

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
MESTRADO EM FÍSICA

RAFAEL VIEIRA

EMARANHAMENTO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS
DESORDENADAS

JOINVILLE - SC

2014

RAFAEL VIEIRA

**EMARANHAMENTO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS
DESORDENADAS**

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Tecnológicas, da Universidade do Estado de Santa Catarina, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestrado em Física.

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim

JOINVILLE - SC

2014

V658e Vieira, Rafael

Emaranhamento em caminhadas quânticas desordenadas / Rafael Vieira. - 2014.
34 p. : il. ; 21 cm

Orientador: Edgard Pacheco Moreira Amorim
Bibliografia: 32-34.

Dissertação (mestrado) – Universidade do Estado Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação em Física, Joinville, 2014.

1. Física 2. Mecânica Quântica. 3. Estados Quânticos Emaranhados 4. Desordem. I. Amorim, Edgard Pacheco Moreira. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

530 - 20.ed.

RAFAÉL VIEIRA
EMARANHAMENTO EM CAMINHADAS QUÂNTICAS
DESORDENADAS

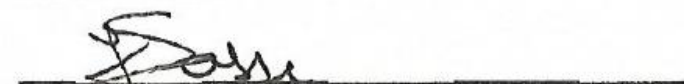
Dissertação apresentada ao Curso de Programa de Pós-Graduação em Física como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física na área de concentração "Física".

Banca Examinadora

Orientador:


Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim
CCT/UEDESC

Membros


Prof. Dr. Fernando Deeke Sasse
CCT/UEDESC


Prof. Dr. Marcos Cesar de Oliveira
UNICAMP

Joinville, SC, 10 de março de 2014.

Dedico este trabalho,

Aos meus pais Osvaldo Manoel Vieira e Suely Teresinha de Lacerda Vieira por todo apoio a minha formação.

A todos aqueles que acreditaram em mim, me apoiaram e me fizeram entender que o melhor caminho para melhorar a sociedade de um modo geral é pela educação.

Agradecimentos

Ao meu orientador, o Prof. Dr. Edgard Pacheco Moreira Amorim, que não apenas me orientou, mas me apoiou e me fez acreditar que o mestrado é apenas um passo para a minha formação. Ele fez por mim muito mais do que lhe caberia e, por isso, sou imensamente grato.

Ao Prof. Dr. José Fernando Fragalli, que sabe o que passei para me formar, sempre acreditou em mim e me incentivou a seguir em frente. Graças a indicação dele, pude ter o Prof. Edgard como orientador tanto de iniciação científica quanto mestrado.

Aos Profs. Dr. Holokx Abreu Albuquerque e Dr. Felipe Arretche pela participação na banca de qualificação, cujas dicas e opiniões construtivas me ajudaram a melhorar a apresentação do trabalho.

Ao Prof. Dr. Gustavo Garcia Rigolin, cuja colaboração através de ideias e verificação de resultados, nos proporcionou a publicação de um trabalho.

A todos os meus colegas de mestrado: Anderson, Amanda, Karla, Jardel, Marsal, Samuel, Rodrigo, Ana Carolina, entre outros, pelo esforço em resolver os exercícios, troca de informações e pelas conversas que deixaram o ambiente de trabalho muito mais interessante. Em especial, ao Anderson Hoff, a quem devo muito pelas discussões que ajudaram bastante nas disciplinas que cursamos em conjunto.

Ao pessoal da secretaria da pós-graduação e à CAPES pela minha bolsa de estudos.

Aos meus irmãos Leandro Vieira, Taino Vieira e Gleison Vieira pela amizade, companherismo e apoio nos bons e maus momentos.

Muito Obrigado!

Resumo

Investigamos como diferentes tipos de desordem afetam a geração de emaranhamento entre os graus de liberdade interno (spin) e externo (posição) em uma caminhada aleatória quântica discreta no tempo. A desordem é modelada introduzindo um aspecto aleatório extra à caminhada aleatória quântica: uma moeda clássica de dois lados (ou infinitos lados) que aleatoriamente dita qual moeda quântica conduz à evolução temporal do sistema a cada posição e/ou a cada passo de tempo dando origem a três tipos distintos de desordem. A desordem dinâmica é independente da posição, com cada posição tendo a mesma moeda ao mesmo tempo, a desordem estática é independente do tempo, enquanto a desordem flutuante possui aleatoriedade no tempo e posição. Mostramos para alguns níveis de desordem que o caso dinâmico é o mais poderoso gerador de emaranhamento, seguido de perto pelo caso flutuante, pois ambos levam ao máximo emaranhamento assintoticamente no tempo para qualquer condição inicial. Estudamos o número de passos que o sistema deve dar até estar dentro de uma vizinhança fixa do seu limite assintótico. A desordem estática é a geradora de emaranhamento menos eficiente, sendo quase sempre menos eficiente que o caso ordenado, não tem limite assintótico e, similarmente ao caso ordenado, possui um comportamento em longo tempo altamente sensível à condição inicial. Propomos ainda dois experimentos baseados em tecnologia atual onde essas idéias podem ser testadas.

Abstract

We investigate how different types of disorder affects the generation of entanglement between the internal (spin) and external (position) degrees of freedom in one-dimensional discrete time quantum random walk. The disorder is modeled by introducing an extra random aspect to quantum random walk: a classical two-sided (or infinitely-sided) coin that randomly dictates which quantum coin drives the system's time evolution at each position and/or at each time step, giving rise to three distinct kinds of disorder. The dynamic disorder is position-independent, with every position having the same coin at a given time, the static disorder is time-independent, while the fluctuating disorder has time and position dependent randomness. We show for several levels of disorder that dynamic disorder is the most powerful entanglement generator, followed closely by fluctuating disorder, both lead to maximally entangled states asymptotically in time for any initial condition. We study the number of steps the system must move to be within a small fixed neighborhood of its asymptotic limit. Static disorder is the less efficient entangler, being almost always less efficient than the ordered case, has no asymptotic limit and, similarly to the ordered case, has a long time behavior highly sensitive to the initial condition. We also propose two experiments current technology based where these ideas can be tested.

Lista de Figuras

1.1	Ilustração da caminhada aleatória (a) clássica e (b) quântica. Figura retirada de [7] com adaptações.	3
1.2	Arranjo experimental para ilustrar a caminhada quântica usando vários divisores de feixe (BS). Figura retirada de [7] com adaptações. A direita, tabelas com as distribuições de probabilidade clássica e quântica.	4
1.3	À esquerda: Esboço do arranjo experimental. Um campo do laser é atenuado até ao nível de um único fóton através de filtros de densidade neutra (ND) e acoplado ao circuito da rede através de um meio-divisor de feixe (BS). HWP: placa de meia onda; QWP: placa de quarto de onda; PBS: polarizante BS; APD: "fotodiodo avalanche". À direita: figura esquemática do que ocorre com o pacote de onda ao passar pelos PSB1 e PSB2, em que as setas representam a polarização do fóton. Figura retirada de [16] com adaptações.	6
1.4	Estruturas da caminhada aleatória quântica para 6 passos com início em A e/ou B, em que n é o número de passos e m é a posição. Podemos observar uma distribuição de deslocadores de fase (caixas coloridas) implementando as desordens (a) dinâmica, (b) estática e (c) flutuante. O último quadro mostra um acoplador direcional. Figuras retiradas de [7, 17] com adaptações.	7
2.1	Esfera de Bloch que representa todos os possíveis qubits (retirado de [2] com adaptações).	13
2.2	Distribuição de probabilidade para as caminhadas clássica e quântica. No detalhe, vemos como a dispersão evolui no tempo.	15

2.3	Mapeamento da entropia de von Neumann para todos os possíveis estados internos, partindo do estado de posição local utilizando as moedas (a) Hadamard e (b) Fourier.	17
2.4	A entropia de emaranhamento do estado inicial dado pelo produto tensorial de $\frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\rangle + i \downarrow\rangle)$ com os estados de posição (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\rangle + +1\rangle)$, (b) $ 0\rangle$ e (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\rangle - +1\rangle)$ para cada passo cuja evolução é dada por uma moeda Hadamard.	18
3.1	As linhas pontilhadas representam uma das várias possíveis realizações da caminhada clássica e as curvas sólidas representam as amplitudes de probabilidades associadas ao $RQRW_2$ (acima) e $RQRW_\infty$ (abaixo). As cores representam diferentes moedas quânticas sorteadas pela moeda clássica. Os três tipos de desordem principais: (a) dinâmica na qual as moedas são sorteadas no tempo, (b) estática com as moedas fixas no tempo, mas sendo sorteadas a cada posição e (c) flutuante na qual as moedas são sorteadas tanto na posição quanto no tempo. Retirado de [28] com adaptações. . . .	21
3.2	Distribuição de probabilidade média e dispersão média de uma caminhada de 400 passos com moeda fixa Hadamard e desordem dinâmica nos casos $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$. A média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais em (a) e (b) e 16.384 não-locais em (c) e (d).	22
3.3	Emaranhamento médio ao longo do tempo de uma caminhada de 400 passos com moeda Hadamard e desordem dinâmica nos casos $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$. A média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais (acima) e 16.384 não-locais (abaixo).	23
3.4	Emaranhamento médio no tempo de uma caminhada de 100 passos para as desordens dinâmicas: (a) sorteando dois parâmetros e fixando um e (b) sorteando um parâmetro e fixando os outros dois. A média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais.	27
3.5	Evolução da média do traço da diferença entre duas matrizes densidade adjacentes no tempo $\langle D(t) \rangle$ para a (a) caminhada quântica Hadamard e $RQRW_\infty$ e (b) caminhada com desordem na qual somente $q(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ variam aleatoriamente e $RQRW_2$	28

3.6	Média do (a) emaranhamento, (b) distribuição de probabilidade, (c) dispersão e (d) $D(t)$ para os três tipos de desordem usando o $RQRW_\infty$ (2.016 condições locais iniciais).	30
3.7	Média do emaranhamento na desordem estática comparando $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$ (2.016 condições locais iniciais).	30
3.8	(a) Emaranhamento, (b) distribuição de probabilidade e (c) dispersão médias para uma caminhada de 1000 passos para diferentes intervalos de $q(t)$ (com $\theta = \varphi = 0$) cujas médias foram tomadas a partir de 16.384 condições iniciais não-locais.	32
3.9	Emaranhamento, distribuição de probabilidade e dispersão médias para uma caminhada de 1000 passos para diferentes intervalos de (a) $\varphi(t)$ ($q = 1/2$ e $\theta = 0$) e (b) $\theta(t)$ ($q = 1/2$ e $\varphi = 0$) cujas médias foram tomadas a partir de 16.384 condições iniciais não-locais.	32
3.10	(a) Emaranhamento para caminhada Hadamard e (b) emaranhamento médio de 100 simulações do $RQRW_\infty$ para estados iniciais de posição gaussianos com diferentes dispersões e estados de spin $ \xi_1\rangle$ e $ \xi_2\rangle$	33

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Caminhada aleatória clássica e quântica	2
1.3	Implementações experimentais	5
1.4	Emaranhamento quântico	7
1.5	Organização da dissertação	9
2	Modelo teórico	11
2.1	Caminhada aleatória quântica	11
2.2	Emaranhamento em caminhadas quânticas	16
3	Resultados	19
3.1	Caminhada quântica dirigida por uma moeda clássica	19
3.2	Prova analítica	24
3.2.1	Prova numérica da hipótese assintótica	27
3.3	Outros tipos de desordens	29
3.4	Outras condições de aleatoriedade	31
3.5	Estados iniciais deslocalizados	32
3.6	Propostas experimentais	34
4	Considerações e perspectivas	36

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Durante as primeiras décadas do Século XX, houve uma consolidação dos princípios da mecânica quântica, criada para melhor entender os fenômenos em escala atômica. O determinismo clássico teve que ser revisto para dar lugar à interpretação probabilística quântica da natureza. Paralelo ao desenvolvimento da mecânica quântica, outro campo de estudos se aflorou principalmente depois da década de 30: a computação [1]. A máquina de Turing forneceu a base matemática da computação ao mostrar que toda informação podia ser codificada através de símbolos binários ("0" e "1") que representam a menor unidade de informação e ficaram conhecidos como *bits* [2].

Apesar do computador ter sido desenvolvido na mesma época da mecânica quântica, a representação física dos bits utiliza conceitos clássicos. No final do século XIX, os computadores eram eletromecânicos, sendo em seguida substituídos pelos computadores a válvula que eram enormes e consumiam muita energia. O surgimento do *transistor* em substituição às válvulas possibilitou maior eficiência e diminuição do tamanho do processador, desencadeando uma corrida tecnológica para a construção de computadores portáteis com maior capacidade de processamento. Em meados dos anos 60, Gordon E. Moore, engenheiro e co-fundador da *Intel Corporation*, observou que o aumento na quantidade de transistores em um processador dobrava a cada dezoito meses. Esta lei, conhecida como Lei de Moore, vem sendo razoavelmente obedecida até hoje e prevê que por volta de 2020, será necessário apenas um átomo para representar um bit. Nesta escala de tamanho, as leis da mecânica quântica sugerem uma mudança de paradigma na

computação, logo a computação clássica cede lugar à quântica e já não falaremos mais de bits, mas de *quantum bits* ou *qubits* [1].

Enquanto o computador clássico trabalha em uma base binária cujo estados lógicos são "0" ou "1", na computação quântica temos estados quânticos $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e valendo-se do princípio da superposição, um qubit pode ser representado também como uma superposição desses dois estados. No contexto da mecânica quântica, quando temos um sistema de dois estados quânticos distinguíveis, este é chamado de sistema de dois níveis, tais como os estados de spin do elétron (para cima $|\uparrow\rangle$ e para baixo $|\downarrow\rangle$), a polarização da luz circularmente ($|\odot\rangle$ e $|\oslash\rangle$) ou linearmente ($|\updownarrow\rangle$ e direita $|\leftrightarrow\rangle$), estado fundamental e primeiro estado excitado de um átomo, entre outros [2] (pág. 14).

1.2 Caminhada aleatória clássica e quântica

A caminhada aleatória clássica [3] (em inglês, *classical random walk*) trata da descrição de uma partícula que se movimenta unidimensionalmente com passos de tamanho fixo e probabilidades p de ir para direita e $q = 1 - p$ de ir para a esquerda. Em outras palavras, a cada passo, uma moeda é jogada e dependendo do seu resultado, a partícula caminhará para direita ou para a esquerda. Esse é um típico problema binário de tomada de decisões. Também nota-se que a caminhada é um processo markoviano, visto que cada passo não carrega informação do passo anterior [4]. Não é possível prever onde a partícula estará ao fim de uma caminhada, o que se pode fazer é um levantamento estatístico da distribuição de probabilidade de sua posição final. Nos casos em que $p = q$, encontramos uma distribuição discreta com um máximo na origem, uma distribuição binomial. Quando o número de passos é alto, podemos descrever sua distribuição de probabilidade através de uma distribuição gaussiana cuja variância é proporcional ao número de passos n , ou seja, $\sigma^2 \propto n$ [5].

Em 1993, Aharonov *et al.* [6] pensaram em um análogo quântico desse problema, introduzindo um grau de liberdade extra, tipicamente quântico que determina a direção com que a partícula se move, surgindo assim a caminhada aleatória quântica, ou *Quantum Random Walk* (QRW) em inglês. Agora, ao invés das probabilidades clássicas temos amplitudes de probabilidade quânticas que determinam onde a partícula pode ser encontrada. Como visto na figura 1.1 (a), enquanto que classicamente a partícula (representada por

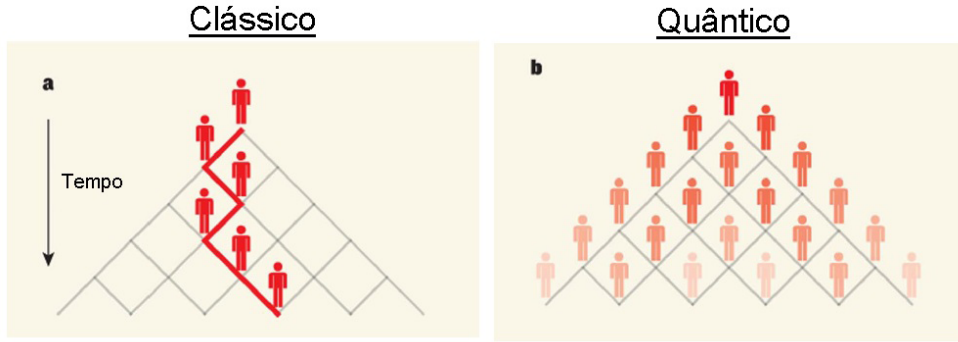


Figura 1.1: Ilustração da caminhada aleatória (a) clássica e (b) quântica. Figura retirada de [7] com adaptações.

um homem) caminha seguindo uma rota específica, quanticamente (b) seu pacote de onda viaja por todos os caminhos possíveis e efeitos de interferência construtiva e destrutiva causam uma drástica diferença na distribuição de probabilidade quântica em relação ao caso clássico. Essa distribuição tem picos laterais, afastados da origem. Além disso, dependendo das condições iniciais ou do operador evolução temporal (ou moeda quântica), essa distribuição pode tender para um dos lados ou ser simétrica [8]. Também temos que $\sigma^2 \propto n^2$, havendo um ganho quadrático na dispersão (comportamento balístico) quando comparado a situação clássica, como veremos nas próximas seções.

Podemos entender a caminhada quântica a partir de um arranjo baseado no experimento de Mach-Zehnder [9]. Para isso, substituímos os espelhos por outros divisores de feixe (*beam splitter*, em inglês), dispondo-os em sequência semelhante a uma mesa de pregos (ou *Galton's Board*) como ilustrado na figura 1.2 a esquerda. Após o feixe sofrer múltiplas reflexões e transmissões é detectado em $t = 4$. A principal característica do divisor de feixe é que metade do feixe é transmitido e a outra metade é refletida ganhando $\pi/2$ de fase, cada metade com amplitude de $1/\sqrt{2}$ do feixe original [10]. Mas, se partirmos do experimento do ponto de vista clássico para o quântico, ou seja, se reduzirmos o feixe a um único fóton, obteríamos o mesmo resultado [9].

Segundo a figura 1.2, vemos que o feixe incide em $j = 0$ pela esquerda. A direção de propagação é o grau de liberdade extra e podemos dizer que a cada passagem pelo divisor de feixe, o feixe original é colocado em uma superposição de dois feixes com metade indo pela esquerda e a outra metade pela direita. Observe por exemplo, o feixe que parte de $j = 0$ para $j = +1$ em $t = 3$. Nesse caso, há a soma de duas ondas com igual amplitude mas com uma diferença de fase de π já que parte do feixe sofreu três reflexões adquirindo

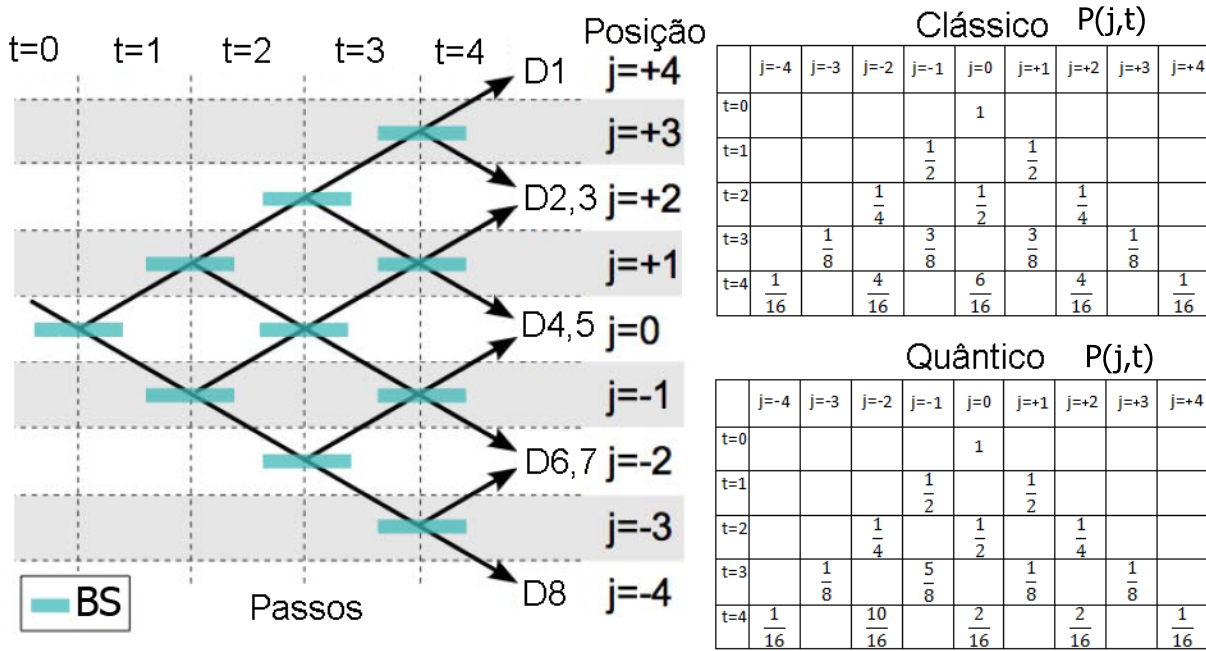


Figura 1.2: Arranjo experimental para ilustrar a caminhada quântica usando vários divisores de feixe (BS). Figura retirada de [7] com adaptações. À direita, tabelas com as distribuições de probabilidade clássica e quântica.

uma fase de $3\pi/2$ enquanto que a outra parte sofreu apenas uma ($\pi/2$), caracterizando uma interferência totalmente destrutiva. Diferentemente, o feixe que parte de $j = 0$ para $j = -1$ em $t = 3$ sofrerá uma interferência construtiva, já que ambos têm as mesmas amplitudes e a mesma fase π , pois cada feixe foi refletido duas vezes. Portanto, para $t = 3$ em $j = +1$ e $j = -1$ temos probabilidades de $1/8$ e $5/8$ respectivamente (figura 1.2, tabelas à direita) distintas da probabilidade clássica.

A distribuição de probabilidade $P(j,t)$, ou seja, a soma do módulo quadrático de cada parte do feixe que chega em uma certa posição j , é diferente do caso clássico, como pode ser notado na tabela da figura 1.2 à direita. Para resgatar o resultado clássico, necessitaria que a cada passo tivéssemos um detector de fótons "não-interferente", isto é, que detectaria apenas qual caminho que o fóton tomou, mas permitiria que ele continuasse sua trajetória. Assim, o estado do fóton se colapsaria a cada passo e o que teríamos seria um único caminho com amplitude de probabilidade igual a um, como uma bola em uma mesa de pregos (caso clássico). Então o local onde ocorre a detecção influencia diretamente a distribuição de probabilidade, é a influência do observador provocando o colapso da função de onda. Apesar de ser simples teoricamente, esse arranjo tem uma série de dificuldades do ponto de vista experimental, tais como alinhamento, distância

entre divisores, quantidade de divisores e detectores necessários para montagem [9].

Em termos de aplicações na computação quântica, em 2009, Andrew M. Childs *et al.* [11] demonstrou que a caminhada quântica é uma forma de computação universal visto que, a princípio, qualquer algoritmo quântico pode ser reescrito como uma caminhada aleatória quântica. Então, segundo seu trabalho, qualquer problema que pode ser resolvido utilizando um computador quântico também pode ser resolvido via caminhada aleatória quântica. Nessa mesma linha, Neil Shenvi *et al.* [12] propuseram um algoritmo de busca mais eficiente utilizando o comportamento balístico da caminhada quântica.

Além do âmbito computacional, a caminhada quântica pode ser útil para explicar outros fenômenos, como por exemplo a transferência de energia da fotossíntese [13]. Essa ocorre quando a luz do sol é absorvida pelas antenas clorossômicas na planta e transferida para uma região onde irá ocorrer uma conversão dessa energia. Em alguns casos a eficiência da absorção de energia de certas plantas e sistemas bacterianos pode chegar à 99% [14]. O modo que essa energia é absorvida é retirando um elétron de uma região neutra deixando nela um "buraco" formando um par elétron-buraco (éxciton). Essa caminhada do éxciton e a eficiência de transmissão de energia podem ser comparadas à caminhada quântica, pois é um sistema baseado em estruturas de Born-Markov para incorporar efeitos quânticos na transferência de energia. Apesar de recente, esse assunto se torna promissor ao unir a biologia e a teoria de informação quântica, oferecendo perspectivas de aplicações em fotossistemas artificiais.

1.3 Implementações experimentais

Sendo o passeio aleatório um modelo teórico e com aplicações, seria interessante observá-lo experimentalmente. Pensando nisso, várias pesquisas abordaram formas de verificar em laboratório a caminhada quântica. Em 2010, A. Schreiber *et al.*[16] propuseram um arranjo experimental utilizando elementos ópticos passivos tendo a polarização do fóton como grau de liberdade extra do sistema. A vantagem desse modelo está no espaço de montagem, pois as ondas seguem uma trajetória fechada (figura 1.3). Assim que o fóton é lançado por um laser, sua polarização inicial é feita através de placas de meia onda (HWP) e de quarto de onda (QWP). Ao passar pelo divisor de feixe (BS), parte da amplitude de probabilidade desse fóton ficaria confinada no circuito enquanto que a parte transmitida

seria detectada em um fotodetector (FD). Na placa "moeda" de meia onda (Coin-HWP), a polarização do fóton giraria em 45° . Ao chegar no primeiro divisor polarizador (PBS1) cada fóton ficaria em uma superposição de dois estados. Ao sair, eles passariam por dois cabos ópticos, sendo que um deles fará uma volta (*loop*), que resultará em um atraso, um deslocamento de um dos dois fótons gerados e só depois de chegar em PBS2, eles se unirão em um único feixe sofrendo superposições devido ao deslocamento. Após isso, o feixe sofrerá duas reflexões e, ao chegar em BS, a parte refletida será detectada e a transmitida realimentará o sistema. Observou-se nesse experimento uma distribuição de probabilidade quântica após cinco passos.

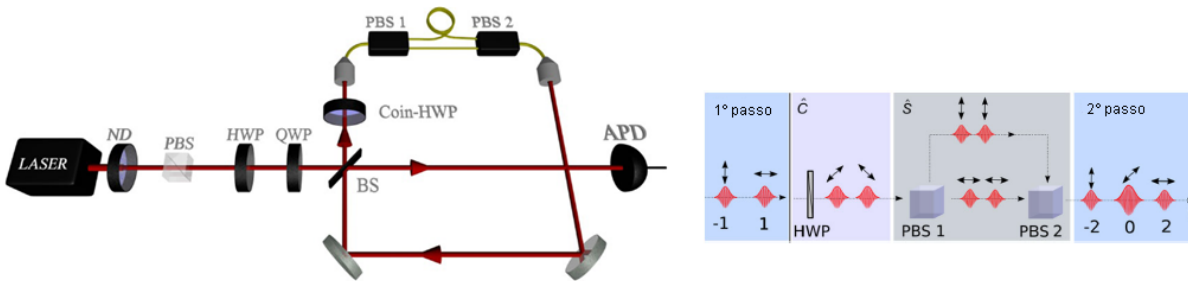


Figura 1.3: À esquerda: Esboço do arranjo experimental. Um campo do laser é atenuado até ao nível de um único fóton através de filtros de densidade neutra (ND) e acoplado ao circuito da rede através de um meio-divisor de feixe (BS). HWP: placa de meia onda; QWP: placa de quarto de onda; PBS: polarizante BS; APD: "fotodiodo avalanche". À direita: figura esquemática do que ocorre com o pacote de onda ao passar pelos PSB1 e PSB2, em que as setas representam a polarização do fóton. Figura retirada de [16] com adaptações.

Em 2013, A. Crespi *et al.* [17] construíram um aparato experimental utilizando fotônica integrada, onde uma caminhada quântica é construída em circuitos integrados de guia de onda, proporcionando ótima estabilidade de fase. Eles utilizaram técnicas de escrita de laser de femtosegundos sobre uma superfície de vidro. Onde o laser escreve, origina-se um caminho com alto índice de refração, aprisionando um fóton similarmente a uma fibra óptica. Assim, os autores foram capazes de forjar uma série de interferômetros em um vidro que reproduz a dinâmica da caminhada aleatória. Como visto no último quadro da figura 1.4, análogo dos divisores de feixe, são os acopladores direcionais que fazem dois pacotes de onda dos fótons interagirem: dispositivos em que duas guias de onda são trazidas perto e acopladas por um campo evanescente. É a escrita laser que permite fabricar acopladores direcionais com uma geometria tridimensional única, que permite um comportamento independente de polarização. Esse sistema é ainda mais interessante pois

pode gerar caminhadas com diferentes tipos de desordens, em que o modo de caminhar pode variar a cada passo n (desordem dinâmica, figura 1.4(a)), na posição m , (desordem estática, figura 1.4(b)), ou mesmo unindo os dois casos na desordem flutuante, figura 1.4(c). Isso é possível de ser feito incluindo em cada caminho óptico um deslocador de fase (FS).

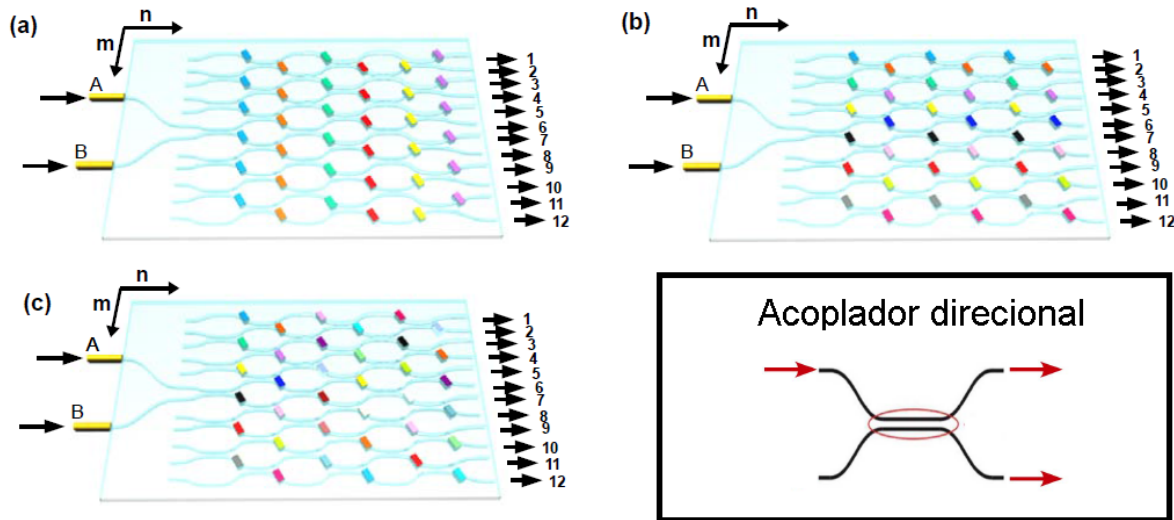


Figura 1.4: Estruturas da caminhada aleatória quântica para 6 passos com início em A e/ou B, em que n é o número de passos e m é a posição. Podemos observar uma distribuição de deslocadores de fase (caixas coloridas) implementando as desordens (a) dinâmica, (b) estática e (c) flutuante. O último quadro mostra um acoplador direcional. Figuras retiradas de [7, 17] com adaptações.

1.4 Emaranhamento quântico

Durante o desenvolvimento da mecânica quântica, vários princípios e postulados foram propostos para nos permitir explorar o universo atômico. Um dos mais importantes é o princípio da linearidade ou superposição, que informa que se dois estados $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ pertencem a um certo espaço de Hilbert H_c , a combinação linear desses estados também pertence à H_c , ou seja, também é solução do sistema [18].

Para ilustrar esse problema de maneira mais didática, Schroedinger propôs em 1935 um experimento mental que é muito conhecido na Física, "o gato de Schroedinger"[19]. Trata-se de um gato com um dispositivo de um átomo instável em uma caixa selada. Se o átomo não decair, permanecendo como um átomo instável, o gato irá sobreviver. Contudo, se o átomo decair para um caso estável, o dispositivo liberará um gás venenoso

que matará o gato. Então o estado geral desse sistema que contém todas essas informações é:

$$|\psi\rangle = \alpha|\mathbf{\hat{A}tomo instável}\rangle \otimes |\mathbf{Gato vivo}\rangle + \beta|\mathbf{\hat{A}tomo estável}\rangle \otimes |\mathbf{Gato morto}\rangle. \quad (1.1)$$

Interpreta-se $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ como as densidades de probabilidade do átomo decair ou não, em que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Esse estado geral também pertence ao espaço de Hilbert que descreve o sistema, então deve-se afirmar pela mecânica quântica que o gato está em uma superposição de estados "vivo e morto". Apenas se abrirmos a caixa, saberemos o que houve com o gato, pois iremos colapsar o sistema para um ou outro estado. Porém, nota-se algo importante: O gato não estará vivo se o átomo decair, nem estará morto se ele não decair. Então, apesar das informações do gato pertencerem a um espaço de Hilbert H_g e as informações do átomo pertencerem a H_a , essas estão emaranhadas ou entrelaçadas no espaço de Hilbert $H_g \otimes H_a$.

O emaranhamento ou entrelaçamento é um fenômeno quântico que ocorre quando há a necessidade de dois ou mais estados serem correlacionados para que o objeto possa ser corretamente descrito fisicamente, mesmo que esses objetos estejam espacialmente separados. Esse fenômeno do emaranhamento quântico em que, ao medir um dos componentes correlacionados, faz o estado geral colapsar instantaneamente, independente de fatores como a separação espacial entre eles, é chamado de não-localidade [18]. Apesar de correta, essa afirmação trouxe consigo um paradoxo proposto por Einstein, Podolsky e Rosen, conhecido como "paradoxo EPR"[20]. Esse afirma que, se duas partículas compõem um estado geral (por exemplo, dois fótons resultantes de uma aniquilação elétron-pósitron), quando separados, a correlação entre os estados deve permanecer e, ao medir o estado de uma dessas partículas, o estado da outra partícula irá colapsar instantaneamente, pois não há restrição na velocidade de transmissão de informação e isso fere um dos princípios da relatividade: toda informação viaja na velocidade da luz ou abaixo dela.

Até meados do século XX, acreditava-se que não seria possível verificar o emaranhamento, deixado apenas como uma questão filosófica. No entanto, em 1964 John Bell [21] mostrou que era possível quantificar a não-localidade utilizando um sistema relativamente simples, um par de sistema de dois níveis, como um par de elétrons correlacionados. Assim, ele pôde mostrar que era possível verificar a não-localidade, observada experimentalmente em 1982 por A. Aspect *et al.* [22].

Com a quantificação do emaranhamento quântico, esse fenômeno deixa de ser uma

mera situação filosófica para se tornar uma ferramenta para a teoria da computação e informação quântica criando novas situações que não seriam concebíveis no mundo clássico [18]. Um dos exemplos mais famosos é o *teletransporte quântico* [23], em que não há teletransporte de energia ou matéria, mas é possível teletransportar informação, como o spin do elétron ou a polarização do fóton, por meios unicamente quânticos, que não dependam de meios de transmissão.

O estado de um caminhante quântico, como veremos a seguir, é dado pelo produto tensorial entre seu estado interno (spin, polarização, etc) e o estado externo referente à posição. Portanto, podemos quantificar o emaranhamento entre os graus de liberdade interno e externo. O formalismo utilizado para descrever a caminhada quântica e calcular o emaranhamento serão apresentados no próximo capítulo.

1.5 Organização da dissertação

No capítulo 2 apresentaremos o formalismo matemático da caminhada aleatória quântica na seção 2.1, descrevendo matematicamente os estados quânticos e o operador evolução temporal do sistema. Na seção 2.2, apresentaremos um panorama sobre o emaranhamento entre os graus de liberdade interno e externo da partícula, bem como uma forma de quantificá-lo através da entropia do sistema.

No capítulo 3 abordaremos os resultados obtidos, sobretudo a possibilidade de gerar emaranhamento máximo independente do estado inicial do sistema utilizando moedas randômicas variando dinamicamente. Na seção 3.1 descreveremos os diferentes tipos de desordem, dando especial ênfase a desordem dinâmica a qual nos permite gerar máximo emaranhamento. Faremos uma demonstração dos resultados, bem como uma prova analítica (seção 3.2) para a condição de máximo emaranhamento no limite assintótico e quais as condições para que essa prova analítica tenha validade. Na subseção 3.2.1, comentaremos sobre a condição proposta no limite assintótico que o operador densidade tende a ser constante pois seus termos convergem a valores bem definidos. Em seguida, comentaremos sobre outras desordens (estática e flutuante) e faremos uma comparação de resultados (seção 3.3). Como próximo passo, estudamos as possibilidades de variar as desordens dinâmicas diminuindo os intervalos dos termos que compõem o operador unitário (seção 3.4) e estados iniciais altamente não-localizados, utilizando uma distri-

buição gaussiana (seção 3.5). Ao final, teremos uma breve discussão de como verificar o emaranhamento do ponto de vista experimental (seção 3.6).

No último capítulo, apresentamos conclusões e perspectivas do presente trabalho.

Capítulo 2

Modelo teórico

2.1 Caminhada aleatória quântica

Considere uma partícula confinada em uma dimensão (eixo j) com igual probabilidade (moeda não-viciada) de ir para direita ou para esquerda. Classicamente, após N passos, a sua distribuição de probabilidade é definida entre $j = -N$ e $j = N$ e pode ser descrita por uma distribuição binomial (caso discreto) ou por uma distribuição gaussiana ao considerarmos o número de passos suficientemente grande (caso contínuo).

A caminhada aleatória quântica é o análogo da caminhada aleatória clássica, mas neste caso, a natureza quântica tanto da moeda quanto a do caminhante é manifestada: as probabilidades clássicas são trocadas por amplitudes de probabilidades. Em outras palavras, a moeda e o caminhante podem estar em uma superposição de estados que correspondem aos vetores da base e as amplitudes de probabilidade das várias possibilidades de caminhos interferem [6, 8].

Formalmente, o caminhante quântico unidimensional necessita de duas informações para descrever seu estado. Uma dessas é o estado externo, referente à informação de posição $|\Psi_p\rangle$, pertencente a um espaço de Hilbert H_p infinito e enumerável. Esse estado pode ser escrito como uma superposição dos estados das posições j , $|\Psi_p\rangle = \sum_i \alpha_i |j\rangle_p$ tal que $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$ e $j \in \mathbb{Z}$. Se o estado inicial for $|\Psi_p\rangle_0 = |0\rangle_p$, o caminhante parte da origem. Já a informação interna, referente ao grau de liberdade extra do sistema, é descrito em uma moeda (quântica), existente no espaço de Hilbert bidimensional, ou seja, $|\Psi_c\rangle \in H_c$, cujos estados podem assumir $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ ou qualquer superposição desses dois estados, $|\Psi_c\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ em que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ e $a, b \in \mathbb{C}$. Portanto, o estado geral de

um caminhante quântico é caracterizado pelo produto tensorial entre esses dois estados, e esse estado pertence a um espaço de Hilbert H_t dado por $H_t = H_p \otimes H_c$. Então, $|\Psi(t)\rangle$ é descrito de maneira mais geral como

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j (a(j,t)|\uparrow\rangle + b(j,t)|\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle, \quad (2.1)$$

tal que $\sum_j (|a(j,t)|^2 + |b(j,t)|^2) = 1$. Um estado inicial não necessariamente parte da origem ($j = 0$), mas pode partir de qualquer posição ou estar definido em várias posições. Quando partimos da origem chamamos de estado inicial local, sendo um estado inicial do tipo

$$|\Psi(0)\rangle = (\cos\alpha_s|\uparrow\rangle + e^{i\beta_s}\sin\alpha_s|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle, \quad (2.2)$$

sendo $0 \leq \alpha_s \leq \pi$ e $0 \leq \beta_s \leq 2\pi$. Nos outros casos, em que o estado está definido em várias posições, chamamos de estado inicial não-local [24].

Matricialmente, $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ são normalizados e podem ser descritos como,

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

O operador que descreve o passo da caminhada quântica, ou seja, o operador evolução temporal do sistema é $\hat{U} = \hat{S}(\hat{C}(t) \otimes \hat{I}_p)$, em que $\hat{C}(t)$ é o operador moeda, \hat{I}_p a identidade no espaço de posição e \hat{S} o operador de translação condicional. Um $\hat{C}(t)$ arbitrário deve pertencer ao espaço $SU(2)$. Ignorando o termo de fase global, tem-se um operador unitário,

$$\hat{C}(t) = (c_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + c_{\uparrow\downarrow}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + c_{\downarrow\uparrow}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + c_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|), \quad (2.4)$$

tal que $c_{\uparrow\uparrow} = \sqrt{q(t)}$, $c_{\uparrow\downarrow} = \sqrt{1-q(t)}e^{i\theta(t)}$, $c_{\downarrow\uparrow} = \sqrt{1-q(t)}e^{i\varphi(t)}$ e $c_{\downarrow\downarrow} = \sqrt{q(t)}e^{i(\theta(t)+\varphi(t))}$, nos intervalos de $0 \leq q(t) \leq 1$ e $0 \leq \theta(t), \varphi(t) < 2\pi$. Esses parâmetros são independentes, e não necessariamente são fixos ao longo da caminhada. O termo $q(t)$ é a tendência (*bias*) da moeda. Quando $q(t) = 1/2$, temos uma moeda justa, ou seja, que gera uma superposição de estados com mesma módulo de amplitude de probabilidade, gerando uma superposição igualitária entre $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, e para o caso de $q(t) \neq 1/2$ temos uma moeda tendenciosa. Os outros dois termos definem as fases dos estados superpostos. Assim, ao aplicar o operador evolução temporal em um certo tempo t , dois termos são gerados e movem-se uma unidade de espaço dependendo das informações de $t-1$, ou seja,

$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(t-1)\rangle = \sum_j (a(j,t)|\uparrow\rangle + b(j,t)|\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle$. As amplitudes de probabilidade $a(j,t)$ e $b(j,t)$ são descritas como

$$\begin{aligned} a(j,t) &= c_{\uparrow\uparrow}(t)a(j-1,t-1) + c_{\uparrow\downarrow}(t)b(j-1,t-1), \\ b(j,t) &= c_{\downarrow\uparrow}(t)a(j+1,t-1) + c_{\downarrow\downarrow}(t)b(j+1,t-1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Quando analisamos a aplicação de um $\hat{C}(t)$ no estado interno, notamos que sempre teremos uma superposição de estados $\cos(\alpha_j)|\uparrow\rangle + \text{sen}(\alpha_j)e^{i\beta_j}|\downarrow\rangle$, em que $0 \leq \alpha_j \leq \pi$ e $0 \leq \beta_j \leq 2\pi$. Esses estados, podem adquirir infinitas possibilidades de superposição sendo mapeados numa esfera de Bloch (figura 2.1) definindo um qubit $|\psi\rangle$ [2]. Então o que $\hat{C}(t)$ faz é girar o estado interno (qubit) e podemos decompor esta rotação num produto de três matrizes,

$$\hat{C}_u = e^{i\alpha_u} \begin{pmatrix} e^{-i\beta_u/2} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_u/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\gamma_u/2) & -\text{sen}(\gamma_u/2) \\ \text{sen}(\gamma_u/2) & \cos(\gamma_u/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta_u/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_u/2} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

em que $\alpha_u, \beta_u, \gamma_u$ e δ_u devem ter valores reais. Os três últimos parâmetros representam rotações em x, y e z respectivamente e o primeiro parâmetro é uma fase global. Na verdade, esse operador \hat{C}_u é o mesmo da equação 2.4, apenas decomposto em três ângulos para representar as rotações na esfera de Bloch. Para recuperar o operador unitário da equação 2.4, devemos multiplicar as três matrizes e substituir $\alpha_u = \pi$, $\cos(\gamma_u/2) = \sqrt{q}$, $\beta_u = 2\theta$ e $\delta_u = 2\varphi + \pi$.

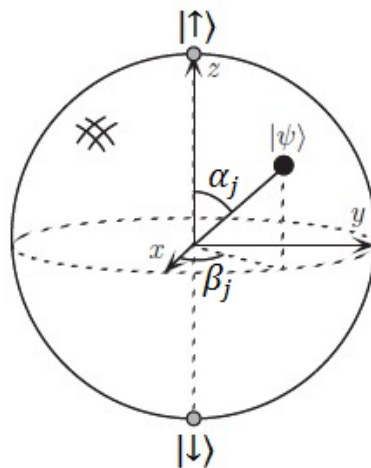


Figura 2.1: Esfera de Bloch que representa todos os possíveis qubits (retirado de [2] com adaptações).

Na caminhada quântica, usa-se uma moeda quântica $\hat{C}(t)$ fixa e as moedas mais comumente usadas em artigos da literatura são Hadamard [8] ($q(t) = 1/2, \theta(t) = \varphi(t) = 0$), que

corresponde ao papel do campo magnético num experimento de Stern-Gerlach e Fourier ($q(t) = 1/2, \theta(t) = \varphi(t) = \pi/2$), também conhecido como moeda de Kempe, que descreve o divisor de feixes num experimento de Mach-Zehnder [15], como mostrado no capítulo anterior. Para a moeda Hadamard, por exemplo, os valores de rotações na equação 2.5 devem ser $\beta_u = 0, \gamma_u = \pi/2$ e $\delta_u = \pi$, além do termo $\alpha_u = \pi/2$. Então, ela irá girar o vetor estado 90° em y e depois 180° em z . Podemos escrevê-los na base de projetores como

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|), \\ F &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Já na forma matricial, ambos os operadores são escritos como,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Como queremos ver como os estados internos e externos evoluem ao ser aplicado o operador \hat{U} , vamos utilizar como exemplo quântico a moeda Hadamard por ser mais utilizado na literatura. Como já mencionado, ao aplicarmos o operador evolução temporal no estado $|\Psi(0)\rangle$, $\hat{C}(t)$ atuará apenas nos estados de spin, pois pertencem ao mesmo espaço de Hilbert. O operador identidade se aplica aos estados de posição. Aplicando o operador \hat{U} em um estado inicial local $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$, temos

$$\hat{U}|\Psi(0)\rangle = \hat{S}(\hat{C}(t)|\psi(0)\rangle_c \otimes \hat{I}_p|\psi(0)\rangle_p) = \hat{S} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle) \right]. \quad (2.9)$$

O operador \hat{S} é operador de translação condicional, escrito matematicamente como

$$\hat{S} = \sum_j (|j+1\rangle\langle j| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |j-1\rangle\langle j| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|). \quad (2.10)$$

Assim, ao ser aplicado, esse operador translada os estados condicionados pelo estado interno, ou seja, o estado $|\uparrow\rangle \otimes |j\rangle$ vai para $|j+1\rangle$ e $|\downarrow\rangle \otimes |j\rangle$ para $|j-1\rangle$, emaranhando o estado interno com a posição,

$$\hat{S} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle). \quad (2.11)$$

A evolução unitária dada pelo operador \hat{U} evolui temporalmente o estado. Após n passos, cujo tempo varia discretamente de $t = 0$ até $t = n$, o estado é dado por $|\Psi(n)\rangle = U(n)\dots U(1)|\Psi(0)\rangle = \tau \prod_{t=1}^n U(t)|\Psi(0)\rangle$ onde τ representa um produto ordenado temporalmente.

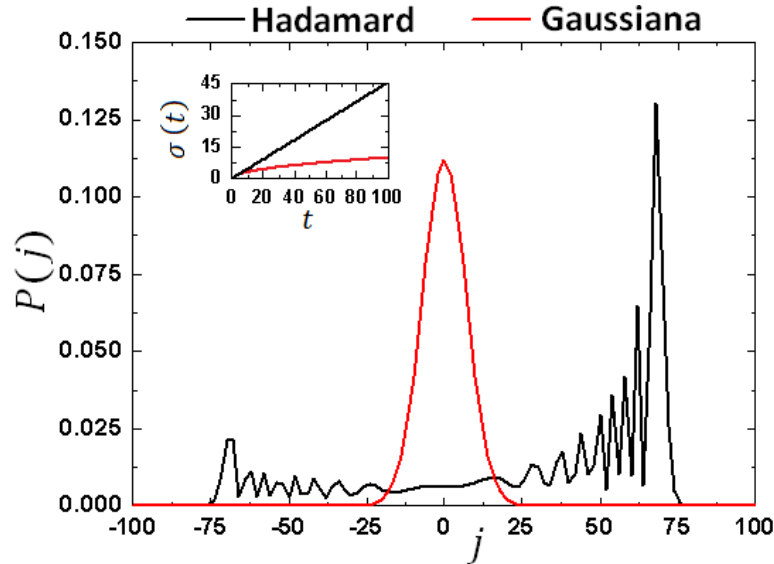


Figura 2.2: Distribuição de probabilidade para as caminhadas clássica e quântica. No detalhe, vemos como a dispersão evolui no tempo.

Na figura 2.2, encontra-se uma comparação de distribuição de probabilidade entre os casos clássico e quântico partindo de um estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ utilizando a moeda Hadamard. Nota-se que essa evolução leva a uma distribuição assimétrica e distinta do caso clássico. Isso se deve aos efeitos de interferência construtiva e destrutiva que ocorrem durante o processo e que não acontecem no caso clássico. As interferências destrutivas ocorrem em maior quantidade nas regiões centrais, por isso há essa maior concentração de probabilidade nas regiões laterais. No caso da moeda fixa, o estado inicial interfere diretamente na distribuição de probabilidade. Outro ponto importante é a informação do quadro menor da figura 2.2, em que há um gráfico da dispersão do sistema. O caso clássico tem $\sigma \propto \sqrt{t}$, informando um "afinamento" da gaussiana ao longo do tempo (proporcional ao número de passos), com a distribuição se concentrando na região de origem. Já o caso quântico tem como característica o $\sigma \propto t$, sendo essa uma das assinaturas do caso quântico, a dispersão balística [8].

Para uma distribuição de probabilidade simétrica, procura-se uma superposição de estados de spin (ou de outro sistema de dois níveis estudado) que se adeque a moeda. Por exemplo, para o caso Hadamard, um dos estados possíveis é o estado $|\Psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle$

$|+i\rangle \downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$, que equivale a dizer que dois elétrons de spins contrários são lançados em um experimento de Stern-Gerlach com uma diferença de fase de $\pi/2$ entre eles, fazendo com que seus estados nunca se sobreponham. Mas para esse caso, a moeda Fourier não traria um resultado simétrico. Um estado inicial possível seria o $|\Psi(0)\rangle = 1/\sqrt{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$, que corresponde a dois feixes com mesma fase lançados nas direções opostas de um divisor de feixes [8].

2.2 Emaranhamento em caminhadas quânticas

O emaranhamento na caminhada quântica ocorre entre os graus de liberdade internos (sistema de dois níveis) e externo (posição), pertencentes a espaços de Hilbert distintos, mas correlacionados por um produto tensorial para descrever o estado total. Essa característica quântica pode ser quantificada através da entropia de von Neumann, uma forma de medida de informação aplicada a estados puros bipartites em uma transformação unitária [24]. Para a densidade parcialmente reduzida $\rho_C(t) = Tr_P(\rho(t))$ [25], $S_E = -Tr(\rho_C(t) \log_2(\rho_C(t)))$, sendo S_E a entropia de emaranhamento do sistema e $Tr_P(\cdot)$ o traço sobre os graus de liberdade de posição, além de $\hat{\rho}$ ser o operador densidade do sistema,

$$\hat{\rho}_c = \begin{pmatrix} \sum_j |a(j,t)|^2 & \sum_j a(j,t)b^*(j,t) \\ \sum_j b(j,t)a^*(j,t) & \sum_j |b(j,t)|^2 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

em que $a(j,t)$ e $b(j,t)$ são as amplitudes dos estados de moeda em cada posição no tempo. A entropia de von Neumann acaba resultando em um valor entre 0 e 1, que informa a medida do emaranhamento e pode ser expressada como $S_E = -r_+ \log_2(r_+) - r_- \log_2(r_-)$ tal que $r_{\pm} = (1/2 \pm \sqrt{1/4 - \alpha(t)(1 - \alpha(t)) + |\gamma(t)|^2})$ são os autovalores da matriz densidade onde $\alpha(t) = \sum_j |a(j,t)|^2 = 1 - \sum_j |b(j,t)|^2$ e $\gamma(t) = \sum_j a(j,t)b^*(j,t)$ são termos da matriz densidade. Nos casos das moedas fixas, ou seja, quando o operador $C(t)$ é constante no sistema, a entropia converge no limite assintótico ($t \propto N \rightarrow \infty$). Assim, podemos definir em qualquer instante de tempo se o estado está não-emaranhado onde $S_E = 0$, totalmente emaranhado com $S_E = 1$ ou parcialmente emaranhado ($0 < S_E < 1$).

Para definir o grau de emaranhamento, é mais fácil começar definindo o que não é um estado emaranhado. Um estado não-emaranhado ($S_E = 0$) ocorre quando a medição de qualquer informação de um espaço de Hilbert não traz consigo nenhuma informação do

outro espaço. Nesse caso, o vínculo desses estados pode ser expresso por um único produto tensorial. Um exemplo no cenário da caminhada quântica seria um estado $|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$. Nesse caso, as informações já estão definidas, ou seja, já se conhece a posição e o spin do sistema, a medição de um deles não nos oferece nenhuma informação do outro: o estado de spin já é definido para cima e a posição é a origem $j = 0$. Outro exemplo seria $(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes (|-1\rangle + |+1\rangle)$ em que a medição da posição não traz também nenhuma informação do spin dessa partícula. Já um estado totalmente emaranhado ($S_E = 1$) ocorre quando cada estado de um espaço de Hilbert está vinculado diretamente com uma informação de um outro espaço de Hilbert como, por exemplo, $(|\uparrow\rangle \otimes |-1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |+1\rangle)$, em que ao medirmos a posição, saberemos em qual spin ele se encontra. Então um estado totalmente emaranhado trará uma informação única a cada medida [18]. Ainda temos o estado parcialmente emaranhado quando S_E está entre 0 e 1 [24].

Com isso, podemos gerar um gráfico do emaranhamento nesse limite para as moedas Hadamard e Fourier. Partindo do estado local, $|\psi(0)\rangle_p = |0\rangle$, traça-se todos os possíveis estados de moeda obtidos pela equação 2.1, em que $0 \leq \alpha_j \leq \pi$ e $0 \leq \beta_j < 2\pi$, para as duas moedas estudadas (figura 2.3).

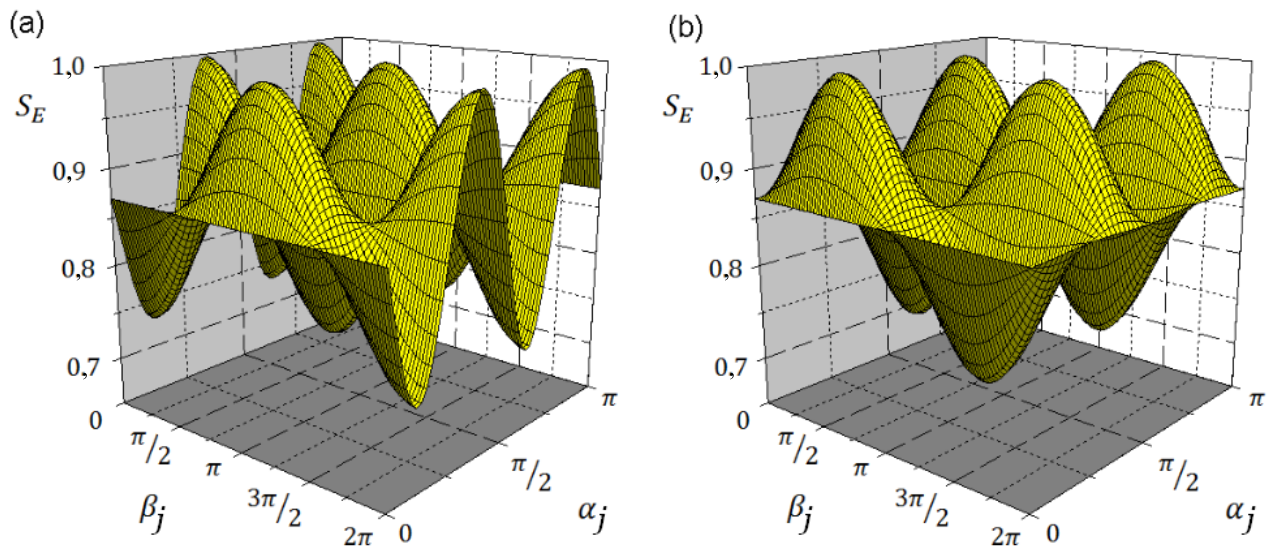


Figura 2.3: Mapeamento da entropia de von Neumann para todos os possíveis estados internos, partindo do estado de posição local utilizando as moedas (a) Hadamard e (b) Fourier.

Traçadas todas as possibilidades, observamos as entropias possíveis do sistema, com regiões próximas de máximo emaranhamento, $S_E \approx 1$, e de mínimo em 0,74 aproximadamente. Um ponto de máximo do sistema, por exemplo, é em $\alpha_j = 1,2; \beta_j = 0$, onde $S_E \sim 0,99865$ para o Hadamard. Tanto nessa moeda quanto na Fourier, há resultados

que convergem em menos de 100 passos, e outros que levam milhares de passos até finalmente convergir. Os resultados também são diferentes devido a moeda, tendo poucos casos coincidentes.

Para observar as diferenças no emaranhamento entre estados locais e não-locais, calculamos a entropia de emaranhamento da moeda Hadamard para o estado inicial de moeda $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$, mas utilizando três estados de posição, um local e dois não-locais (figura 2.4). Percebe-se que os resultados convergidos de emaranhamento são distintos, com diferença de emaranhamento notável entre os casos locais e não locais, sendo o caso (c) atingindo um emaranhamento ainda menor que o mais baixo emaranhamento do estado local ($\sim 0,74$).

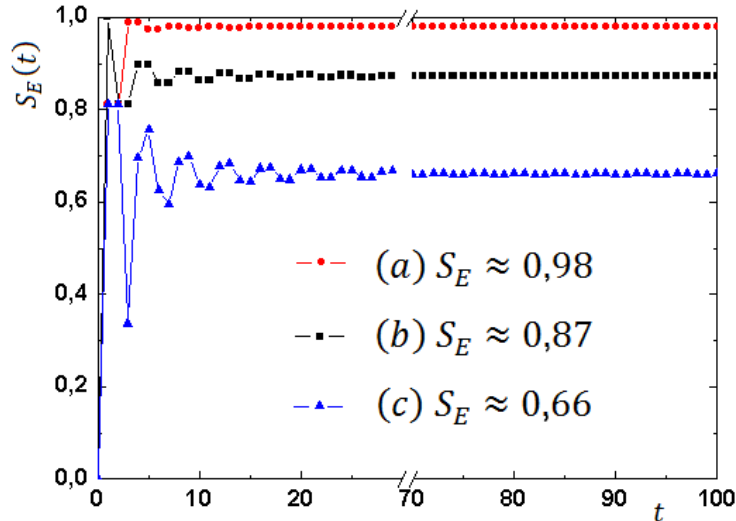


Figura 2.4: A entropia de emaranhamento do estado inicial dado pelo produto tensorial de $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$ com os estados de posição (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle + |+1\rangle)$, (b) $|0\rangle$ e (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|-1\rangle - |+1\rangle)$ para cada passo cuja evolução é dada por uma moeda Hadamard.

Por esses exemplos, nota-se que o emaranhamento no limite assintótico é muito sensível às condições iniciais e a moeda quântica utilizada, e em nenhum dos casos descritos nos leva a uma condição de máximo emaranhamento. Além disso, quanto mais não-local for o estado inicial, menores serão os valores nos pontos de mínimo, chegando a estados praticamente não-emaranhados quando a delocalização é muito alta.

Capítulo 3

Resultados

3.1 Caminhada quântica dirigida por uma moeda clássica

A caminhada quântica evoluindo com uma moeda quântica \hat{C} fixa já foi exaustivamente estudada na literatura [6, 8, 24], mas o que aconteceria, porém, se ruídos, algum tipo de desordem ou flutuações mudassem \hat{C} de um passo para outro? O que aconteceria se \hat{C} mudasse aleatoriamente entre duas moedas possíveis? Uma suposição intuitiva poderia sugerir que todas as características da caminhada quântica iriam se perder em tal processo. Com efeito, sabe-se que algumas características típicas da caminhada quântica, tais como a distribuição de probabilidade ou sua dispersão se aproximam do caso clássico [26] com este tipo de desordem. No entanto, até o momento em que foi iniciado nosso trabalho, nenhum estudo levou em consideração o emaranhamento de uma caminhada quântica com desordem para qualquer condição inicial. A única exceção, que veio ao nosso conhecimento depois que essa idéia já estava sendo estudada, foi no trabalho de C. M. Chandrashekar [27] no qual ele investigou numericamente o comportamento do emaranhamento para uma caminhada quântica de cem passos, mas com apenas uma condição inicial e dois tipos particulares de desordem.

Decidimos denominar essa forma de caminhada quântica desordenada como caminhada quântica aleatória dirigida por uma moeda clássica ou *Random Quantum Random Walk* (RQRW) em inglês [28]. As caminhadas quânticas desordenadas podem ser classificadas de três maneiras fundamentais. Na desordem dinâmica, a cada passo uma moeda clássica

é jogada e a partir do resultado é escolhida uma nova moeda quântica $C(t)$ (figura 3.1a). Na desordem estática, a moeda é dependente da posição, ou seja, antes do início da caminhada, é escolhida qual moeda estará em cada posição, ou seja, $C(j)$ (figura 3.1b) sendo fixa no tempo. No terceiro tipo de desordem, chamada desordem flutuante, sorteia-se a todo instante e posição uma nova moeda $C(j, t)$ (figura 3.1c) [17].

A escolha da moeda quântica nos distintos tipos de desordem é dirigida por uma moeda clássica, que sorteia o operador a ser aplicado na posição e/ou a cada passo. Suponhamos primeiramente uma moeda clássica balanceada de dois lados. A cada lançamento o lado "cara" corresponderá à moeda quântica Hadamard e "coroa" à de Fourier. Em nossa nomenclatura, denominaremos essas caminhadas desordenadas por "random quantum walk" ou $RQRW_2$ (figura 3.1, parte de cima) onde o subíndice indica o número de possibilidades de moedas quânticas. Porém, há inúmeras moedas quânticas possíveis que podem ser estabelecidas pelos três parâmetros $q(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ dentro dos seus respectivos intervalos. No caso $RQRW_\infty$, a moeda clássica tem infinitos lados, cujos valores $q(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ são escolhidos a partir de distribuições uniformes nos intervalos de $0 \leq q(t) \leq 1$ e $0 \leq \theta(t), \varphi(t) \leq 2\pi$ (figura 3.1, parte de baixo). Primeiramente, vamos tratar o caso dinâmico, em seguida, os outros dois casos de desordem.

Nota-se que o $RQRW_\infty$ é a forma mais geral da caminhada quântica, sendo que os casos clássico, quântico e $RQRW_2$ são casos particulares desse. O caso clássico ocorre quando $q(t)$ é sorteado entre 0 ou 1 ($\theta(t) = \varphi(t) = 0$), fazendo com que a diagonal principal ou a secundária da matriz moeda seja nula. Não havendo mais superposições, mas um único estado resultante de amplitude de probabilidade igual a 1, teremos um caso semelhante a uma bola em uma mesa de pregos (*Galton's board*), no qual os valores de 0 ou 1 para $q(t)$ determinam a direção da partícula (direita ou esquerda). Para recuperar o caso quântico, basta que a cada passo todos os parâmetros assumam o mesmo valor (moeda fixa). O $RQRW_2$ ocorrerá se sempre $q(t) = 1/2$ e os valores de $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ variarem ambos aleatoriamente entre 0 (Hadamard) e $\pi/2$ (Fourier).

A figura 3.2 compara a distribuição de probabilidade $\langle P(j) \rangle$ após uma caminhada de 400 passos e a dispersão $\langle \sigma(t) \rangle$ para a caminhada quântica com a moeda Hadamard, $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$ fazendo uma média a partir de vários estados iniciais locais e não-locais diferentes. Para o caso local, o estado inicial geral é dado por $|\Psi(0)\rangle = (\cos\alpha_s |\uparrow\rangle + e^{i\beta_s} \sin\alpha_s |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ onde a primeira realização numérica partiu de $(\alpha_s, \beta_s) = (0, 0)$ e as

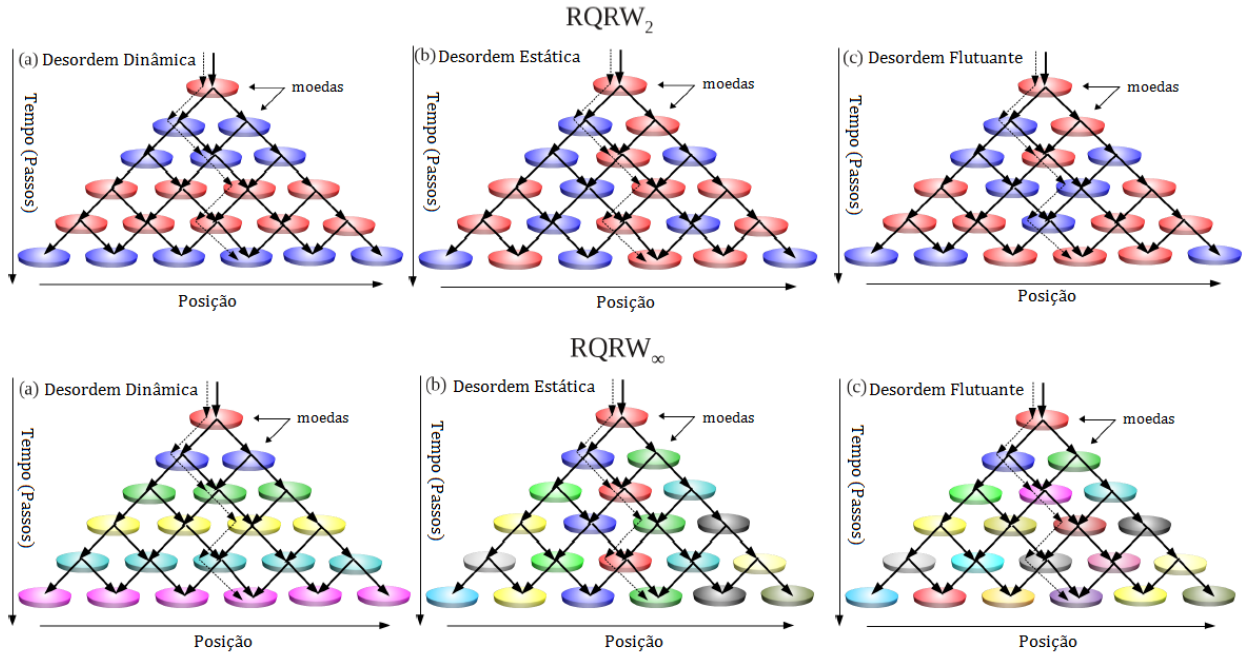


Figura 3.1: As linhas pontilhadas representam uma das várias possíveis realizações da caminhada clássica e as curvas sólidas representam as amplitudes de probabilidades associadas ao $RQRW_2$ (acima) e $RQRW_\infty$ (abaixo). As cores representam diferentes moedas quânticas sorteadas pela moeda clássica. Os três tipos de desordem principais: (a) dinâmica na qual as moedas são sorteadas no tempo, (b) estática com as moedas fixas no tempo, mas sendo sorteadas a cada posição e (c) flutuante na qual as moedas são sorteadas tanto na posição quanto no tempo. Retirado de [28] com adaptações.

próximas realizações foram obtidas por incrementos independentes de $0,1$ até $(\alpha_s, \beta_s) = (\pi, 2\pi)$ resultando numa média sobre 2.016 simulações. Já para o caso não-local, o estado inicial geral é dado por $|\Psi\rangle = (\cos\alpha_s|\uparrow\rangle + e^{i\beta_s}\sin\alpha_s|\downarrow\rangle) \otimes (\cos\alpha_p| - 1\rangle + e^{i\beta_p}\sin\alpha_p| + 1\rangle)$, iniciando em $(\alpha_s, \beta_s, \alpha_p, \beta_p) = (0, 0, 0, 0)$, acrescentando $0,4$ em cada parâmetro independentemente até $(\alpha_s, \beta_s, \alpha_p, \beta_p) = (\pi, 2\pi, \pi, 2\pi)$ num total de 16.384 simulações.

Nota-se que os três casos são distintos. No caso da moeda Hadamard, a distribuição é simétrica, com picos e maior concentração nas laterais e sua dispersão é proporcional ao tempo (ou número de passos). O $RQRW_\infty$ tem características de distribuição de probabilidade diferentes do caso da moeda fixa. Sua distribuição de probabilidade é gaussiana ($e^{-j^2/2\sigma^2}/\sqrt{2\pi\sigma^2}$) em que $\sigma \propto \sqrt{t}$. Essa distribuição ocorre devido à ausência de interferências destrutivas, tendo comportamento semelhante ao caso clássico. Já o $RQRW_2$ tem um comportamento híbrido, isto é, sua distribuição tem características tanto do caso clássico quanto quântico. Isso se deve as duas moedas utilizadas que são quânticas e equilibradas, fazendo com que as concentrações nas laterais ainda existam. Seu σ também é híbrido, sua equação é do tipo $\sqrt{at^2 + bt}$, sendo a e b constantes. No entanto, a medida

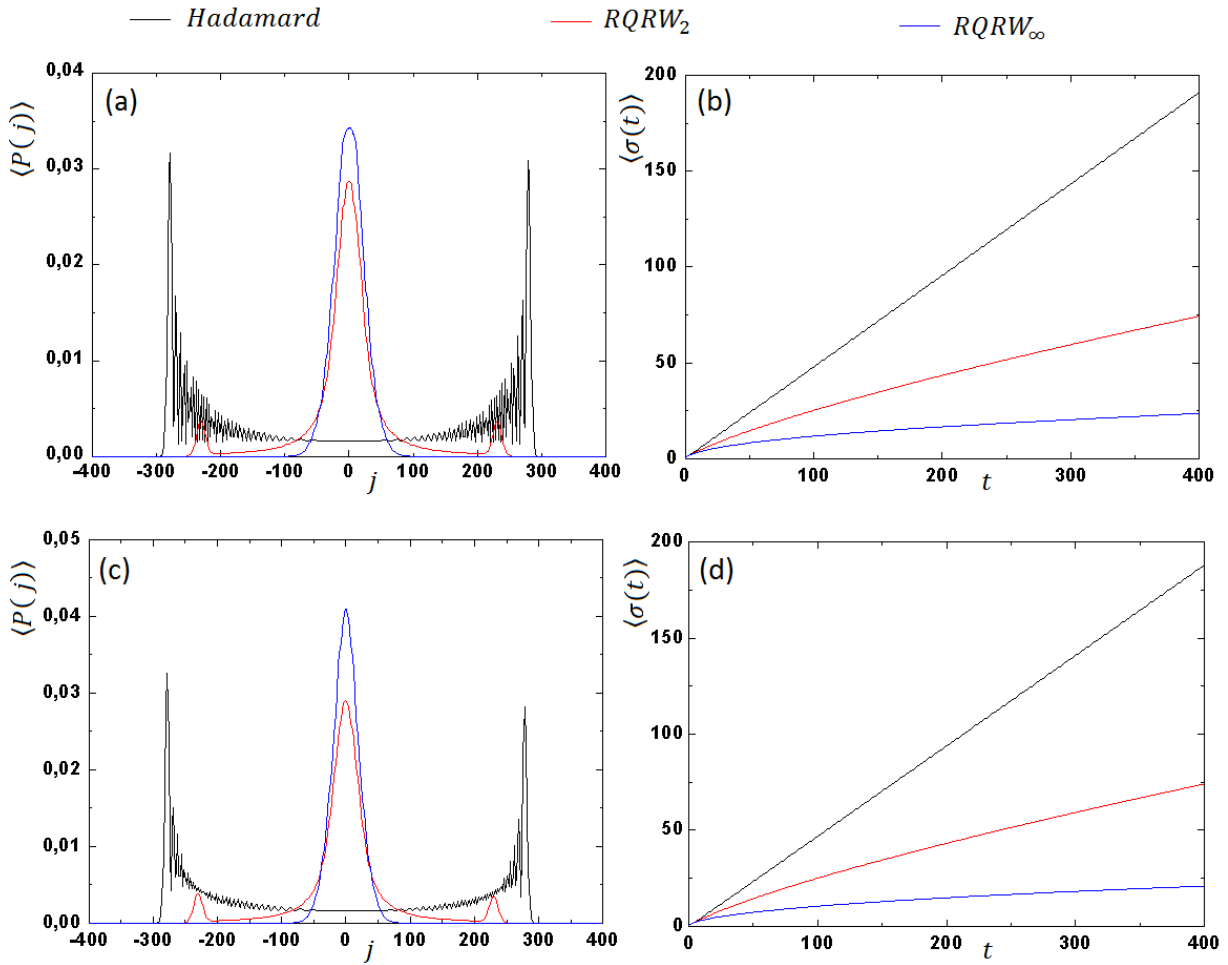


Figura 3.2: Distribuição de probabilidade média e dispersão média de uma caminhada de 400 passos com moeda fixa Hadamard e desordem dinâmica nos casos $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$. A média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais em (a) e (b) e 16.384 não-locais em (c) e (d).

que aumentamos o número de passos, observamos que $a \rightarrow 0$, tornando-se uma distribuição totalmente clássica. Com essas características, nota-se uma semelhança muito grande entre os comportamentos do caso clássico com o $RQRW$ tanto em distribuição quanto na necessidade de ter um número suficiente de amostras para através da média obter curvas suaves.

Porém o mais intrigante e, a primeiro momento, contraintuitivo, é o resultado para o emaranhamento. Como pode ser visto a partir da figura 3.3, o emaranhamento médio $\langle S_E(t) \rangle$ se aproxima do valor máximo possível para ambos os casos de $RQRW$ após algumas centenas de passos. Para efeito de comparação, na mesma figura vemos a caminhada quântica com a moeda Hadamard onde claramente $S_E(t) \neq 1$ assintoticamente. Nesse caso, como já mencionado na teoria, o valor assintótico de S_E é altamente sensível as

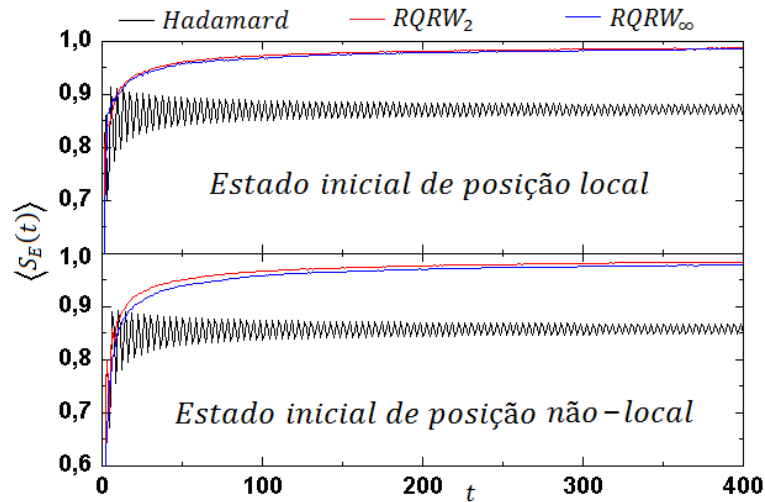


Figura 3.3: Emaranhamento médio ao longo do tempo de uma caminhada de 400 passos com moeda Hadamard e desordem dinâmica nos casos $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$. A média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais (acima) e 16.384 não-locais (abaixo).

condições iniciais, sendo portanto muito baixo o conjunto de estados iniciais dando altos valores de $S_E(t)$, como visto na figura 2.3 e ao tomarmos a média para um conjunto de estados locais e não-locais vemos que no limite assintótico $SE < 0,9$. Em outras palavras, esse resultado sugere que as caminhadas quânticas com desordens do tipo $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$ têm $S_E(t) \rightarrow 1$ para qualquer estado inicial. Esta última afirmação nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema. No limite assintótico e para qualquer estado inicial, $S_E \rightarrow 1$ se a moeda quântica atuando no caminhante a cada passo for um operador unitário randômico do $SU(2)$.

Esses resultados são notados para diferentes estados iniciais, mas será que as condições iniciais interferem muito no emaranhamento assintótico para os tipos de $RQRW$? Na verdade, não. Veremos detalhadamente na seção 3.5, mas podemos adiantar que, numericamente, não há diferença no limite assintótico. Devido à randomicidade, tanto um estado inicial local quanto não-local gerará resultados imprevisíveis em suas amplitudes de onda e após vários passos, nunca saberemos qual foi o possível estado inicial. Logo, quando afirmamos que independe das condições iniciais, estamos englobando os dois graus de liberdade que compõem o estado inicial.

3.2 Prova analítica

Pelo fato do emaranhamento assintótico sobre uma média de vários estados iniciais tender ao valor máximo, podemos afirmar que independará do estado inicial. Antes de provar isso, é importante conceituarmos o que entendemos por limite assintótico. Esse limite está associado ao comportamento da matriz densidade reduzida $\rho_C = Tr_p(\rho(t))$ num longo tempo, onde torna-se estacionária. Aqui, $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$ tal que $|\Psi(t)\rangle = \sum_j (a(j,t)|\uparrow\rangle + b(j,t)|\downarrow\rangle) \otimes |j\rangle$. A prova analítica do limite assintótico para o emaranhamento foi demonstrada para uma caminhada quântica com moeda fixa Hadamard [24] e devemos mostrar que para o *RQRW* isso também é verdade. Quando falamos em limite assintótico, fica evidente que $t \rightarrow \infty$, e o sistema atinge a situação em que $\rho_C(t+1) = \rho_C(t) + \mathcal{O}$, sendo \mathcal{O} o termo que nos informa a diferença entre as matrizes reduzidas em t e $t+1$. Porém, queremos provar exatamente que no limite assintótico, $\mathcal{O} \rightarrow 0$, e $\rho_C(t+1) = \rho_C(t)$. Apenas para não carregar essa informação até o fim da demonstração e deixá-la mais "clara", vamos já assumir inicialmente essa condição para \mathcal{O} e a comprovaremos numericamente na próxima sessão.

Podemos reescrever a equação (2.12) como

$$\rho_C(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \gamma(t) \\ \gamma^*(t) & \beta(t) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

sendo $\alpha(t) = \sum_j |a(j,t)|^2$, $\beta(t) = \sum_j |b(j,t)|^2$ e $\gamma(t) = \sum_j a(j,t)b^*(j,t)$. Afirmar que a matriz densidade reduzida tende a ser constante ao longo do tempo implica que os termos dela também tendem a ser constantes. Para qualquer estado inicial, utilizando o resultado da equação (2.4) em $t+1$, podemos reescrever os termos dessa matriz para $\rho_C(t+1)$. Expressaremos a somatória em j de $-\infty$ até $+\infty$, somando todas as unidades, não apenas as pares ou ímpares dependentes do passo. Isso é possível pois se o passo ocupar apenas as casas ímpares, nas casas pares terão valor nulo, e o mesmo ocorre se as probabilidades só ocuparem as casas pares. Então poderemos fazer as operações da equação (2.4) e, após isso, aplicar a mesma somatória tanto nos termos em $t+1$ quanto em t , e obteremos

$$\begin{aligned} \alpha(t+1) &= \sum_j a(j,t+1)a^*(j,t+1) \\ &= |c_{\uparrow\uparrow}(t+1)|^2\alpha(t) + |c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2\beta(t) + 2\text{Re}[c_{\uparrow\uparrow}(t+1)c_{\uparrow\downarrow}^*(t+1)\gamma(t)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que $Re[.]$ representa apenas a parte real pois se $\alpha(t+1)$ é um termo real, então é possível afirmar que o termo imaginário é nulo. Uma das condições do sistema é que

$|c_{\uparrow\uparrow}(t+1)|^2 + |c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2 = |\sqrt{q(t)}|^2 + |\sqrt{1-q(t)}|^2 = 1$. Outra condição importante é a soma da diagonal principal de uma matriz densidade, ou seja, $\alpha(t+1) + \beta(t+1) = 1$. Com isso, utilizando essas duas condições na equação (3.2) substituindo um dos termos, isto é

$$\alpha(t+1) = |c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2 + (1 - 2|c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2)\alpha(t) + 2\text{Re}[c_{\uparrow\uparrow}(t+1)c_{\uparrow\downarrow}^*(t+1)\gamma(t)] \quad (3.3)$$

Nesse ponto, podemos impôr a condição do limite assintótico em que os termos da matriz reduzida tornam-se constantes, ou seja, $\alpha(t+1) = \alpha(t)$. Assim, podemos rearranjar a equação anterior, eliminando termos comuns,

$$2|c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2\alpha(t) = |c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2 + 2\text{Re}[c_{\uparrow\uparrow}(t+1)c_{\uparrow\downarrow}^*(t+1)\gamma(t)]. \quad (3.4)$$

Dividindo os dois lados da equação por $2|c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2$, chegamos finalmente a

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} + \text{Re} \left[\frac{c_{\uparrow\uparrow}(t+1)}{c_{\uparrow\downarrow}(t+1)} \gamma(t) \right]. \quad (3.5)$$

O resultado para $\beta(t+1)$ é o mesmo, o que muda é a condição $|c_{\downarrow\uparrow}(t+1)|^2 + |c_{\downarrow\downarrow}(t+1)|^2 = 1$, e com isso, chegaremos a solução

$$\beta(t) = \frac{1}{2} + \text{Re} \left[\frac{c_{\downarrow\downarrow}^*(t+1)}{c_{\downarrow\uparrow}^*(t+1)} \gamma(t) \right]. \quad (3.6)$$

Impondo agora a condição do traço de uma matriz densidade, chegamos finalmente a,

$$\alpha(t) + \beta(t) = 1 + \text{Re} \left[\left(\frac{c_{\uparrow\uparrow}(t+1)}{c_{\uparrow\downarrow}(t+1)} + \frac{c_{\downarrow\downarrow}^*(t+1)}{c_{\downarrow\uparrow}^*(t+1)} \right) \gamma(t) \right]. \quad (3.7)$$

Para satisfazer a condição acima,

$$\text{Re} \left[\left(\frac{c_{\uparrow\uparrow}(t+1)}{c_{\uparrow\downarrow}(t+1)} + \frac{c_{\downarrow\downarrow}^*(t+1)}{c_{\downarrow\uparrow}^*(t+1)} \right) \gamma(t) \right] = 0. \quad (3.8)$$

Notamos que o termo dentro dos parênteses carrega informações reais e complexas, então podemos reescrevê-lo como um $z(t) = x(t) + iy(t)$, além de $\gamma(t) = \text{Re}[\gamma(t)] + i\text{Im}[\gamma(t)]$. Como eles já estão dentro de um $\text{Re}[\cdot]$, ao fazer a multiplicação $z(t)\gamma(t)$, descartamos as resultantes complexas, ou seja, $x(t)\text{Re}[\gamma(t)] - y(t)\text{Im}[\gamma(t)] = 0$, ou rearranjando

$$x(t)\text{Re}[\gamma(t)] = y(t)\text{Im}[\gamma(t)]. \quad (3.9)$$

Mas se levarmos em consideração que essa equação deve valer a qualquer instante de tempo, e que $\gamma(t+2) = \gamma(t+1) = \gamma(t)$, então

$$x(t+1)\text{Re}[\gamma(t)] = y(t+1)\text{Im}[\gamma(t)]. \quad (3.10)$$

Dividindo as duas últimas equações, chegamos em uma relação $x(t)y(t+1) = x(t+1)y(t)$, o que nos daria uma solução não-trivial. Nesse ponto, a aleatoriedade do sistema deverá ser imposta. Como temos uma situação randômica ao longo do tempo, essa equação quase nunca seria satisfeita, uma vez que esses termos são todos independentes. Mesmo que fosse satisfeita, bastaria andar mais um ou dois passos, pois essa equação só será satisfeita se a moeda for fixa, e cairíamos na situação de não sabermos os valores assintóticos de α , β e γ . Levando a aleatoriedade em consideração, vemos que a única forma das equações (3.9) e (3.10) sempre serem satisfeita é se $Re[\gamma(t)] = Im[\gamma(t)] = 0$, o que implica que $\gamma(t) = 0$. Olhando as equações (3.5) e (3.6), encontramos que $\alpha(t) = \beta(t) = 1/2$, e assim a matriz densidade reduzida pode ser escrita no limite assintótico como

$$\rho_C(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

O que leva, finalmente, a $S_E = -Tr(\rho_C(t)\log_2(\rho_C(t))) = 1$. Então, no limite assintótico, qualquer estado inicial nos leva ao emaranhamento máximo. Não encontramos nenhuma prova analítica específica para $RQRW_2$, afirmando que equilibrado ou desequilibrado, ele conduz a um máximo emaranhamento assintoticamente. No entanto, podemos afirmar que a prova analítica engloba a possibilidade de ser um $RQRW_2$ e seu emaranhamento ir para um como mostrado numericamente na figura 3.3. Outra situação que é importante analisar é quando um ou dois dos termos são fixos. A prova segue a mesma. Devemos pensar nos casos em que $q(t) = 0$ ou $q(t) = 1$, por exemplo, implicaria que os termos $|c_{\uparrow\uparrow}(t)|^2$ e $|c_{\uparrow\downarrow}(t)|^2$ sejam 0 ou 1. Nesse caso, precisa-se "truncar" a análise na equação (3.3) para evitar problemas de divergência. Nessa equação teremos duas situações: ou o resultado será redundante ($\alpha(t+1) = \alpha(t)$) ou encontraremos a mesma solução do final da análise. Caso nos informe o resultado redundante, basta trocar de variável substituída quando usar o argumento $|c_{\uparrow\uparrow}(t+1)|^2 + |c_{\uparrow\downarrow}(t+1)|^2 = 1$

Outro exemplo é quando $\theta(t) = 0$ ou π , e caímos em uma situação que o termo $|c_{\uparrow\uparrow}(t)|^2/|c_{\uparrow\downarrow}(t)|^2$ é real, o que implica que $Re[\gamma(t)] = 0$, mas nada nos fala na análise que $Im[\gamma(t)] = 0$. Já no caso em que $\theta(t) = \pi/2$, entramos no caso em que $Im[\gamma(t)] = 0$, e teríamos que impôr, sem provas, que $Re[\gamma(t)] = 0$. Já quando apenas $\varphi(t)$ muda, nada podemos afirmar pela prova analítica, já que a partir da equação (3.5) não há termos dependentes de $\varphi(t)$.

Embora a prova analítica estudada aqui não possa ser utilizada para alguns casos

particulares que não exploram todo o espaço $SU(2)$ da moeda $C(t)$, simulações numéricas sugerem que, se pelo menos um dos três parâmetros independentes de $C(t)$ forem aleatórios, obtemos $S_E \rightarrow 1$ assintoticamente como observamos na figura 3.4. Foram executadas 2.016 simulações para cada caso, tirando uma média de vários estados iniciais em que os parâmetros que eram constantes tinham seus valores sorteados ao início de cada simulação.

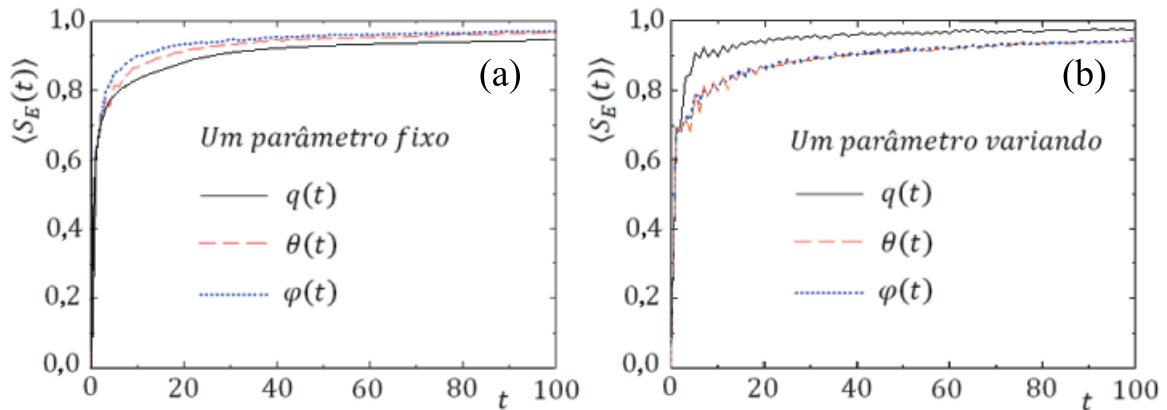


Figura 3.4: Emaranhamento médio no tempo de uma caminhada de 100 passos para as desordens dinâmicas: (a) sorteando dois parâmetros e fixando um e (b) sorteando um parâmetro e fixando os outros dois. A média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais.

Além disso, vale salientar que a prova não nos diz nada quanto à taxa de convergência, ou seja, o quão rápido $S_E \rightarrow 1$ (limite assintótico) porque já assumimos que a matriz densidade reduzida é estacionária.

3.2.1 Prova numérica da hipótese assintótica

Para demonstrar o teorema discutido anteriormente, partimos de duas hipóteses: (i) a necessidade da desordem dinâmica que nos permite introduzir uma solução trivial para as equações (3.9) e (3.10) e (ii) a hipótese assintótica, onde afirmamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_C(t+1) - \rho_C(t) = 0$, sendo essa uma condição suficiente, mas não necessária, para que $S_E \rightarrow 1$. Com isso, notamos que se $\rho_C(t+1) = \rho_C(t) + \mathcal{O}$, a diferença \mathcal{O} deve tender a zero para $t \rightarrow \infty$, pois isso nos afirma que a matriz densidade está convergindo para uma situação estacionária. Essa convergência também é observada para as caminhadas com moeda fixa, mas sem atingir o emaranhamento máximo [24]. No caso do $RQRW$, uma maneira de demonstrar isso é estudar, ainda que numericamente, o traço da diferença entre uma

matriz densidade e sua adjacente no tempo,

$$D(t) = \frac{1}{2} \text{Tr}(|\rho_C(t) - \rho_C(t-1)|), \quad (3.12)$$

em que $|A| = \sqrt{A^\dagger A}$. Manipulando a equação acima, notamos que $\text{Tr}(|\rho_C(t) - \rho_C(t-1)|)$ pode ser reescrito como a raiz da soma dos termos da matriz resultante, ou seja,

$$D(t) = \frac{1}{2} \sqrt{(\alpha(t) - \alpha(t-1))^2 + (\beta(t) - \beta(t-1))^2 + |\gamma(t) - \gamma(t-1)|^2 + |\gamma^*(t) - \gamma^*(t-1)|^2}. \quad (3.13)$$

Com uma simples manipulação, podemos diminuir dois termos dessa equação usando os argumentos do traço de uma matriz densidade, $\alpha(t) + \beta(t) = 1$, e que o módulo de um termo é igual ao módulo do seu complexo, ou seja,

$$D(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\alpha(t) - \alpha(t-1))^2 + |\gamma(t) - \gamma(t-1)|^2}. \quad (3.14)$$

Na figura 3.5a observamos $\langle D(t) \rangle$ para a caminhada quântica utilizando a moeda Hadamard e $RQRW_\infty$ fazendo uma média de vários estados locais e não-locais tal como mostrado nas figuras 3.2 e 3.3. Notamos que as duas começam de um ponto de máximo e decaem. Nos dois casos, $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$, corroborando para a demonstração do teorema.

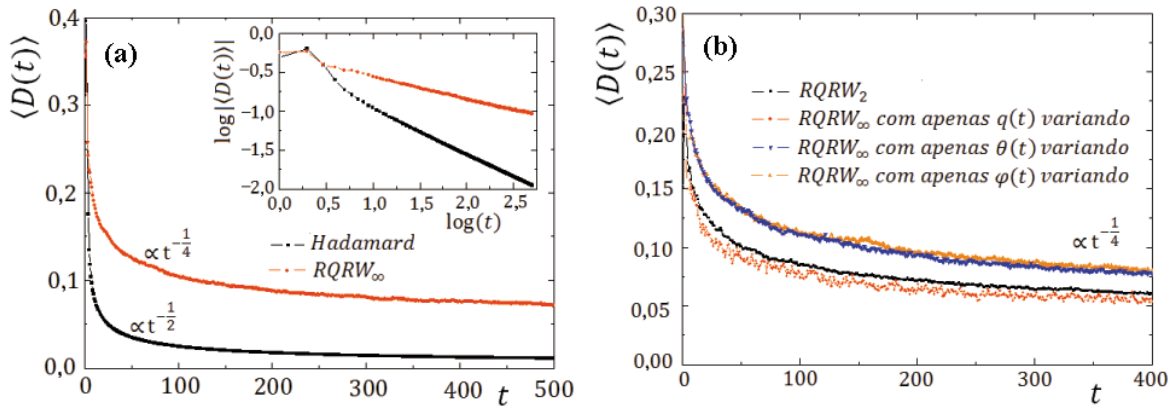


Figura 3.5: Evolução da média do traço da diferença entre duas matrizes densidade adjacentes no tempo $\langle D(t) \rangle$ para a (a) caminhada quântica Hadamard e $RQRW_\infty$ e (b) caminhada com desordem na qual somente $q(t)$, $\theta(t)$ e $\varphi(t)$ variam aleatoriamente e $RQRW_2$.

O quadro interno da figura 3.5a mostra o mesmo gráfico em forma de $\log|\langle D(t) \rangle| = a \cdot \log(t) + b$, em que a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear. Usando a propriedade logarítmica de $a \cdot \log(t) = \log(t^a)$, podemos assim concluir que o coeficiente angular é a taxa de decaimento de $\langle D(t) \rangle$. Nesse caso, desprezando os primeiros passos e analisando a partir do momento em que as curvas se tornam aproximadamente retas, o $RQRW_\infty$ tem um coeficiente angular de -0.2504 ± 0.0005 (aproximadamente $-1/4$), enquanto o caso

Hadamard tem -0.5102 ± 0.0007 (aproximadamente $-1/2$). Isso nos dá uma informação interessante, como $\langle D(t) \rangle \rightarrow 0$. A caminhada quântica para a moeda Hadamard tem $\langle D(t) \rangle \propto t^{-1/2}$, enquanto que o $RQRW_\infty$, $\langle D(t) \rangle \propto t^{-1/4}$. Logo, o $RQRW_\infty$ necessita de um tempo muito maior para atingir o limite assintótico, enquanto que a moeda fixa precisa de no máximo algumas centenas de passos. Para verificar se essa taxa de decaimento é apenas uma característica do $RQRW_\infty$, observamos na figura 3.5b outros três tipos de caminhadas com desordem nas quais cada um dos parâmetros variam aleatoriamente no tempo, além do $RQRW_2$. Concluimos que, caso haja desordem dinâmica ela deve seguir a mesma taxa de convergência no tempo. Estes resultados obtidos com simulações são indicações numéricas claras que, ao atingir o limite assintótico, os termos de $\rho_C(t)$ convergirão a valores constantes e, por consequência, encontraremos uma entropia de emaranhamento constante.

3.3 Outros tipos de desordens

A primeira vista, pode-se perguntar se a origem da capacidade de geração do emaranhamento máximo observado no $RQRW$ está na aleatoriedade da moeda ou no fato da desordem ser dinâmica. Para verificar isso, é interessante confrontar com outros casos de desordem. Para a desordem dinâmica, foi escolhida uma moeda aleatoriamente para todas as posições a cada instante de tempo. Já para a desordem estática, foi escolhida uma moeda randomicamente em cada posição $|j\rangle$. Para a desordem flutuante, foi sorteada uma moeda para cada posição e para cada instante de tempo (figura 3.1).

Na figura 3.6 observamos o emaranhamento médio cuja média foi obtida a partir de 2.016 estados iniciais locais utilizando a equação (2.2) seguindo o mesmo procedimento da figura 3.2 e 3.3 para o caso $RQRW_\infty$. Vemos que tanto o caso dinâmico quanto o flutuante têm seu emaranhamento médio tendendo a 1 no limite assintótico, assim como verificado anteriormente. Nota-se, porém, que o caso flutuante converge a 1 a uma taxa menor que o caso dinâmico, e isso também é observado em $\langle D(t) \rangle$, onde também necessita de um tempo maior para convergir a zero. Isso nos indica que é condição necessária a moeda variar dinamicamente para $S_E \rightarrow 1$, mas variar também na posição (desordem flutuante) contribui negativamente para a taxa de convergência do emaranhamento ao valor máximo.

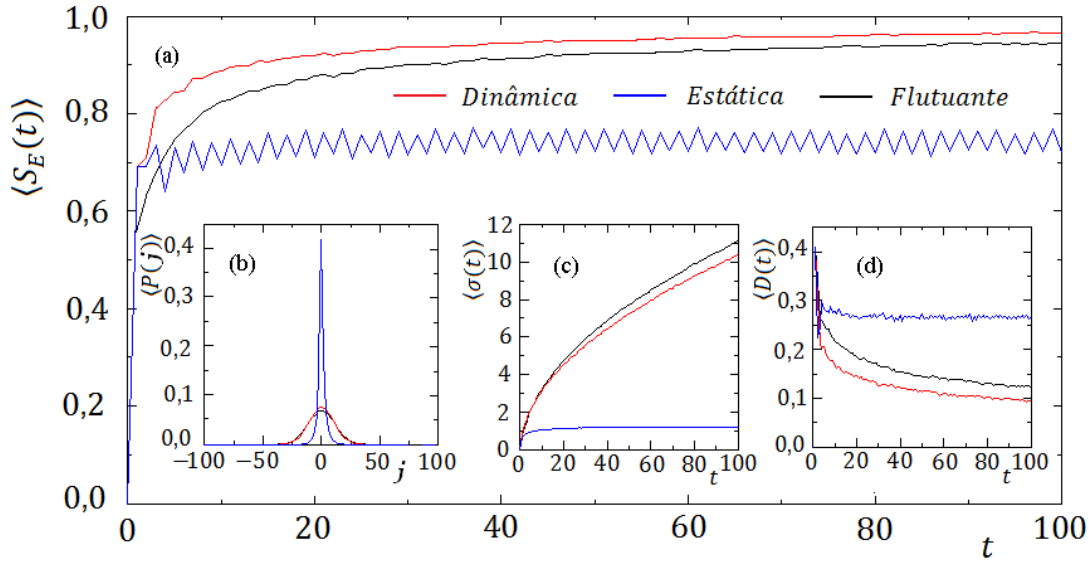


Figura 3.6: Média do (a) emaranhamento, (b) distribuição de probabilidade, (c) dispersão e (d) $D(t)$ para os três tipos de desordem usando o $RQRW_\infty$ (2.016 condições locais iniciais).

O emaranhamento para uma caminhada com desordem estática partindo de estados locais atinge na média 0,7 e oscila entre vários estados. O fato de oscilar entre estados próximos e inconstantes é explicado por $\langle D(t) \rangle$. Nesse caso, o traço da diferença entre duas matrizes densidades em t e $t - 1$ não tende a zero em $t \rightarrow \infty$, mas a um valor constante em torno de 0,27. Então, se sempre haverá uma diferença entre operadores densidades, não há convergência do emaranhamento no limite assintótico e, por consequência, a prova analítica não pode ser estendida para esse caso, pois $\mathcal{O} \neq 0$ sempre. Outro ponto a se levantar é que, de forma semelhante ao caso de moeda fixa, a desordem estática depende do estado inicial e da moeda. Na figura 3.7 vemos que a desordem estática no caso $RQRW_2$ aumenta para aproximadamente 0,84.

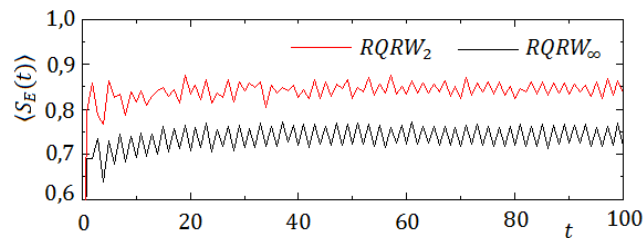


Figura 3.7: Média do emaranhamento na desordem estática comparando $RQRW_2$ e $RQRW_\infty$ (2.016 condições locais iniciais).

Também outro ponto interessante é a distribuição de probabilidade. Nos casos dinâmico e flutuante observamos uma distribuição clássica e dispersão semelhantes. No caso estático, porém, a distribuição de probabilidade média tem uma concentração na origem

com uma região de pico. Além disso, sua dispersão média tende a um valor constante, diferente dos outros casos anteriores. Trata-se de uma localização de Anderson [17].

Em [28], foi investigado também caminhadas com moedas periódicas para verificar se é condição necessária para $S_E \rightarrow 1$ a moeda ser randômica. Seja uma moeda periódica $F^N H$, onde F corresponde a moeda Fourier, N o número de vezes que ela será aplicada e H corresponde a moeda Hadamard. Então, para $N = 1$ por exemplo, temos uma caminhada que a cada passo alterna entre a moeda Fourier e Hadamard. Para $N = 2$, em dois passos evoluímos a caminhada com uma moeda Fourier e em seguida com Hadamard e assim por diante. Investigamos os casos de $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ e $N = 9$. Notamos que o caso de $N = 1$ é uma forma de desordem estática, pois as casas pares e ímpares terão sempre as mesmas moedas. Mesmo os outros casos atingem médias de emaranhamento abaixo do máximo. Embora estudos mais sistemáticos sejam necessários ao longo dessa linha, em particular para a desordem estática, os resultados aqui apresentados sugerem que nem um distúrbio independente do tempo (estático), nem moedas não-aleatórias dependentes do tempo são suficientes para gerar estados maximamente emaranhados para qualquer condição inicial. Então moedas aleatórias dependentes do tempo (distúrbio dinâmico e flutuante) parecem ser essencial para alcançar tal façanha.

3.4 Outras condições de aleatoriedade

Outra pergunta que pode ser feita é se causaria alguma diferença no emaranhamento limitar os intervalos dos parâmetros sorteados da moeda nas redondezas da moeda Hadamard. Como mencionado anteriormente, a moeda Hadamard ocorre quando os valores de $q = 1/2$, $\theta = \varphi = 0$. Então limitaremos primeiramente o intervalo de $q(t)$ em três intervalos: $0 \leq q(t) \leq 1$, $0,4 \leq q(t) \leq 0,6$ e $0,45 \leq q(t) \leq 0,55$, fixando $\theta = \varphi = 0$, como pode ser visto na figura 3.8. Observe que o valor médio dos intervalos corresponde a moeda Hadamard ($q = 1/2$). Também foram feitas simulações limitando os intervalos de θ e φ , como pode ser visto na figura 3.9 em $-\pi \leq \theta(t), \varphi(t) \leq \pi$, $-0,1 \leq \theta(t), \varphi(t) \leq 0,1$ e $-0,05 \leq \theta(t), \varphi(t) \leq 0,05$. A média do emaranhamento foi feita a partir de 16.384 condições não-locais iniciais.

Ao verificarmos a distribuição de probabilidade, percebemos que a medida que o intervalo do parâmetro diminui, a distribuição de probabilidade aproxima-se da quântica

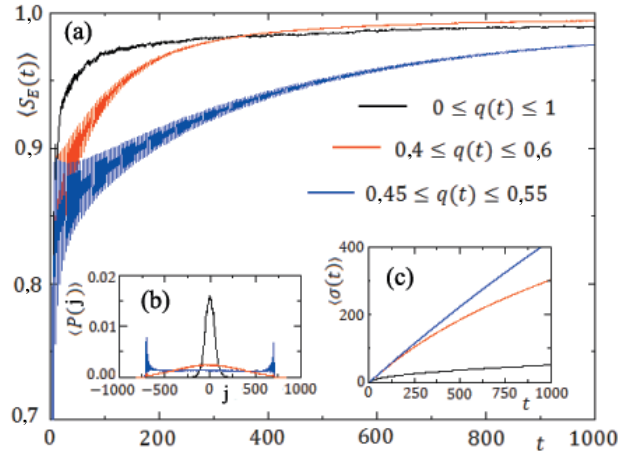


Figura 3.8: (a) Emaranhamento, (b) distribuição de probabilidade e (c) dispersão médias para uma caminhada de 1000 passos para diferentes intervalos de $q(t)$ (com $\theta = \varphi = 0$) cujas médias foram tomadas a partir de 16.384 condições iniciais não-locais.

(Hadamard). Por outro lado, observamos que mesmo um pequeno intervalo, o emaranhamento médio tende a um em todos os casos, mudando somente a taxa de convergência como que se aproxima de um. Quanto menor o intervalo, maior o tempo necessário para atingir o emaranhamento no limite assintótico.

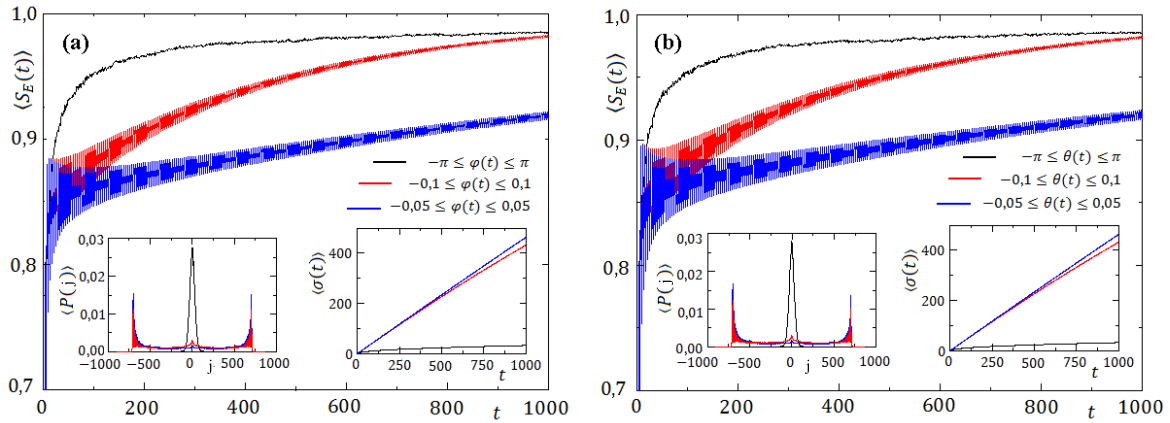


Figura 3.9: Emaranhamento, distribuição de probabilidade e dispersão médias para uma caminhada de 1000 passos para diferentes intervalos de (a) $\varphi(t)$ ($q = 1/2$ e $\theta = 0$) e (b) $\theta(t)$ ($q = 1/2$ e $\varphi = 0$) cujas médias foram tomadas a partir de 16.384 condições iniciais não-locais.

3.5 Estados iniciais deslocalizados

Vamos agora estudar a capacidade do $RQRW$ de gerar emaranhamento para condições iniciais deslocalizadas. Vamos trabalhar com $RQRW_\infty$ e a caminhada Hadamard. Optamos por uma distribuição gaussiana. Decidimos estudar os casos em que podemos separar

os graus de liberdade interno e externo, pensando em um estado geral não-emaranhado cobrindo todos os valores de j (inclusive os nulos), do tipo,

$$|\Psi(0)\rangle = |\xi\rangle \otimes \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi(j)|j\rangle, \quad (3.15)$$

sendo $|\xi\rangle$ uma superposição de estados de spin. Assim, ao calcularmos $|\Psi(0)|^2$, devemos separar as normas dos graus de liberdade interno e externo, e os dois devem ter norma igual a 1. A função $\psi(j)$ é real e positiva, sendo seu módulo quadrático em cada posição j correspondente ao seu respectivo valor em uma distribuição gaussiana, ou seja,

$$\psi^2(j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{j^2}{2\pi\sigma^2}}, \quad (3.16)$$

em que σ^2 é a variância, lembrando que a dispersão para a caminhada aleatória clássica é $\sigma = \sqrt{t}$. Consideraremos dois casos específicos de estados internos, sendo eles $|\xi_1\rangle = (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ e $|\xi_2\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$.

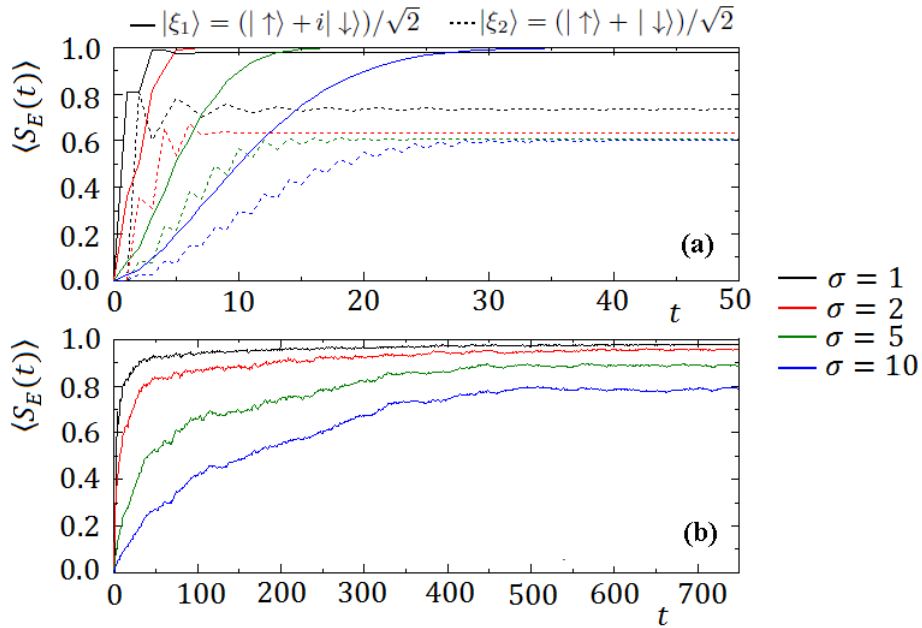


Figura 3.10: (a) Emaranhamento para caminhada Hadamard e (b) emaranhamento médio de 100 simulações do $RQRW_\infty$ para estados iniciais de posição gaussianos com diferentes dispersões e estados de spin $|\xi_1\rangle$ e $|\xi_2\rangle$.

A figura 3.10a mostra o emaranhamento para as condições iniciais deslocalizadas de diferentes valores de dispersão onde vemos que o emaranhamento assintótico da caminhada Hadamard é altamente sensível às condições iniciais e não levam ao emaranhamento máximo. Há o caso dado pelo estado inicial de spin $|\xi_1\rangle$ que observamos altos valores de emaranhamento, mas trata-se de uma exceção. Por outro lado, para $RQRW_\infty$ na figura

3.10b, vemos a independência do estado inicial para o valor assintótico de emaranhamento, o que diferencia cada caso de σ é a taxa de convergência a qual o emaranhamento se aproxima do máximo valor. De fato, vemos que necessita de alguns milhares de passos para uma distribuição com $\sigma = 10$ ultrapassar o valor de 0,9 para a entropia de emaranhamento [28]. Na figura 3.10b vemos ainda que os estados iniciais de spin $|\xi_1\rangle$ e $|\xi_2\rangle$ são rigorosamente os mesmos, o que nos indica o que influencia a taxa de convergência do emaranhamento não é o grau de liberdade interno, mas sim o externo, ou seja, quanto mais deslocalizado for o estado inicial, mais tempo necessitará para $S_E \rightarrow 1$ nos casos de caminhadas desordenadas dinamicamente.

3.6 Propostas experimentais

A tecnologia atual nos permite introduzir desordem na caminhada quântica de pelo menos duas formas diferentes. A primeira forma é baseada em elementos ópticos passivos, além de uma comutação rápida de moduladores electro-ópticos (EOM), onde o grau interno de liberdade da partícula é a polarização de um fóton e o grau externo (posição) é mapeado para diferentes vezes da chegada do fóton no fotodetector [16], como na figura 1.3. O operador moeda $C(t)$ é implementado usando placas de meia onda (HWP) e EOM dentro do circuito, enquanto o operador de deslocamento condicional S é executado pelos dois divisores de feixe polarizadores (PBS) e uma linha de fibra de atraso (loop) onde um feixe com dada polarização segue um caminho óptico mais longo. Além disso, as condições iniciais arbitrárias são simplesmente geradas por placas de quarto de onda (QWP) e HWP. Uma característica importante desse experimento é a sua escalabilidade com o número de passos. Na verdade, as técnicas de loop óptico de retorno usando alguns elementos ópticos como descrita acima e na figura 1.3 permitiram a implementação de uma caminhada de 28 passos com desordem estática e dinâmica [16].

A segunda maneira é implementada utilizando circuitos de guias de onda integrados, onde deslocadores de fase são instalados junto aos acopladores direcionais, fazendo os circuitos terem diferentes comprimentos/deformações [17]. Para testar as ideias aqui apresentadas, precisamos medir o emaranhamento do caminhante, que é obtido se soubermos o estado da moeda $\rho_C(t)$. Mas $\rho_C(t)$ é determinado mudando ligeiramente os dois regimes descritos acima. De fato, desde que um estado geral de polarização do fóton é

escrito como $\rho_C(t) = I_C + \sum_{j=1}^3 r_j \sigma_j$, sendo σ_j as matrizes de Pauli, podemos determinar $\rho_C(t)$ se medirmos r_j . Mas isso se consegue medindo a polarização circular média direita/esquerda em r_2 e a polarização média dos fótons no eixo vertical/horizontal (r_3), à $\pm 45^\circ$ do eixo r_1 [29]. Essas medições podem ser facilmente implementadas, organizando HWP e QWP adequadamente antes do fóton passar por uma PBS com fotodetectores em cada um dos seus braços. Note que os dados são relacionados com $\rho_C(t)$ e precisamos traçar seus graus de liberdade de posição (medidas de pós-processamento) para chegar a $\rho_C(t)$. Nesse trabalho e no material suplementar de [28], mostramos que apenas algumas dezenas de passos são suficientes para termos diferenças efetivas em S_E quando comparamos a caminhada quântica e $RQRW_2$.

Capítulo 4

Considerações e perspectivas

Nesse trabalho estudamos como diferentes tipos de desordem afetam a geração de emaranhamento entre os graus de liberdade interno (spin) e externo (posição) em uma caminhada aleatória quântica discreta no tempo dirigida por uma moeda clássica de dois lados ($RQRW_2$) e infinitos lados ($RQRW_\infty$). A desordem é introduzida pela moeda clássica de três maneiras distintas: na desordem dinâmica, a cada instante de tempo é sorteada uma moeda quântica, na estática, a moeda quântica varia em cada posição, sendo fixa no tempo e na flutuante, a moeda quântica é sorteada tanto na posição quanto no tempo.

A distribuição de probabilidade dos casos dinâmico e flutuante são semelhantes ao caso clássico (distribuição gaussiana) e, conseqüentemente, sua dispersão tem comportamento difusivo. Já o caso estático tem uma distribuição dada por uma localização de Anderson, na qual a distribuição é mais fina e sua dispersão tende a um valor constante. Porém o mais interessante ocorre ao se estudar o emaranhamento no limite assintótico. Para os casos de moedas ordenadas, o emaranhamento é altamente sensível às condições iniciais e a moeda quântica que dirige a evolução da caminhada. Além disso, o emaranhamento nunca atinge o valor máximo e somente para algumas condições iniciais atingem valores próximos de um. Já os casos de desordens no tempo (dinâmico e flutuante) geram estados maximamente emaranhados no limite assintótico independente da condição inicial do caminhante. Constatamos que o fato do emaranhamento ser máximo no limite assintótico depende apenas da aleatoriedade no tempo, não importando a quantidade de moedas que podem ser escolhidas. Ainda observamos que a desordem estática não é boa para gerar emaranhamento e nunca atinge o valor máximo, além de ser bem sensível as condições iniciais tal como o caso ordenado.

A partir da constatação que a desordem dinâmica leva ao emaranhamento máximo propomos um teorema e sua demonstração. Partindo de uma hipótese assintótica a qual estabelece que a matriz densidade reduzida é estacionária no limite assintótico, mostramos que a aleatoriedade da moeda no tempo é condição suficiente para atingir o emaranhamento máximo independente do estado inicial. A fim de demonstrarmos a hipótese assintótica, mostramos numericamente uma lei de potência para o traço da diferença entre a matriz densidade reduzida e sua adjacente no tempo comparando-a com o caso ordenado. Através de simulações partindo de estados iniciais deslocalizados, mostramos numericamente que a taxa de convergência ao emaranhamento máximo é sensível ao estado inicial de posição, ou seja, quanto mais deslocalizado o estado inicial, mais lenta a convergência para o emaranhamento máximo. Propomos ainda dois experimentos, nos quais essas idéias podem ser testadas baseados em tecnologia atual.

Finalmente, gostaríamos de salientar que nossas descobertas naturalmente levam a novas perguntas importantes. Por exemplo, qual é a interação entre ordem/desordem e criação de emaranhamento para caminhantes de duas ou três dimensões? O que aconteceria nesses casos com o emaranhamento nos diferentes tipos de desordem? Os resultados anteriores podem ser adaptadas para o caso de dois ou mais caminhantes em espaços uni, bi ou tri-dimensionais? Nesse caso, há uma correlação entre as duas partículas, compondo um estado interno geral que por sua vez está emaranhado com o grau de liberdade externo [30]. A desordem melhoraria a criação do emaranhamento bipartite e multipartite apenas entre os graus de liberdade internos, apenas entre o externo com o interno ou os dois casos? Acreditamos que investigações em resposta a essas indagações tragam outros resultados inesperados e fascinantes que fomentariam o desenvolvimento de novos protocolos de geração de emaranhamento.

Referências Bibliográficas

- [1] I. S. Oliveira, *et al.* "Computação Quântica: manipulando a informação oculta do mundo quântico". *Ciência Hoje* 193, 2003.
- [2] M. Nielsen, I. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information". Cambridge University Press, 2000.
- [3] K. Pearson, "The problem of the random walk" *Nature (Londres)* **72**, 294; 342 (1905).
- [4] D. Aldous, J. Fill. "Reversible markov chains and random walks on graphs". preprint available at <http://stat-www.berkeley.edu/users/aldous/book.html>.
- [5] F. Reif, "Fundamentals of statistical and thermal physics". New York: mcgraw-Hill, 1965. p. 4-16.
- [6] Y. Aharonov, L. Davidovich, e N. Zagury, "Quantum random walks" *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
- [7] L. Sansoni, "Integrated devices for quantum information with polarization encoded qubits". tese (Doutorado) - Sapienza Università di Roma (2012).
- [8] J. Kempe, "Quantum random walks-an introductory overview". *Contemp. Phys.* **44**, 307 (2003).
- [9] O. Pessoa Jr., "Conceitos de Física Quântica". Livraria da Física, São Paulo. Vol. 1, 2003.
- [10] V. Degiorgio, "Phase shift between the transmitted and reflected optical fields of a semireflecting lossless mirror is $\pi/2$ ". *Am. Journ. of Phys.* **48**, 81 (1980).

- [11] A. M. Childs, "Universal computation by quantum walk". *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
- [12] N. Shenvi, J. Kempe e K. B. Whaley, "A Quantum Random Walk Search Algorithm". *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
- [13] G. S. Engel *et al.*, "Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic systems". *Nature* **446**, 782-786 (2007).
- [14] M. Mohseni, P. Rebentrost, S. Lloyd e A. Aspuru-Guzik, "Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer". *The Journ. of Chem. Phys.* **129**, 174106 (2008).
- [15] G. E. M. Cabral A. F. de Lima e B. Lula Jr., "Interpretando o algoritmo de Deutsch no interferômetro de Mach-Zehnder". *Rev. Bras. Ens. Fís.* **26 (2)**, 109 (2004).
- [16] A. Schreiber *et al.*, "Photons Walking the Line: A Quantum Walk with Adjustable Coin Operations". *Phys. Rev. Lett.* **104**, 050502 (2010);
A. Schreiber *et al.*, "Decoherence and Disorder in Quantum Walks: From Ballistic Spread to Localization". *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180403 (2011).
- [17] A. Crespi *et al.*, "Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk". *Nature Photon.* **7**, 322 (2013).
- [18] G. G. Rigolin, "Estados quânticos emaranhados". Tese (Doutorado) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, 2005.
- [19] E. Schrodinger, "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik (The present situation in quantum mechanics)". *Naturwissenschaften*, 1935.
- [20] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?". Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, 1935.
- [21] J. S. Bell, "Physics 1", 195 (1964).
- [22] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem". *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981);

- A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities" *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [23] C. H. Bennett *et al.*, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels". *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).
- [24] G. Abal, R. Siri, A. Romanelli e R. Donangelo, "Quantum walk on the line: Entanglement and non-local initial conditions". *Phys. Rev. A* **73**, 042302, 069905(E) (2006).
- [25] C. H. Bennett *et al.*, "Concentrating partial entanglement by local operations". *Phys. Rev. A* **53**, 2046 (1996).
- [26] P. Ribeiro, P. Milman, e R. Mosseri, "Aperiodic Quantum Random Walks". *Phys. Rev. Lett.* **93**, 190503 (2004);
M. C. Bañuls *et al.*, "Quantum walk with a time-dependent coin" *Phys. Rev. A* **73**, 062304 (2006).
- [27] C. M. Chandrashekar, eprint arXiv:1212.5984 [quant-ph].
- [28] R. Vieira, E. P. M. Amorim e G. Rigolin, "Dynamically Disordered Quantum Walk as a Maximal Entanglement Generator". *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180503 (2013);
Ver material suplementar da referência acima.
R. Vieira, E. P. M. Amorim e G. Rigolin, "Entangling Power of Disordered Quantum Walks" em preparação.
- [29] A. Peres, "Quantum Theory: Concepts and Methods", (Kluwer Academic Publishers, New York, 2002).
- [30] S. E. Venegas-Andraca and S. Bose, eprint arxiv: 0901.3946 [quant-ph];
S. K. Goyal and C. M. Chandrashekar, "Spatial entanglement using quantum walk on a many-body system". *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 235303 (2010);
C. Di Franco, M. Mc Gettrick, and Th. Busch, "Mimicking the Probability Distribution of a Two-Dimensional Grover Walk with a Single-Qubit Coin". *Phys. Rev. Lett.* **106**, 080502 (2011);

- B. Allés, S. Gündüç, and Y. Gündüç, "Maximal entanglement from quantum random walks". *Quantum Inf. Process.* **11**, 211 (2012);
- E. Roldán et al., "N-dimensional alternate coined quantum walks from a dispersion-relation perspective". *Phys. Rev. A* **87**, 022336 (2013);
- S. Moulieras, M. Lewenstein, and G. Puentes, eprint arXiv: 1211.1591 [quant-ph].