. Resolução de Problemas:** teoriae prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2021. p. 37-58.

CUNHA, Luiz Gustavo; AGUIAR, Rogério de; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. **Cálculo de volumes usando o princípio de Cavalieri mediado por materiais concretos**. 2019. 94 p. Dissertação (Mestrado)-Universidade do Estado de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2019.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Geometria Espacial**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Volume 10, 6ª edição, Editora Atual, 2013.

FELTES, C. M. ; PUHL, C. S. . Estudo dos Prismas: compreendendo por meio de modelos matemáticos. **SCIENTIA CUM INDUSTRIA**, v. 5, p. 151-155, 2017.

LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria** – 4. ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

PONTES, Nicomedes Albuquerque. **O Princípio de Cavalieri e sua aplicação para o cálculo de volumes**. 2014. 53 f. Dissertação (Mestrado)-Curso de Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014. Disponível em:http://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/8731/1/2014_dis_napontes.pdf. Acesso em: 25 maio 2022.

Obrigada!